彭家贵《微分几何》前五章
定理回顾, 定理补充与习题提示

熊锐

2018 年 1 月 24 日

Contents

1 欧式空间

向量空间, 向量分析, Lagrange 恒等式, 散度, 梯度, Nabla 算子, 向量场, 坐标, 坐标变换, 合同变换, 欧式变换, 刚体运动, 反向刚体运动.

1.1 定理回顾

命题 1.1 设 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的四个向量.

(1)$\boldsymbol{v}_1 \wedge (\boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_3) = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle \boldsymbol{v}_2 - \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_3$.

(2)$\langle \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \wedge \boldsymbol{v}_4 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4 \rangle - \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_4 \rangle \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

(3)$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3] = [\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1] = [\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$.

1.2 定理补充

命题 1.2 (Jacobi) 设 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的三个向量. 则

$$\boldsymbol{v}_1 \wedge (\boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_3) + \boldsymbol{v}_3 \wedge (\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{v}_2 \wedge (\boldsymbol{v}_3 \wedge \boldsymbol{v}_1) = 0$$

1.3 习题提示

1. 通过复合平移, 可以假设将原点映成原点. 先证明, $\mathcal{T}$ 将三角形映成全等三角形, 从而保持角度, 从而保持线段的比例. 且将平行四边形映成平行四边形, 从而保持和, 从而是线性的. 又因为保持距离, 所以是正交变换.

2. 求导.

3. 即 $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a}(t)}{|\boldsymbol{a}(t)|}$ 是常向量, 而已经有 $\boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{e}'$, 故 $\boldsymbol{e}' = 0 \iff \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{e}' = 0$, 带入计算即可.

4. 略.

5. 计算置换矩阵的行列式.

6. $\mathcal{T}\boldsymbol{v} \wedge \mathcal{T}\boldsymbol{w} = (\det \mathcal{T})\mathcal{T}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w})$.

2 曲线的局部理论

平面曲线, 空间曲线, 弧长参数, 切向量, 曲率, 曲率向量, 挠率, 法向量, 法平面, 主法向量, 从切平面, Frenet 标架, Frenet 公式, 圆柱螺旋线, 曲线论基本定理.

2.1 定理回顾

定理 2.1 每条正则曲线都可以写成单位速率曲线. 单位速率曲线 $\Longleftrightarrow$ 弧长参数曲线, 且

$$s(t)=\int_c^t\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(\tau)\right|\mathrm{d}\tau \qquad s'(t)=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right|$$

定义 2.2 (Fernet 标架) 考虑单位速率曲线 $\boldsymbol{r}(s)$, 我们定义

(1) $\boldsymbol{t}(s)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}(s)$. *(切向量)*

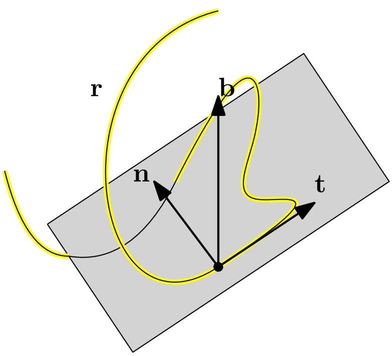
(2) $\kappa(s)=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}(s)\right|$. *(曲率)*

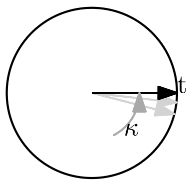
在曲率 $\kappa>0$ 时, 再定义

(3) $\boldsymbol{n}(s)=\frac{1}{\kappa(s)}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}(s)$. *(主法向量)*

(4) $\boldsymbol{b}(s)=\boldsymbol{t}(s)\wedge\boldsymbol{n}(s)$. *(次法向量)*

(5) $\tau(s)=-\left\langle\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}s},\boldsymbol{n}\right\rangle$. *(挠率)*





定理 2.3 (Fernet 公式) 考虑单位速率曲线 $\boldsymbol{r}(s)$, 假设

$$\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s), \kappa(s), \tau(s)\}$$

为其 *Fernet* 标架. 则

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{t}}(s) & = & & \kappa(s)\boldsymbol{n}(s) & \\ \dot{\boldsymbol{n}}(s) & = & -\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) & & +\tau(s)\boldsymbol{b}(s) \\ \dot{\boldsymbol{b}}(s) & = & & -\tau(s)\boldsymbol{n}(s) & \end{cases}$$

写成矩阵形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \kappa & \\ -\kappa & & \tau \\ & -\tau & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

定理 2.4 正则曲线 $\boldsymbol{r}$ 的曲率 $\kappa > 0$, 则 $\boldsymbol{r}$ 落在某个平面上的充要条件是 $\tau = 0$.

定理 2.5 (曲线论基本定理) 若 $\mathbb{R}^3$ 中的两条曲线 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ 定义在同一个参数区间 (a, b) 上, 满足

$$\kappa_1(s) = \kappa_2(s) > 0, \quad \tau_1(s) = \tau_2(s)$$

则存在 $\mathbb{R}^3$ 的一个刚体运动把 $\boldsymbol{r}_2$ 变为 $\boldsymbol{r}_1$.

2.2 定理补充

补充 2.6 (非单位速率曲线) 已知一般正则曲线 $\boldsymbol{r}(t)$, 假设

$$\{\hat{\boldsymbol{T}}, \hat{\boldsymbol{N}}, \hat{\boldsymbol{S}}, \hat{\kappa}, \hat{\tau}\}$$

是其化为单位速率曲线后的 *Fernet* 标架, 则

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) \\ \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| & & \\ * & \hat{\kappa}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|^2 & \\ * & * & \hat{\kappa}\hat{\tau}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{T}} \\ \hat{\boldsymbol{N}} \\ \hat{\boldsymbol{B}} \end{pmatrix}$$

作为推论

$$\hat{\boldsymbol{T}} = \frac{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}}{\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|} \qquad \hat{\boldsymbol{N}} = \hat{\boldsymbol{B}} \wedge \hat{\boldsymbol{T}} \qquad \hat{\boldsymbol{B}} = \frac{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \wedge \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}}{\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \wedge \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|}$$

$$\hat{\kappa} = \frac{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \wedge \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}}{\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|^3} \qquad \hat{\tau} = \frac{\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^3}\right]}{\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \wedge \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|^2}$$

证明 设 $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}, \kappa, \tau\}$ 为 $\boldsymbol{p}(s) = \boldsymbol{r}(t(s))$ 的一副 Fernet 标架. 注意到 $s'(t) = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right|$. 通过计算

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}s}(s(t))s'(t) = \boldsymbol{T}(s(t))s'(t) = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right| \hat{\boldsymbol{T}}(t) \\
&\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}(s(t))(s'(t))^2 + \boldsymbol{T}(s(t))s''(t) = s''(t)\hat{\boldsymbol{T}}(t) + \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right|^2 \hat{\kappa}\hat{\boldsymbol{N}}(t) \\
&\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^3}(t) = \ldots = (s''' - \hat{\kappa}^2 {s'}^3)\hat{\boldsymbol{T}}(t) + (\hat{\kappa}s's'' + (\hat{\kappa}{s'}^2)')\hat{\boldsymbol{N}} + \hat{\kappa}\hat{\tau}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right|^3 \hat{\boldsymbol{B}}
\end{aligned}$$

得证. □

2.3 习题提示

1. 计算, 并运用 2.
2. 参见 (2.6).
3. 带入 2.
4. 计算, 并运用 5.
5. 参见 (2.6).
6. 计算, 运用 (2.6).
7. 在 0 处, Fernet 标架发生了突变.
8. 不妨假设 P_0 在原点, 从而 $\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} \rangle$ 取极值, 其导数为 $2\langle \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r} \rangle$.

9. 不妨假设定点在原点. 则 $\boldsymbol{r}(s)=\lambda(s)\boldsymbol{t}$. 若 $\kappa>0$, 则求导数知 $\boldsymbol{t}=\lambda'(s)\boldsymbol{t}+\lambda(s)\kappa\boldsymbol{n}$, 从而 $\lambda'(s)=1,\kappa=0$. 矛盾.

   不妨假设定点在原点. 则 $\boldsymbol{r}(s)=\lambda(s)\boldsymbol{n}$. 求导 $\boldsymbol{t}(s)=\lambda'(s)\boldsymbol{n}-\lambda(s)\kappa\boldsymbol{t}+\lambda(s)\tau\boldsymbol{b}$, 则 $\lambda=-1/\kappa,\lambda'=0,\tau=0$. 从而是圆.

10. 略.

11. 略.

12. 略.

13. 使用角参数 θ, 设 $\boldsymbol{t}=(\cos\theta,\sin\theta)$. 则利用 $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|=\kappa$, 可以直接解出 $\theta=\int_0^s\frac{a}{a^2+\sigma^2}\mathrm{d}\sigma$. 然后带入得到 $\boldsymbol{t}$, 再计算 $\boldsymbol{r}=\int_0^s\boldsymbol{t}(\sigma)\mathrm{d}\sigma$.

14. 参见 (2.6).

15. κ 为常数是平凡的. 不妨假设球心在原点, 从而 $\langle\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}\rangle$ 为常数, 则 $\langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{r}\rangle=0$, 于是 $\kappa\langle\boldsymbol{N},\boldsymbol{r}\rangle+1=0$, 即 $\langle\boldsymbol{N},\boldsymbol{r}\rangle=-\frac{1}{\kappa}$, 再求导 $\langle-\kappa\boldsymbol{T}+\tau\boldsymbol{B},\boldsymbol{r}\rangle+\langle\boldsymbol{B},\boldsymbol{T}\rangle=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)$, 得 $\langle\boldsymbol{B},\boldsymbol{r}\rangle=-\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)$, 从而 $\boldsymbol{r}=-\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{N}-\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\boldsymbol{B}$. 结合 $\langle\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}\rangle$ 为常数, $\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2+\left(\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)^2$ 为常数.

    反之, 受之启发, 构造曲线

    $$\boldsymbol{p}=-\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{N}-\left(\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)\boldsymbol{B}$$

    在 κ 不是常数时 $\boldsymbol{p}$ 是正则的, 经过直接的计算,

    $$\langle\boldsymbol{p}',\boldsymbol{T}\rangle=1\qquad\langle\boldsymbol{p}',\boldsymbol{N}\rangle=0$$

    根据 $\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle$ 为常数, 故 $\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'\rangle=0$, 而 $\left(\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)\neq0$, 从而 $\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{T}$, 从而 $\boldsymbol{p}$ 是单位速率正则曲线, 且与 $\boldsymbol{r}$ 之间只相差平移得证.

16. 运用 L'hôptal 法则.

17. 这样的曲线被称为螺线, 是那些切向量和给定向量夹角为常数的曲线. 螺线可以利用旋转轴 $\boldsymbol{u}$ 描述, 此时 $\langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{u}\rangle$ 为常数.

无妨假设 $\boldsymbol{u}$ 是单位向量, 螺线 $\boldsymbol{r}$, 设 $\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{u} \rangle = \cos\theta$ 为常数, 求导得 $\kappa \langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$, 从而 $\langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$. 从而 $\boldsymbol{u} = \cos\theta \boldsymbol{T} + \sin\theta \boldsymbol{B}$, 两边同时求导有 $0 = \cos\theta\kappa\boldsymbol{N} - \sin\theta\tau\boldsymbol{N}$, 从而 $\tau = \cot\theta\kappa$.

反之, 受之启发, 记 θ 使得 $\cot\theta = \tau/\kappa$, 作 $\boldsymbol{u} = \cos\theta\boldsymbol{T} + \sin\theta\boldsymbol{B}$. 直接求导得 $\boldsymbol{u}$ 是常向量, 以及 $\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{u} \rangle = \cos\theta$, 命题得证.

18. 由于平面曲线定义的法向量与空间曲线不同, 故曲率在符号上略微不同. 在平面上的结果为 $-\kappa(-s)$, 空间中的结果为 $\kappa(-s), \tau(-s)$.

19. 设 $\boldsymbol{v}(s) = x\boldsymbol{t} + y\boldsymbol{n} + z\boldsymbol{b}$, 带入求解.

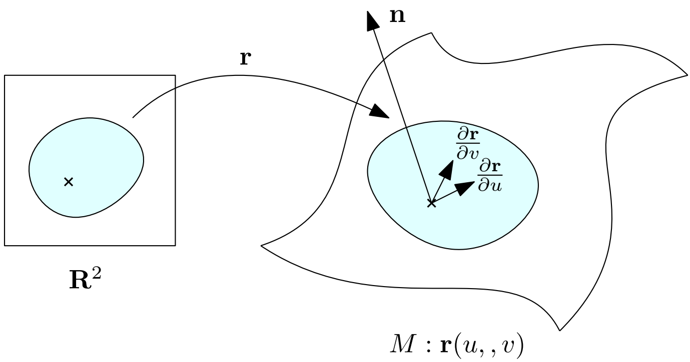
20. 化为单位速率曲线后计算曲率挠率.

21. 略.

3 曲面的局部理论

空间曲面, 正则曲面, 切平面, 法向量, 第一基本形式, 第二基本形式, 法曲率, Weingarten 变换, 抛物点, 椭圆点, 双曲点, 渐进方向, 抛物点, 平点, Gauss 映射, 平均曲率, Gauss 曲率, 脐点, 主方向, 主曲率, Euler 公式, 球极投影坐标, 旋转曲面, 螺旋面, 悬链面, 柱面, 直纹面, 可展曲面, 全脐点曲面.

3.1 定理回顾



定义 3.1 对于正则曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$, 在每一点的切空间 T_P 上定义

- 第一基本形式

$$\mathrm{I} = \langle \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \rangle = \mathrm{d}s^2 = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2$$

  其中

$$E = \langle \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_u \rangle = ||\boldsymbol{r}_u||^2 \qquad F = \langle \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v \rangle \qquad G = \langle \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_v \rangle = ||\boldsymbol{r}_v||^2$$

- 第二基本形式

$$\mathrm{II} = -\langle \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \mathrm{d}\boldsymbol{n} \rangle = L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2$$

  其中

$$L = \langle \boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{n} \rangle \qquad F = \langle \boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{n} \rangle \qquad G = \langle \boldsymbol{r}_{vv}, \boldsymbol{n} \rangle$$

- *Weingarten* 变换

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{W}: & T_P & \to & T_P \\ & x\boldsymbol{r}_u + y\boldsymbol{r}_u & \mapsto & -x\boldsymbol{n}_u - y\boldsymbol{n}_u \end{array}$$

  定义 *Gauss* 曲率 K 和平均曲率 H

$$K = \det \mathcal{W} \qquad H = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathcal{W}$$

  定义主曲率 k_1, k_2 为 $\mathcal{W}$ 的两个特征值, 对应的主方向为对应的单位特征向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$.

定义 3.2 对于正则曲面 M 上的弧长参数曲线 $\boldsymbol{r}(s)$, 定义

- 曲率向量为 $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$.
- $k_n = \left\langle \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}, \boldsymbol{n} \right\rangle$. 即, 曲率向量的法向分量. *(法曲率)*
- $k_g = \left\langle \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}, \boldsymbol{n} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \right\rangle$. 即, 曲率向量的切平面分量. *(测地曲率)*

命题 3.3 沿着切向量 $\boldsymbol{X}$ 的法曲率, 为

$$k_n(\boldsymbol{X}) = \frac{\mathrm{II}(X,X)}{\mathrm{I}(X,X)}$$

定理 3.4 *Weingarten* 变换 $\mathcal{W}$ 是自伴的, 且对于切向量 X, Y

$$\langle \mathcal{W}X, Y\rangle = \langle X, \mathcal{W}Y\rangle = \mathrm{II}(X,Y)$$

命题 3.5 通过计算知 *Gauss* 曲率 K 和平均曲率 H 满足 *(*实际上, 根据 *(3.9))*

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \qquad H = \frac{1}{2}\frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}$$

定理 3.6 (Euler 公式) 设 k_1, k_2 是某一点的主曲率, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 为相应的的主方向, 若切向量 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 夹角为 θ, 则

$$k_n(\boldsymbol{X}) = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta$$

故, 主曲率是主方向的法曲率, 且主曲率是法曲率的极大极小值.

命题 3.7 设直纹面 $\boldsymbol{r}(u,v) = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{\ell}(u)$, 则 $\boldsymbol{r}$ 是可展曲面当且仅当

$$[\boldsymbol{a}', \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\ell}'] = 0$$

当且仅当沿着直母线, 直纹面法向量不变, 即 $\boldsymbol{n}(u, v_1) = \boldsymbol{n}(u, v_2)$. 并且有如下分类结果

> 可展曲面在局部上是柱面, 锥面, 切线面的一种.

命题 3.8 一个曲面若所有点都是脐点, 则是球面或是平面的一部分.

3.2 定理补充

命题 3.9 *Weingarten* 变换在自然坐标下的矩阵可以被写出来. 对于切向量 $X = a\boldsymbol{r}_u + b\boldsymbol{r}_v$, 若 $\mathcal{W}X = x\boldsymbol{r}_u + y\boldsymbol{r}_v$, 有

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

证明 假设

$$\boldsymbol{n}_u = A\boldsymbol{r}_u + B\boldsymbol{r}_v \qquad \boldsymbol{n}_v = C\boldsymbol{r}_u + D\boldsymbol{r}_v$$

通过与 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 作内积得

$$-L = AE+BF \qquad -M = CE+DF \qquad -M = AF+BG \qquad -N = CF+DG$$

即

$$-\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

故

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

从而

$$\mathcal{W}X = -a\boldsymbol{n}_u - b\boldsymbol{n}_v = -(aA+bC)\boldsymbol{r}_u - (aB+bD)\boldsymbol{r}_v$$

从而

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

证毕. □

命题 3.10 *$X = a\boldsymbol{r}_u + b\boldsymbol{r}_v$ 是主方向 (不必单位) 当且仅当*

$$\begin{vmatrix} a^2 & -ab & b^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

证明 根据上命题, 即有 k 满足

$$k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

即

$$k\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

这是两个方程, 消去 k 得

$$\begin{vmatrix} La+Mb & Ea+Fb \\ Ma+Nb & Fa+Gb \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\begin{vmatrix} L & E \\ M & F \end{vmatrix} a^2 + \begin{vmatrix} L & E \\ N & G \end{vmatrix} ab + \begin{vmatrix} M & F \\ N & G \end{vmatrix} b^2 = 0$$

即

$$\begin{vmatrix} a^2 & -ab & b^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

命题得证. □

定理 3.11 *在某个曲面 $\boldsymbol{r}(s,t)$ 的某一点 P, 必然存在新的参数 (u,v) 使得 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 彼此正交.*

若这个领域还没有脐点, 则还可以假定存在参数 (u,v) 使得 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 恰好平行于这一点的主方向. 这被称为正交的曲率线网. 此时

$$\boldsymbol{r}_u = \sqrt{E}\boldsymbol{e}_1 \qquad \boldsymbol{r}_v = \sqrt{G}\boldsymbol{e}_2 \qquad \mathrm{I} = E\mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2$$

$$\boldsymbol{n}_u = -k_1\sqrt{E}\boldsymbol{e}_1 \qquad \boldsymbol{n}_v = -k_2\sqrt{G}\boldsymbol{e}_2 \qquad \mathrm{II} = k_1 E\mathrm{d}u^2 + k_2 G\mathrm{d}v^2$$

证明 见陈维桓 P109 和 P171. □

例 3.12 *对于半径为 a 的球面*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(u,v) &= (\ a\cos u\cos v\ ,\ a\cos u\sin v\ ,\ a\sin u\ ) \\ \boldsymbol{r}_u &= (\ -a\sin u\cos v\ ,\ -a\sin u\sin v\ ,\ a\cos u\ ) \\ \boldsymbol{r}_v &= (\ -a\cos u\sin v\ ,\ a\cos u\cos v\ ,\ 0\ ) \end{aligned}$$

故

$$\mathrm{I} = a^2\mathrm{d}u^2 + a^2\cos^2 u\mathrm{d}v^2$$

且

$$\boldsymbol{n} = (\ \cos u\cos v\ ,\ \cos u\sin v\ ,\ \sin u\ ) = \frac{1}{a}\boldsymbol{r}$$

故

$$\mathrm{II} = a\mathrm{d}u^2 + a\cos^2 u\mathrm{d}v^2$$

例 3.13 对于旋转面

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(u,v) &= (\quad f(u)\cos v \quad , \quad f(u)\sin v \quad , \quad g(u) \quad) \\
\boldsymbol{r}_u &= (\quad f'(u)\cos v \quad , \quad f'(u)\sin v \quad , \quad g'(u) \quad) \\
\boldsymbol{r}_v &= (\quad -f(u)\sin v \quad , \quad f(u)\cos v \quad , \quad 0 \quad)
\end{aligned}
$$

故

$$
\mathrm{I} = (f'(u)^2 + g'(u)^2)\mathrm{d}u^2 + f(u)^2\mathrm{d}v^2
$$

且

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n} &= \tfrac{1}{\sqrt{f'(u)^2+g'(u)^2}}(\quad -g'(u)\cos v \quad , \quad -g'(u)\sin v \quad , \quad f'(u) \quad) \\
\boldsymbol{r}_{uu} &= (\quad f''(u)\cos v \quad , \quad f''(u)\sin v \quad , \quad g''(u) \quad) \\
\boldsymbol{r}_{uv} &= (\quad -f'(u)\sin v \quad , \quad f''(u)\cos v \quad , \quad 0 \quad) \\
\boldsymbol{r}_{vv} &= (\quad -f''(u)\cos v \quad , \quad -f''(u)\sin v \quad , \quad 0 \quad)
\end{aligned}
$$

故

$$
\mathrm{II} = \frac{(f'g'' - f''g')\mathrm{d}u^2 + fg'\mathrm{d}v^2}{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}}
$$

例 3.14 由方程 $f(x,y,z) = C$ 定义的曲面, 第一基本形式为

$$
\mathrm{I} = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2
$$

$\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$ 为一个法向量 *(但不一定是单位的)* 第二基本形式为

$$
\mathrm{II} = \pm\frac{1}{|\nabla f|}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}
$$

证明 由逆映射定理, 假设 $z = z(x,y)$, 则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(x,y) &= (\quad x \quad , \quad y \quad , \quad z(x,y) \quad) \\
\boldsymbol{r}_x &= (\quad 1 \quad , \quad 0 \quad , \quad z_x(x,y) \quad) \\
\boldsymbol{r}_y &= (\quad 0 \quad , \quad 1 \quad , \quad z_y(x,y) \quad)
\end{aligned}
$$

从而 $\boldsymbol{r}_z \perp (f'_x, f'_y, f'_z) \perp \boldsymbol{r}_y$. 容易计算 (因为 $\mathrm{I} = \mathrm{d}s^2$, 所以是必然的.)

$\mathrm{I} = ({x'}_y^2 + 1)\mathrm{d}y^2 + (x'_y x'_z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + ({x'}_z^2 + 1)\mathrm{d}z^2 = (x_y\mathrm{d}y + x_z\mathrm{d}z)^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$

下面我们计算第二基本形式

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} &= \tfrac{1}{|\boldsymbol{\nabla} f|}(\quad f_x \quad , \quad f_y \quad , \quad f_z \quad) \\
\boldsymbol{r}_{xx} &= (\quad 0 \quad , \quad 0 \quad , \quad z_{xx}(x,y) \quad) \\
\boldsymbol{r}_{xy} &= (\quad 0 \quad , \quad 0 \quad , \quad z_{xy}(x,y) \quad) \\
\boldsymbol{r}_{yy} &= (\quad 0 \quad , \quad 0 \quad , \quad z_{yy}(x,y) \quad)
\end{aligned}$$

故

$$L = \frac{f_z z_{xx}}{|\nabla f|} \quad M = \frac{f_z z_{xy}}{|\nabla f|} \quad N = \frac{f_z z_{yy}}{|\nabla f|}$$

对 $f(x,y,z(x,y)) = C$ 求两次导数, 根据 (4.19) 或直接计算得

$$f_{ij} + f_{iz}z_i + f_{jz}z_j + f_{zz}z_i z_j + z_{ij}f_z = 0 \qquad i,j \in \{x,y\}$$

从而

$$\begin{aligned}
L &= -\tfrac{1}{|\nabla f|}(f_{xx} + f_{xz}z_x + f_{xz}z_x + f_{zz}z_x z_x) \\
M &= -\tfrac{1}{|\nabla f|}(f_{xy} + f_{xz}z_x + f_{yz}z_y + f_{zz}z_x z_y) \\
N &= -\tfrac{1}{|\nabla f|}(f_{yy} + f_{yz}z_y + f_{yz}z_y + f_{zz}z_y z_y)
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2 \\
&= -\tfrac{1}{|\nabla f|}\textstyle\sum_{i,j\in\{x,y,z\}} f_{ij}\mathrm{d}i\mathrm{d}j \\
&= -\tfrac{1}{|\nabla f|}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

计算完成. □

例 3.15 曲面 $z = f(x,y)$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= (\quad x \quad , \quad y \quad , \quad f \quad) \\
\boldsymbol{r}_x &= (\quad 1 \quad , \quad 0 \quad , \quad f'_x \quad) \\
\boldsymbol{r}_y &= (\quad 0 \quad , \quad 1 \quad , \quad f'_y \quad)
\end{aligned}$$

从而

$$\mathrm{I} = (1 + {f'}_x^2)\mathrm{d}x^2 + f'_x f_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y + (1 + {f'_y}^2)\mathrm{d}y^2$$

而

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + {f'}_x^2 + {f'_y}^2}}(-f'_x, -f'_y, 1)$$

3.3 习题提示

1. 计算.

2. 消元.

3. $\boldsymbol{r}(t) + s\boldsymbol{a}$.

4. 利用 (3.14) 计算.

5. 不妨假设 P 为原点, 设 π 法向量为 $\boldsymbol{n}$, 再不妨假设 $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{r} \rangle \geq 0$, 则左侧在 0 处取得极值, 从而 $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}_u \rangle = \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}_v \rangle = 0$.

6. 设曲线 $\boldsymbol{r}(u(s), v(s))$, 首先, 任何曲线的切向量落在切平面上为显然. 反之, 只要在某个 $u, v-$ 邻域内延展 u, v 即可.

7. 计算.

8. 计算.

9. 计算, 参见 (3.15).

10. 第一个问题时高中数学题, 画函数图像. 关于正交的论断, 参考 (3.14), 只要证明
$$\sum_{cyc} \frac{x}{a-\lambda} \frac{x}{a-\lambda'} = 0$$
对左式施加以列项
$$LHS = \frac{1}{\lambda' - \lambda} \sum_{cyc} \left(\frac{x^2}{a-\lambda} - \frac{x^2}{a-\lambda'} \right) = \frac{1-1}{\lambda - \lambda'} = 0 = RHS$$

11. 一般不同.

12. 参见 (3.11). 例如, 直接施以 Schmidt 正交化.

13. 设切向量为 $x_1\boldsymbol{r}_u + y_1\boldsymbol{r}_v, x_2\boldsymbol{r}_u + y_2\boldsymbol{r}_v$, 注意到正交 $\iff Ex_1x_2 + F(x_1y_2 + x_2y_1) + Gy_1y_2 = 0$. 当 $y_1y_2 \neq 0$ 时, $z_1 = x_1/y_2, z_2 = x_2/y_2$ 是方程 $Pz^2 + 2Qz + R = 0$ 的两个零点, 尔后, 使用 Vieta 定理. $y_1y_2 = 0$ 需单独讨论.

14. 略.

15. 非常复杂.

16. 非常复杂.

17. 利用 Euler 公式 (3.6).

18. 通过换元 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 将曲面变为自己. 而在 $(0,0,0)$ 处法向量为 $(0,0,-f'(0))$, 故切平面即 $(x,y,0)$.

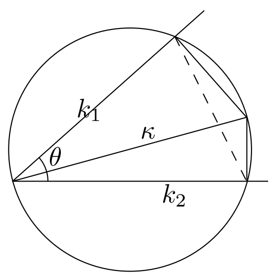
19. 注意到

$$\begin{aligned}
\mathrm{III} &= \langle \mathrm{d}\boldsymbol{n}, \mathrm{d}\boldsymbol{n} \rangle = \langle \mathcal{W}\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \mathcal{W}\mathrm{d}\boldsymbol{r} \rangle = \left\langle \mathcal{W}^2\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} \right\rangle \\
\mathrm{II} &= -\langle \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \mathrm{d}\boldsymbol{n} \rangle = \langle \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \mathcal{W}\mathrm{d}\boldsymbol{r} \rangle = \langle \mathcal{W}\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} \rangle \\
\mathrm{I} &= \langle \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \rangle
\end{aligned}$$

而 $\mathcal{W}$ 的特征多项式为 $X^2 - 2HX + K = 0$, 故根据 Cayley-Hamiton 定理,

$$K\mathrm{I} - 2H\mathrm{II} + \mathrm{III} = \left\langle \mathcal{W}^2 - 2H\mathcal{W} + K\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \right\rangle = 0$$

20. 注意到法向量的定义是 $\langle \boldsymbol{r}''(s), \boldsymbol{n} \rangle$. 如下图



21. 计算.

22. 计算.

23. 回忆 P51, 这取决于第二基本形式的行列式的正负.

24. 计算.

25. 计算.

26. 注意到, Weingarten 变换的特征多项式 $X^2 - 2HX + K$ 系数都光滑. 故主曲率可以通过二次方程求解公式解出 (不是脐点, k_1, k_2 都非良定义的), 当不是脐点时, 是光滑的, 还可以解出特征方程, 根据 Cramer 法则, 也是光滑的.

27. 首先, 注意到

$$\tilde{r}_u = \boldsymbol{r}_u + \lambda \boldsymbol{n}_u \qquad \tilde{\boldsymbol{r}}_v = \boldsymbol{r}_v + \lambda \boldsymbol{n}_v$$

依旧落在切平面上. 其次, 根据 (3.11), 此时新曲面的 Weingarten 变换为

$$\mathcal{W}' : \boldsymbol{r}_u + \lambda \boldsymbol{n}_u \mapsto -\boldsymbol{n}_u \qquad \boldsymbol{r}_v + \lambda \boldsymbol{n}_v \mapsto -\boldsymbol{n}_v$$

故

$$\mathcal{W}'(1 - \lambda \mathcal{W}) = \mathcal{W}$$

计算行列式得第一个等式. 类似的 $\mathcal{W}(1 + \lambda \mathcal{W}') = \mathcal{W}'$, 故 $\mathcal{W}$ 与 $\mathcal{W}'$ 可交换, 从而可以同时对角化, 故

$$k_1' - \lambda k_1 k_1' = k_1 \qquad k_2' - \lambda k_2 k_2' = k_2$$

解得

$$k_1' + k_2' = \frac{k_1}{1 - \lambda k_1} + \frac{k_2}{1 - \lambda k_2}$$

通分得第二个等式.

28. $\mathcal{W} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\mathrm{d}\boldsymbol{n}$. 根据主方向定义, 所以平行.

29. 参见 (3.11). 反之, 可以将 Weingarten 变换按坐标写出来, 参见 (3.9), 此时容易证明.

30. 计算很复杂.

31. 根据法曲率的计算公式, 渐进方向是 $\mathrm{II} = 0$ 的解, 故带入 $\mathrm{d}u = 1, \mathrm{d}v = 0$ 和 $\mathrm{d}u = 0, \mathrm{d}v = 1$ 知 $L = N = 0$.

32. 这个结论是正确的, 如果我们将平面也视为某种锥面. 我们将用第四章的正交标架法解决这个问题, 参见第四章习题 17. 一个 “几何” 的方法是在任何一点与定点的连线和法线的所在平面交这个曲面得到的曲线必然是是一条直线 (因为所有切线都过定点, 从而立刻得到是直纹面).

33. 即法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 v 无关. 计算得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_u &= \boldsymbol{a}'(u) + v\boldsymbol{\ell}'(u)\\
\boldsymbol{r}_v &= \boldsymbol{\ell}(u)\\
\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v &= (\boldsymbol{a}'(u) + v\boldsymbol{\ell}'(u)) \wedge \boldsymbol{\ell}(u)
\end{aligned}$$

为了避免计算 $\boldsymbol{n}$ 的麻烦, 任取 v_1, v_2, 只要

$$[(\boldsymbol{a}'(u) + v_1\boldsymbol{\ell}'(u)) \wedge \boldsymbol{\ell}(u)] \wedge [(\boldsymbol{a}'(u) + v_2\boldsymbol{\ell}'(u)) \wedge \boldsymbol{\ell}(u)] = 0$$

即可, 故化简得

$$(v_1 - v_2)[\boldsymbol{a}'(u), \boldsymbol{\ell}(u), \boldsymbol{\ell}'(u)]\boldsymbol{\ell}(u) = 0$$

34. 计算. 回忆 Gauss 映射为

$$\sigma : S \to \mathbb{S}^2 \qquad \boldsymbol{r}(u,v) \mapsto \boldsymbol{n}(u,v)$$

35. 计算, 回忆极小曲面指的是平均曲率 $H = 0$ 的曲面.

36. 非常复杂的计算.

4 标架与曲面论基本定理

活动标架, 自然标架, Christoffel 符号, 第二类 Christoffel 符号, Riemann 记号, 结构方程, 曲面的存在唯一性定理, 正交标架, 联络形式, Codazzi 方程, Gauss 方程.

4.1 定理回顾

自然标架法

定义 4.1 (Christoffel 记号) 对于正则曲线 $\boldsymbol{r}(u,v)$, 重新记

- 自变量为上标 $u=u^1, v=u^2$, $\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{r}_2$,

  算子 $\frac{\partial}{\partial u^1}=\partial_1, \frac{\partial}{\partial u^2}=\partial_2$.

- 第一基本形式系数 $g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}=\langle\boldsymbol{r}_\alpha,\boldsymbol{r}_\beta\rangle$. 于是

$$E=g_{11}\qquad F=g_{12}\qquad G=g_{22}$$

  第一基本形式

$$\mathrm{I}=\sum_{\alpha,\beta}g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta$$

  记 $g^{\beta\alpha}$ 的逆矩阵为 $g^{\alpha\beta}$. *(即满足 $\sum_\gamma g_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta}=\delta_\alpha^\beta$)*

  面积微元定义为 $\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$.

- 第二基本形式系数 $b_{\alpha\beta}=b_{\beta\alpha}=\langle\boldsymbol{r}_{\alpha\beta},\boldsymbol{n}\rangle=-\langle\boldsymbol{r}_\alpha,\boldsymbol{n}_\beta\rangle$. 故

$$L=b_{11}\qquad M=b_{12}\qquad N=b_{22}$$

  第二基本形式

$$\mathrm{II}=\sum_{\alpha,\beta}b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta$$

- *Christoffel* 符号 $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma=\Gamma_{\beta\alpha}^\gamma=\sum_\delta\langle\boldsymbol{r}_{\alpha\beta},\boldsymbol{r}_\delta\rangle g^{\delta\gamma}$.

定理 4.2 对于正则曲线 $\boldsymbol{r}(u,v)$, 自然标架的活动方程

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_\alpha\\ \frac{\partial}{\partial u^\beta}\boldsymbol{r}_\alpha=\sum_\gamma\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\boldsymbol{r}_\gamma+b_{\alpha\beta}\boldsymbol{n}\\ \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\boldsymbol{n}=-\sum_\beta b_\alpha^\beta\boldsymbol{r}_\beta\end{cases}$$

其中, $b_\alpha^\beta=\sum_\gamma b_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta}$.

命题 4.3 (Gauss) 考虑一块正则曲面 $\boldsymbol{r}$, 则

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}=\frac{1}{2}\sum_{\delta} g^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial u^{\alpha}}+\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^{\beta}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\delta}}\right)$$

即倘若记第二类 *Christoffel* 记号

$$\Gamma_{\gamma,\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^{\alpha}}+\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}\right)=\langle \boldsymbol{r}_{\alpha\beta},\boldsymbol{r}_{\gamma}\rangle$$

则 $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}=\sum_{\delta} g^{\gamma\delta}\Gamma_{\delta,\alpha\beta}$.

推论 4.4 承上, 换回原本的语言, 当是正交参数系时, 即 $\boldsymbol{r}_u \perp \boldsymbol{r}_v$ 时, *Gauss* 公式化为

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^{1} &= \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial \ln E}{\partial u} &&= \tfrac{1}{2E}\tfrac{\partial E}{\partial u}\\
\Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{21}^{1} &= \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial \ln E}{\partial v} &&= \tfrac{1}{2E}\tfrac{\partial E}{\partial v}\\
\Gamma_{22}^{1} & &&= -\tfrac{1}{2E}\tfrac{\partial G}{\partial u}\\
\Gamma_{11}^{2} & &&= -\tfrac{1}{2G}\tfrac{\partial E}{\partial v}\\
\Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{21}^{2} &= \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial \ln G}{\partial u} &&= \tfrac{1}{2G}\tfrac{\partial G}{\partial u}\\
\Gamma_{22}^{2} &= \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial \ln G}{\partial v} &&= \tfrac{1}{2G}\tfrac{\partial G}{\partial v}
\end{aligned}$$

如下图

$$\left[\begin{array}{cccc}
 & \Gamma_{11}^{2} & & \Gamma_{12}^{2}\\
\Gamma_{21}^{2} & & \Gamma_{22}^{2} & \\
 & \Gamma_{11}^{1} & & \Gamma_{12}^{1}\\
\Gamma_{21}^{1} & & \Gamma_{22}^{1} &
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc}
 & -\frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v} & & \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}\\
\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u} & & \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v} & \\
 & \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u} & & \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}\\
\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v} & & -\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u} &
\end{array}\right]$$

定义 4.5 (Riemann 记号) 定义 *Riemann* 记号

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=\sum_{\xi} g_{\delta\xi}\left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\xi}}{\partial u^{\gamma}}-\frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\xi}}{\partial u^{\beta}}+\sum_{\eta}(\Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}\Gamma_{\eta\gamma}^{\xi}-\Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta}\Gamma_{\eta\beta}^{\xi})\right)$$

命题 4.6 有关于结构方程系数的等式

(1)$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=R_{\beta\gamma\delta\alpha}=-R_{\alpha\delta\beta\gamma}=-R_{\delta\alpha\gamma\beta}$.

(2)Gauss 方程

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = -(b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta} - b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta})$$

从而只有一个方程

$$R_{1212} = -(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)$$

(3)Codazzi 方程

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} + \sum_\xi (\Gamma^\xi_{\alpha\beta} b_{\xi\gamma} - \Gamma^\xi_{\alpha\gamma} b_{\xi\beta}) = 0$$

在 $\beta = \gamma$ 时归于平凡, 故实际上只有两个方程

$$\begin{cases} \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} = \sum_\xi (\Gamma^\xi_{12} b_{1\xi} - \Gamma^\xi_{11} b_{2\xi}) \\ \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} = \sum_\xi (\Gamma^\xi_{22} b_{1\xi} - \Gamma^\xi_{21} b_{2\xi}) \end{cases}$$

推论 4.7 承上, 换回原本的语言, 当是正交参数系时, 即 $\boldsymbol{r}_u \perp \boldsymbol{r}_v$ 时, *Gauss* 方程化为

$$-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right] = \frac{LN - M^2}{EG}$$

Codazzi 方程化为

$$\begin{cases} \left(\frac{L}{\sqrt{E}}\right)_v - \left(\frac{M}{\sqrt{E}}\right)_u - N\frac{(\sqrt{E})_v}{G} - M\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} = 0 \\ \left(\frac{N}{\sqrt{G}}\right)_u - \left(\frac{M}{\sqrt{G}}\right)_v - L\frac{(\sqrt{G})_u}{E} - M\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} = 0 \end{cases}$$

定理 4.8 (曲面论基本定理) 若 $\mathbb{R}^3$ 中的两条曲线 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ 定义在同一个参数区间上, 若两曲面第一, 二基本形式相同, 则存在 $\mathbb{R}^3$ 的一个刚体运动把 $\boldsymbol{r}_2$ 变为 $\boldsymbol{r}_1$.

单位正交标架法

定义 4.9 通过施以 *Schmidt* 正交化, 可以在局部取单位正交标架 $\{\boldsymbol{r}; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. 其中 $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{n}$.

命题 4.10 承上, 正交标架的结构方程为

$$\left\{\begin{array}{rcllll} \mathrm{d}\boldsymbol{r} & = & \omega_1\boldsymbol{e}_1 & +\omega_2\boldsymbol{e}_2 & \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_1 & = & & \omega_{12}\boldsymbol{e}_2 & +\omega_{13}\boldsymbol{e}_3 \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_2 & = & \omega_{21}\boldsymbol{e}_1 & & +\omega_{23}\boldsymbol{e}_3 \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_3 & = & \omega_{31}\boldsymbol{e}_1 & +\omega_{32}\boldsymbol{e}_2 & \end{array}\right.$$

其中 $\omega_{ij}+\omega_{ji}=0$. 其中 ω_{ij} 是一阶微分形式.

推论 4.11 从而

(1) 第一基本形式

$$\mathrm{I}=\langle\mathrm{d}\boldsymbol{r},\mathrm{d}\boldsymbol{r}\rangle=\omega_1\omega_1+\omega_2\omega_2$$

(2) 第二基本形式

$$\mathrm{II}=-\langle\mathrm{d}\boldsymbol{r},\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3\rangle=\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23}$$

(3)Gauss 曲率 *(Gauss* 绝妙定理*)*

$$K=-\frac{\mathrm{d}\omega_{12}}{\omega_1\wedge\omega_2}$$

(4) 面积元

$$\mathrm{d}A=\omega_1\wedge\omega_2$$

命题 4.12 有关于结构方程系数的等式

(1) 联络

$$\omega_{ij}+\omega_{ji}=0$$

(2) 正交标架的结构方程式 *I*

$$\begin{cases}\mathrm{d}\omega_1=\omega_{12}\wedge\omega_2\\ \mathrm{d}\omega_2=\omega_{21}\wedge\omega_1\end{cases}$$

(3) 正交标架的结构方程式 *II, Gauss* 方程

$$\mathrm{d}\omega_{12}=\omega_{13}\wedge\omega_{32}$$

(4) 正交标架的结构方程式 III, Codazzi 方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23} \\ \mathrm{d}\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13} \end{cases}$$

命题 4.13 承上, 换回原本的语言, 当是正交参数系时, 即 $\boldsymbol{r}_u \perp \boldsymbol{r}_v$ 时, 若取

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}} \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}} \qquad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{n}$$

则

$$\begin{cases} \omega_1 & = \sqrt{E}\mathrm{d}u \\ \omega_2 & = \sqrt{G}\mathrm{d}v \\ \omega_{12} = -\omega_{21} & = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\mathrm{d}u + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\mathrm{d}v \\ \omega_{13} = -\omega_{31} & = \frac{L}{\sqrt{E}}\mathrm{d}u + \frac{M}{\sqrt{E}}\mathrm{d}v \\ \omega_{23} = -\omega_{32} & = \frac{M}{\sqrt{G}}\mathrm{d}u + \frac{N}{\sqrt{G}}\mathrm{d}v \end{cases}$$

如下图 [1]

例 4.14 研究主曲率为常数的曲面的分类.

(1) 设曲面 S 的两个主曲率 k_1, k_2 为常数, 如果 $k_1 = k_2$, 则 S 是全脐点曲面 (3.8), 它只能是平面或者球面.

(2) 如果 $k_1 \neq k_2$, 这是 S 没有脐点, 此时是圆柱面.

例 4.15 如果曲面无脐点, 则曲面可展 $\iff$ *Gauss* 曲率 $K = 0$.

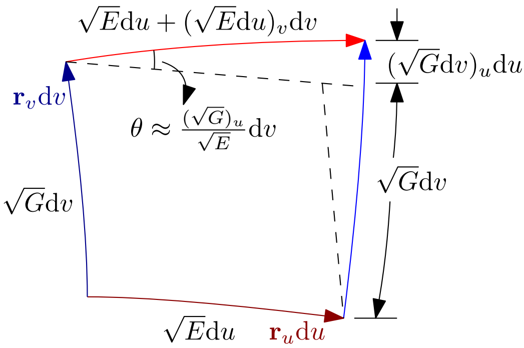
[1] 如图, 考虑 “平行四边形”, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 分解为底边 $\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u$ 和左边 $\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v$ 两条边, 长度分别为 $\sqrt{E}\mathrm{d}u, \sqrt{G}\mathrm{d}v$. 而在经过 $\mathrm{d}v$, 而 u 不变动之后, 顶边相比底边的长度增加了 $(\sqrt{E}\mathrm{d}u)_v\mathrm{d}v$. 同理, 经过 $\mathrm{d}u$, 而 v 不变动之后, 右边相比左边的长度增加了 $(\sqrt{G}\mathrm{d}v)_u\mathrm{d}u$. 将底边和左边平移过去, 会发现在经过 $\mathrm{d}v$, 而 u 不变动之后, $\boldsymbol{r}_u$, 也就是 $\boldsymbol{e}_1$ 在切平面上转动的角度

$$\theta \approx \frac{(\sqrt{G}\mathrm{d}v)_u\mathrm{d}u}{\sqrt{E}\mathrm{d}u + (\sqrt{E}\mathrm{d}u)_v\mathrm{d}v}$$

通过忽略二阶小量, 有

$$\theta \approx \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\mathrm{d}v$$

故 $\langle \mathrm{d}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ 的 $\mathrm{d}v$ 分量正是 $\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}$. 类似, 通过分析 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2$ 的 $\mathrm{d}u$ 分量, 以及 $\omega_{12} = -\omega_{21}$, 即可得到表达式.



4.2 定理补充

命题 4.16 在曲面 M 的某个正交标架下，$\frac{\omega_2}{\mathrm{d}t} = 0$，的一个解 (u, v) 是曲面上的曲线，这个曲线的切向量平行于 $\boldsymbol{e}_1$. 同样，$\frac{\omega_1}{\mathrm{d}t} = 0$ 的一个解 (u, v) 是曲面上的曲线，这个曲线的切向量平行于 $\boldsymbol{e}_2$.

命题 4.17 对于一块无脐点的正则曲面 $\boldsymbol{r}(u, v)$，若其恰是正交的曲率线网. 若记

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}} \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}} \qquad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{n}$$

则

$$\omega_{31} = -k_1\omega_1, \omega_{32} = -k_2\omega_2$$

更具体地 *(或许上面的表达式更加有用)*

$$\left\{\begin{array}{rclccc}
\mathrm{d}\boldsymbol{r} & = & (\sqrt{E}\mathrm{d}u)\boldsymbol{e}_1 + (\sqrt{G}\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_2 & & & \\
\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1 & = & & & \omega_{12}\boldsymbol{e}_2 & +(k_1\sqrt{E}\mathrm{d}u)\boldsymbol{e}_3 \\
\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2 & = & & \omega_{21}\boldsymbol{e}_1 & & +(k_2\sqrt{G}\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_3 \\
\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3 & = & & (-k_1\sqrt{E}\mathrm{d}u)\boldsymbol{e}_1 & +(-k_2\sqrt{G}\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_2 &
\end{array}\right.$$

其中 $\omega_{12} = -\omega_{21} = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\mathrm{d}u + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\mathrm{d}v$，$k_1, k_2$ 是 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 对应的主曲率.

命题 4.18 正交参数下的 *Gauss* 曲率

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right]$$

命题 4.19 (二阶微分算子换元公式) [2]考虑二阶微分算子 $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{L}(y)=\sum_{\alpha,\beta}a^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 y}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}+\sum_\gamma b^\gamma\frac{\partial y}{\partial x^\gamma}$$

则通过换元 $u^i=u^i(x^1,\dots,x^n)$, 设

$$\mathcal{L}(y)=\sum_{i,j}\overline{a^{ij}}\frac{\partial^2 y}{\partial u^i\partial u^j}+\sum_k\overline{b^k}\frac{\partial y}{\partial u^k}$$

则关于 $\{\overline{a^{ij}}\}$ 与 $\left\{\overline{b^i}\right\}$ 有如下不通过乘积的微分公式的简便的计算公式,

$$\overline{a}^{ij}=\sum_{\alpha,\beta}a^{\alpha\beta}\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial x^\beta}\qquad \overline{b}^k=\mathcal{L}(u^k)=\sum_{\alpha,\beta}a^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 u^k}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}+\sum_\gamma b^\gamma\frac{\partial u^k}{\partial x^\gamma}$$

例如,

$$\mathcal{L}=\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}=\sum_{i,j}\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial x^\beta}\frac{\partial^2}{\partial u^i\partial u^j}+\sum_k\frac{\partial^2 u^k}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial u^k}$$

4.3 习题提示

1. (1) 容易, 即是单位阵的迹. (2) 带入 Gauss 公式, 右边有两项可以消去.

2. 根据复合函数求导法则

$$\mathrm{d}\tilde{u}^\alpha=a_i^\alpha\mathrm{d}u^i$$

带入得 (1). 下面算 (2), 方便起见, 记 $\tilde{u}=x$. 利用 (4.19), 或读者熟练的分析功底, 可得

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial x^i\partial x^j}=\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^j}+\frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial x^i\partial x^j}\boldsymbol{r}_\gamma$$

从而 (以下采用求和约定, 省略求和号)

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{\ell,ij}&=\left\langle\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial x^i\partial x^j},\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^\ell}\right\rangle\\&=\Gamma_{\delta,\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial u^\delta}{\partial x^\ell}+g_{\gamma\delta}\frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial u^\delta}{\partial x^\ell}\end{aligned}$$

[2]这个计算的技巧是作者发现的.

而由 (1),

$$\widetilde{g}^{\ell k}=g^{\xi\eta}\frac{\partial x^{\ell}}{\partial u^{\xi}}\frac{\partial x^{k}}{\partial u^{\eta}}$$

两边乘后再求和

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{ij}^{k} &= \tilde{\Gamma}_{\ell,ij}\tilde{g}^{\ell k} \\
&= \Gamma_{\delta,\alpha\beta}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{i}}\frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{j}}\frac{\partial u^{\delta}}{\partial x^{\ell}}\frac{\partial x^{\ell}}{\partial u^{\xi}}\frac{\partial x^{k}}{\partial u^{\eta}}g^{\xi\eta} \\
&\quad +g_{\gamma\delta}\frac{\partial^{2}u^{\gamma}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}\frac{\partial u^{\delta}}{\partial x^{\ell}}\frac{\partial x^{\ell}}{\partial u^{\xi}}\frac{\partial x^{k}}{\partial u^{\eta}}g^{\xi\eta} && \because \text{链式法则} \\
&= \Gamma_{\delta,\alpha\beta}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{i}}\frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{j}}\frac{\partial u^{\delta}}{\partial u^{\xi}}\frac{\partial x^{k}}{\partial u^{\eta}}g^{\xi\eta} \\
&\quad +g_{\gamma\delta}\frac{\partial^{2}u^{\gamma}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}\frac{\partial u^{\delta}}{\partial u^{\xi}}\frac{\partial x^{k}}{\partial u^{\eta}}g^{\xi\eta} && \delta=\xi \text{ 时才非 } 0 \\
&= \Gamma_{\delta,\alpha\beta}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{i}}\frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{j}}\frac{\partial x^{k}}{\partial u^{\eta}}g^{\xi\delta} \\
&\quad +g_{\gamma\delta}\frac{\partial^{2}u^{\gamma}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}\frac{\partial x^{k}}{\partial u^{\eta}}g^{\delta\eta} && \text{计算} \\
&= \Gamma_{\alpha\beta}^{\xi}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{i}}\frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{j}}\frac{\partial x^{k}}{\partial u^{\eta}}+\frac{\partial^{2}u^{\gamma}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}\frac{\partial x^{k}}{\partial u^{\gamma}}
\end{aligned}$$

3. 计算.

4. 利用公式 (4.4).

5. 很难的计算.

6. 回忆 (4.17) 以及 (3.11), 注意到

$$k_1\sqrt{E}=\frac{L}{\sqrt{E}}\qquad k_2\sqrt{G}=\frac{N}{\sqrt{G}}$$

7. 因为无脐点, 根据 (3.11), 存在正交曲率线网, 先带入上题, 得

$$L=HE+f(u)\qquad N=HG+g(v)$$

再验证平均曲率 $\frac{k_1+k_2}{2}=H$,

$$k_1=\frac{L}{E}=H+\frac{f(u)}{E}\qquad k_1=\frac{N}{G}=H+\frac{g(v)}{G}$$

不妨设

$$\frac{E}{f(u)} = -\frac{G}{g(v)} = \lambda(u,v) > 0$$

则

$$\mathrm{I} = E\mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2 = \lambda(u,v)\left(f(u)\mathrm{d}u^2 - g(v)\mathrm{d}v^2\right)$$

$$\mathrm{II} = k_1 E\mathrm{d}u^2 + k_2 G\mathrm{d}v^2 = (1+\lambda H)f(u)\mathrm{d}u^2 + (1-\lambda H)g(v)\mathrm{d}v^2$$

通过代换使得

$$\mathrm{d}\tilde{u} = \sqrt{f(u)}\mathrm{d}u \qquad \mathrm{d}\tilde{(v)} = \sqrt{g(v)}\mathrm{d}v$$

8. 注意到主曲率也是常数, 根据 (4.14), 是球面, 圆柱或平面. 而球面第一二基本形式不为常数.

9. 带入 (4.7). 前者不满足 Gauss 方程, 后者不满足 Codazzi 方程.

10. 非常复杂的计算.

11. 略.

12. 带入 (4.7) 得

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right] = \lambda^2 \\ (\lambda\sqrt{E})_v = \lambda(\sqrt{E})_v \\ (\lambda\sqrt{G})_u = \lambda(\sqrt{G})_u \end{cases}$$

Codazzi 方程导出 λ 是常数. 第二问直接带入去解.

13. 带入 (4.13).

14. $\frac{\mathrm{d}\omega_{12}}{\omega_1\wedge\omega_2} = -K$.

15. 带入 (4.13).

16. 取相同的正交标架, 则

$$\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}} = \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \lambda\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3 = (\omega_1 + \lambda\omega_{31})\boldsymbol{e}_1 + (\omega_2 + \lambda\omega_{32})\boldsymbol{e}_2$$

故

$$\tilde{K} = -\frac{\mathrm{d}\omega}{(\omega_1 + \lambda\omega_{31}) \wedge (\omega_2 + \lambda\omega_{32})} = \frac{K}{1 + \lambda\frac{\omega_1\wedge\omega_{32}+\omega_{31}\wedge\omega_2}{\omega_1\wedge\omega_2} + \lambda^2\frac{\omega_{31}\wedge\omega_{32}}{\omega_1\wedge\omega_2}}$$

回顾 (4.17), 两倍的平均曲率恰是分母 λ 前系数的相反数, Gauss 曲率恰是分母 λ^2 前系数.

尔后, 再计算

$$\tilde{H} = -\frac{1}{2}\frac{(\omega_1 + \lambda\omega_{31}) \wedge \omega_{32} + \omega_{31} \wedge (\omega_2 + \lambda\omega_{32})}{(\omega_1 + \lambda\omega_{31}) \wedge (\omega_2 + \lambda\omega_{32})}$$

类似可证.

17. 不妨假设过的点为原点. 则有 $\boldsymbol{r} = \lambda\boldsymbol{e}_1 + \mu\boldsymbol{e}_2$, 于是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\lambda\boldsymbol{e}_1 + \lambda\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}\mu\boldsymbol{e}_2 + \mu\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2 = (\mathrm{d}\lambda + \mu\omega_{21})\boldsymbol{e}_1 + (\mathrm{d}\mu + \lambda\omega_{12})\boldsymbol{e}_2$$

于是

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega_1 \quad &= \mathrm{d}\mu \wedge \omega_{21} + \mu\mathrm{d}\omega_{21} \\ \omega_{12} \wedge \omega_2 \quad &= \omega_{12} \wedge (\mathrm{d}\mu + \lambda\omega_{12}) = \omega_{12} \wedge \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

故 $\mu\mathrm{d}\omega_{21} = 0$, 同理, $\lambda\mathrm{d}\omega_{21} = 0$, 故 $\mathrm{d}\omega_{21} = 0$, 这迫使 Gauss 曲率为 0. 在某个没有脐点的邻域内, 根据 (4.15), 是可展曲面, 根据 (3.7), 其分类已经给出, 只有锥面满足条件.

18. $\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2$. 因为 Gauss 曲率只和第一基本形式有关, 而平面的第一基本形式恰好如此, 故 $K = 0$. 或者直接计算

$$\omega_{12} = \langle \mathrm{d}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_v \rangle \,\mathrm{d}u + \langle \boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_v \rangle \,\mathrm{d}v$$

利用 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 单位正交, 容易得到 $\omega_{12} = 0$.

19. 根据 (4.13) 以及 (4.7).

20. 带入 (4.17) 硬算, 或利用关系 $\omega_{31} = -k_1\omega_1, \omega_{32} = -k_2\omega_2$.

5 曲面的内蕴几何学

Gauss 绝妙定理, 切映射, 等距变换, 保角变换, 等温参数, 协变微分, 平移, 测地曲率, 测地挠率, Liouville 公式, 测地平行坐标系, 指数映射, 法坐标系, 测地极坐标系, 测地曲率向量, 测地曲率, 测地线, 测地圆, Gauss-Bonnet 公式, Riemann 度量, Poincarè 度量.

5.1 定理回顾

命题 5.1 *双射 $\sigma : S \to \tilde{S}$ 是等距当且仅当可以选取恰当的正交标架 $\{\boldsymbol{e}_{1,2,3}\}$ 和 $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_{1,2,3}\}$ 使得在对应点*

$$\omega_1 = \tilde{\omega}_1 \qquad \omega_2 = \tilde{\omega}_2$$

当且仅当对任何两个切向量 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$,

$$\langle \sigma_*(\boldsymbol{v}), \sigma_*(\boldsymbol{w}) \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$$

命题 5.2 *双射 $\sigma : S \to \tilde{S}$ 是保教的当且仅存在函数 $\lambda > 0$ 使得再对应点*

$$\tilde{\mathrm{I}} = \lambda^2 \mathrm{I}$$

命题 5.3 *若通过换正交参数* $\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{e}}_1 = \cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \boldsymbol{e}_2 \\ \tilde{\boldsymbol{e}}_2 = -\sin\theta \boldsymbol{e}_1 + \cos\theta \boldsymbol{e}_2 \end{cases}$ *, 则*

$$\tilde{\omega}_{12} = \omega_{12} + \mathrm{d}\theta \qquad \begin{cases} \tilde{\omega}_{13} = \cos\theta\omega_{13} + \sin\theta\omega_{23} \\ \tilde{\omega}_{23} = -\sin\theta\omega_{13} + \cos\theta\omega_{23} \end{cases}$$

证明 $\tilde{\omega}_{12}$ 的运算在书上. 注意到

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{13} \quad &= -\langle \tilde{\boldsymbol{e}}_1, \mathrm{d}\boldsymbol{e}_3 \rangle = -\langle \cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \boldsymbol{e}_2, \mathrm{d}\boldsymbol{e}_3 \rangle \\ &= \cos\theta\omega_{13} + \sin\theta\omega_{23} \end{aligned}$$

ω_{23} 是类似的. □

命题 5.4 *具有常 Gauss 曲率的曲面局部可以建立等距变换.*

定义 5.5 (平移) 设曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$, 及其上曲线 $\boldsymbol{p}(t)=\boldsymbol{r}(u(t),v(t))$, 设 $\boldsymbol{v}(t)$ 是曲线上的切向量场, 若 $\frac{D\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=0$, 则称 $\boldsymbol{v}(t)$ 平行.

命题 5.6 设 $\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{w}(t)$ 是曲面 S 上沿曲线 γ 平行的向量场, 则 $\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle$ 是常数.

定义 5.7 (Liouville) 设 (u,v) 是曲面 S 的正交参数, 设

$$\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2$$

设 $\gamma(s)=\boldsymbol{r}(u(s),v(s))$ 是曲面 S 上的弧长参数曲线, 则

$$k_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}\cos\theta+\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}\sin\theta$$

其中 θ 是 γ 与 u-线的夹角. 即, 还满足

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\sqrt{E}}\cos\theta\\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\sqrt{G}}\sin\theta\end{cases}$$

命题 5.8 关于测地线有如下几条断言

(1) 曲面 S 的正交参数上的曲线 γ 是测地线当且仅当沿着 γ, 曲线的主法向量和曲面的法向量平行.

(2) 若 $\sigma:S\to\tilde{S}$ 是等距变换, γ 是 S 上的测地线, 则 $\sigma\circ\gamma$ 是 $\tilde{S}$ 的测地线.

(3) 连接曲面上两点的最短曲线必为测地线. 反之, 任何一点 P 附近都有一个领域 U 使得 U 内任何点 Q 与 P 在 U 内连接的测地线是所有连接 P,Q 的曲线中最短的.

命题 5.9 在曲面 S 上任意一点 P 附近存在测地平行坐标系 $\boldsymbol{r}(u,v)$, 不妨设 P 对应于 $(0,0)$, 此时

(1)$\boldsymbol{r}_u\perp\boldsymbol{r}_v$.

(2)u 线都是弧长参数测地线, $u=0$ 时的 v 线也是弧长参数测地线

即, 第一基本形式为

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}u^2+G(u,v)\mathrm{d}v^2\qquad G(0,v)=1$$

命题 5.10 在曲面 S 上任意一点 P 附近 (取心) 存在测地极地坐标系 $\boldsymbol{r}(\rho,\theta)$, 满足

(1)$\boldsymbol{r}_\rho \perp \boldsymbol{r}_\theta$.

(2) 每条 ρ 线是弧长参数测地线.

即, 第一基本形式为

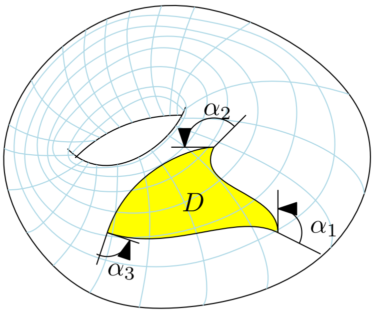
$$\mathrm{I} = \mathrm{d}\rho^2 + G\mathrm{d}\theta^2$$

且

$$\lim_{\rho\to 0} \boldsymbol{r} = P \qquad \lim_{\rho\to 0} \sqrt{G} = 0 \qquad \lim_{\rho\to 0} (\sqrt{G})_\rho = 1$$

定理 5.11 (Gauss-Bonnet 公式) 设 D 是曲面 S 上的一块单连通区域, ∂D 是分段光滑的, 设 α_i 是 ∂D 的顶角的外角, 则

$$\iint_D K\mathrm{d}A + \oint_{\partial D} k_g \mathrm{d}s + \sum \alpha_i = 2\pi$$



5.2 定理补充

定义 5.12 下面, 我们给出统一的主曲率, 测地曲率, 测地挠率的定义, 对于曲面 S 上的单位弧长曲线 $\boldsymbol{r}(s)$, 作

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \qquad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{e}_1 \qquad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{n}$$

则

- 曲率向量 $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}s}$.
- 法曲率 $k_n=\left\langle\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}s},\boldsymbol{e}_3\right\rangle=\frac{\omega_{13}}{\mathrm{d}s}$.
- 测地曲率 $k_g=\left\langle\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2}{\mathrm{d}s},\boldsymbol{e}_2\right\rangle=\frac{\omega_{12}}{\mathrm{d}s}$.
- 测地挠率 $\tau_g=\left\langle\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2}{\mathrm{d}s},\boldsymbol{e}_3\right\rangle=\frac{\omega_{23}}{\mathrm{d}s}$.

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{e}_2\\\boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & k_g & k_n\\ -k_g & & \tau_g\\ -k_n & -\tau_g & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{e}_2\\\boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}$$

命题 5.13 设曲面的切向量场 $\boldsymbol{v}=\sum_\alpha f^\alpha\boldsymbol{r}_\alpha$, 则协变微分

$$D\boldsymbol{v}=\sum_\alpha\left(\mathrm{d}f^\alpha+\sum_{\beta,\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}f^\beta\mathrm{d}u^\gamma\right)\boldsymbol{r}_\alpha$$

证明 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{v}&=\textstyle\sum_\alpha\mathrm{d}f^\alpha\boldsymbol{r}_\alpha+\sum_\beta f^\beta\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\beta\\&=\textstyle\sum_\alpha\mathrm{d}f^\alpha\boldsymbol{r}_\alpha+\sum_\beta f^\beta\left(\sum_{\beta,\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\mathrm{d}u^\gamma\boldsymbol{r}_\alpha+\sum_\delta b^\alpha_\delta\mathrm{d}u^\alpha\boldsymbol{n}\right)\\&=\textstyle\sum_\alpha\left(\mathrm{d}f^\alpha+\sum_{\beta,\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}f^\beta\mathrm{d}u^\gamma\right)\boldsymbol{r}_\alpha+\ldots\boldsymbol{n}\end{aligned}$$

而协变微分即去掉 $\boldsymbol{n}$ 前的系数. □

命题 5.14 曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 上弧长参数曲线 $\gamma=\boldsymbol{r}(u(s),v(s))$ 是测地线当且仅当

$$\frac{\mathrm{d}^2u^\gamma}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}=0\qquad\gamma=1,2$$

证明 对 $\boldsymbol{r}(u(s),v(s))$ 求二次导, 利用 (4.19)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}&=\sum_{\alpha,\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}+\sum_\gamma\frac{\mathrm{d}^2u^\gamma}{\mathrm{d}s^2}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u^\gamma}\\&=\sum_{\alpha,\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\left(\sum_\gamma\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\boldsymbol{r}_\gamma+b_{\alpha\beta}\boldsymbol{n}\right)+\sum_\gamma\frac{\mathrm{d}^2u^\gamma}{\mathrm{d}s^2}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u^\gamma}\\&=\textstyle\sum_\gamma\left(\sum_{\alpha,\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}+\frac{\mathrm{d}^2u^\gamma}{\mathrm{d}s^2}\right)\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u^\gamma}+\ldots\boldsymbol{n}\end{aligned}$$

根据定义, $\boldsymbol{r}_{1,2}$ 前系数为 0. □

命题 5.15 设 (u, v) 是曲面 S 的正交参数, $\gamma(s) = \boldsymbol{r}(u(s), v(s))$ 是曲面 S 上的弧长参数曲线, 则 γ 是测地线当且仅当

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{E}} \cos\theta \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{G}} \sin\theta \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \cos\theta - \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} \sin\theta \end{cases}$$

命题 5.16 当第一基本形式为

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2$$

时, 则

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}$$

证明 取

$$\omega_1 = \mathrm{d}u \qquad \omega_2 = \sqrt{G}\mathrm{d}v$$

带入

$$\mathrm{d}\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 \qquad \mathrm{d}\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1$$

解得

$$\omega_{12} = (\sqrt{G})_u \mathrm{d}v$$

则

$$K = -\frac{\mathrm{d}\omega_{12}}{\omega_1 \wedge \omega_2} = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}$$

得证. □

5.3 习题提示

1. 可以任意选取 ω_1, ω_2 使得

$$\mathrm{I} = \omega_1\omega_1 + \omega_2\omega_2$$

然后, 通过下面的方程解出联络 ω_{12}

$$\mathrm{d}\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 \qquad \mathrm{d}\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1$$

再计算 Gauss 曲率

$$K = -\frac{\mathrm{d}\omega_{12}}{\omega_1 \wedge \omega_2}$$

2. 仿照上题思路计算.
3. 参见陈维桓 P222. §5.5 节例题.
4. 略.
5. 参见 (5.13).
6. 。
7. 和第 1 题思路相同.
8. 因为赤道是测地线, 而测地线的切向量都是平行的. 而平行移动保持角度, 所以任和切向量的平移即保持和测地线相同角度平移.
9. 即 $\frac{D\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 0$, 带入 (5.13).
10. 利用 Liouville 公式 (5.7), 注意到, $G = s\cos u$.
11. 带入 Liouville 公式 (5.7) 计算.
12. 参见 (5.12).
13. 容易证明, 若取 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_2$, 则 $\left\langle \frac{D\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{w} \right\rangle = \frac{\omega_{12}}{\mathrm{d}t}$. 然后根据 (5.3).
14. 利用 (5.15) 消去 $\mathrm{d}s$, 解 θ 和 u 的关系.
15. 利用 (5.15) 消去 $\mathrm{d}s$, 先解 θ 和 u 的关系, 得 $u\sin\theta = C$, 则

$$\cos\theta = \sqrt{1 + \frac{C^2}{u^2}}, \tan\theta = \frac{C}{\sqrt{u^2 - C^2}}$$

再利用这一点解 v 与 u 的关系.

16. 最后应该改为 $o(u^2)$. 这是 u 的渐近展开, 利用 (5.16). 注意到

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}(0,0)=\frac{1}{-4\sqrt{G^3}}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\bigg|_{(0,0)}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(0,0)$$

17. 利用 (5.16) 解方程, 仿照彭家贵 P127 到 P128.

18. 注意到

$$L(r)=\int_0^{2\pi}\sqrt{G(\theta,r)}\mathrm{d}\theta \qquad A(r)=\int_0^{2\pi}\int_0^r\sqrt{G(\theta,r)}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

19. 根据 (5.16), 测地坐标系下, 常 Gauss 曲率面满足 $\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}$ 是常数, 根据上题可以解出 $\sqrt{G}$. 根据 Liouville 公式 (5.7) 测地圆的测地曲率 $k_g=\frac{(\sqrt{G})_\rho}{\sqrt{G}}$, 验证其是常数.

20. 选取正交参数使得 u-线是测地线, 则带入 Liouville 公式有

$$-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{E_v}{E}=0 \iff E_v=0$$

故 $E(u,v)=E(u)$. 再对另一族曲线使用 Liouville 公式

$$-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{E_v}{E}\cos\theta_0+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{G_u}{G}\sin\theta_0=\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{G_u}{G}\sin\theta_0=0$$

故 $G_u=0$, $G(u,v)=G(v)$. 从而

$$\mathrm{I}=E(u)\mathrm{d}u^2+G(v)\mathrm{d}v^2=\mathrm{d}\tilde{u}^2+\mathrm{d}\tilde{v}^2$$

和平面保距同构.

21. 由于是两条不同的测地线, 故有两个外角 $\alpha_1,\alpha_2\in(0,\pi)$, 根据 Gauss-Bonnet 公式知矛盾.

22. 内角 + 外角 $=\pi$.

23. 凑, $u=\frac{1}{a}\tilde{v}, v=\mathrm{e}^{-\tilde{u}/a}$.

24. 略.

25. 略.