微分几何 (H) 作业

林晓烁

https://xiaoshuo-lin.github.io

2024 年 1 月 29 日

1. 微分几何 (H) 课程主页：http://staff.ustc.edu.cn/~spliu/Teach_DG2022.html.
2. 刘世平教授对本课程给出的参考书如下：

- 微分几何，彭家贵，陈卿，高等教育出版社，2021.
- A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Michael Spivak, Vol. 2, Publish or Perish, 1999.
- Differential Geometry of Curves and Surfaces, Manfredo P. do Carmo, Dover Publications, 2016.
- Elementary Differential Geometry, Barrett O'Neill, Academic Press, 2006.
- 整体微分几何初步，沈一兵，高等教育出版社，2009.

3. 杨振宁先生写过一首《赞陈氏级》：

天衣岂无缝，匠心剪接成。
浑然归一体，广邃妙绝伦。
造化爱几何，四力纤维能。
千古存心事，欧高黎嘉陈。

Portrait of Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

目录

第一章　欧氏空间

§1.1　向量运算、欧氏变换、向量分析、向量场和微分 1-形式

题 1 设 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in \mathbb{R}^3$. 证明:

$$\boldsymbol{v}_1 \wedge (\boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_3) = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle \boldsymbol{v}_2 - \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_3.$$

证明 ① 若 $\boldsymbol{v}_2$ 与 $\boldsymbol{v}_3$ 共线，则易知两边均为 $\mathbf{0}$，等式成立.

② 若 $\boldsymbol{v}_2$ 与 $\boldsymbol{v}_3$ 不共线，由 $\boldsymbol{v}_1 \wedge (\boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_3)$ 与 $\boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_3$ 垂直知 $\boldsymbol{v}_1 \wedge (\boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_3)$ 可由 $\boldsymbol{v}_2$ 与 $\boldsymbol{v}_3$ 线性表出，设 $\boldsymbol{v}_1 \wedge (\boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_3) = \lambda \boldsymbol{v}_2 + \mu \boldsymbol{v}_3$. 由 $\boldsymbol{v}_1 \wedge (\boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_3)$ 与 $\boldsymbol{v}_1$ 垂直知 $\langle \boldsymbol{v}_1, \lambda \boldsymbol{v}_2 + \mu \boldsymbol{v}_3 \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle + \mu \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle = 0$. 因此可设 $\lambda = \omega \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle$，$\mu = -\omega \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$，其中 $\omega \in \mathbb{R}$. 取 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 使得

$$\boldsymbol{v}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + a_{13}\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{v}_2 = a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{23}\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{v}_3 = a_{33}\boldsymbol{e}_3.$$

将其代入

$$\boldsymbol{v}_1 \wedge (\boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_3) = \omega \left(\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle \boldsymbol{v}_2 - \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_3 \right)$$

得

$$(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + a_{13}\boldsymbol{e}_3) \wedge (a_{22}a_{33}\boldsymbol{e}_1) = \omega \left(a_{13}a_{22}a_{33}\boldsymbol{e}_2 - a_{12}a_{22}a_{33}\boldsymbol{e}_3 \right),$$

即

$$a_{13}a_{22}a_{33}\boldsymbol{e}_2 - a_{12}a_{22}a_{33}\boldsymbol{e}_3 = \omega \left(a_{13}a_{22}a_{33}\boldsymbol{e}_2 - a_{12}a_{22}a_{33}\boldsymbol{e}_3 \right),$$

因此 $\omega = 1$. 这就证明了原式. □

题 2 设 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \in \mathbb{R}^3$. 证明 Lagrange 恒等式:

$$\langle \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \wedge \boldsymbol{v}_4 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4 \rangle - \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_4 \rangle \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle.$$

证明 由混合积的轮换对称性，

$$\langle \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \wedge \boldsymbol{v}_4 \rangle = (\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) = (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2) = \langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \wedge (\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2) \rangle.$$

再利用题1结论可进一步化为

$$\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \wedge (\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2) \rangle = \langle \boldsymbol{v}_3, \langle \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_1 - \langle \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4 \rangle - \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_4 \rangle \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle.$$

□

题 3 证明：$\mathbb{R}^3$ 中任一微分 1-形式 ϕ 都可表成 $\phi = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \phi(\boldsymbol{u}_i)\,\mathrm{d}x^i$.

证明 任取 $p \in \mathbb{R}^3$，对任意 $\boldsymbol{v}_p \in T_p\mathbb{R}^3$，设 $\boldsymbol{v}_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} v_p^i \boldsymbol{u}_i(p)$，则

$$\phi(\boldsymbol{v}_p) = \phi\left(\sum_{i=1}^{3} v_p^i \boldsymbol{u}_i(p) \right) = \sum_{i=1}^{3} v_p^i \phi(\boldsymbol{u}_i(p)) = \sum_{i=1}^{3} \phi(\boldsymbol{u}_i)(p)\,\mathrm{d}x^i(\boldsymbol{v}_p) = \sum_{i=1}^{3} \phi(\boldsymbol{u}_i)\,\mathrm{d}x^i(\boldsymbol{v}_p).$$

□

题 4 设 $\boldsymbol{a}(t)$ 是向量值函数，证明:

(1) $|\boldsymbol{a}|=$ 常数当且仅当 $\langle\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{a}'(t)\rangle=0$;

(2) $\boldsymbol{a}(t)$ 的方向不变当且仅当 $\boldsymbol{a}(t)\wedge\boldsymbol{a}'(t)=\boldsymbol{0}$.

证明 (1) $|\boldsymbol{a}|=\text{常数} \iff \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle=\text{常数} \iff \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle=0 \iff \langle\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{a}'(t)\rangle=0$.

(2) $\Rightarrow$：若 $\boldsymbol{a}(t)$ 方向不变，则存在常向量 $\boldsymbol{v}$ 与可微函数 f，使得 $\boldsymbol{a}(t)=f(t)\boldsymbol{v}$. 由 $\boldsymbol{a}'(t)=f'(t)\boldsymbol{v}$ 得

$$\boldsymbol{a}(t)\wedge\boldsymbol{a}'(t)=f(t)f'(t)\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}.$$

$\Leftarrow$：若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 则结论平凡，下设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$. 设 $\boldsymbol{b}(t)=\dfrac{\boldsymbol{a}(t)}{|\boldsymbol{a}(t)|}$，则由 $|\boldsymbol{b}(t)|\equiv 1$ 得 $\langle\boldsymbol{b}(t),\boldsymbol{b}'(t)\rangle=0$. 设 $f(t)=|\boldsymbol{a}(t)|$，则 $\boldsymbol{a}(t)=f(t)\boldsymbol{b}(t)$，$\boldsymbol{a}'(t)=f'(t)\boldsymbol{b}(t)+f(t)\boldsymbol{b}'(t)$. 由

$$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}(t)\wedge\boldsymbol{a}'(t)=(f(t))^2\boldsymbol{b}(t)\wedge\boldsymbol{b}'(t)$$

及 $(f(t))^2=|\boldsymbol{a}(t)|^2>0$ 得 $\boldsymbol{b}(t)$ 与 $\boldsymbol{b}'(t)$ 共线，即存在 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得 $\boldsymbol{b}'(t)=\lambda\boldsymbol{b}(t)$. 于是

$$0=\langle\boldsymbol{b}(t),\boldsymbol{b}'(t)\rangle=\lambda\langle\boldsymbol{b}(t),\boldsymbol{b}(t)\rangle=\lambda,$$

故 $\boldsymbol{b}'(t)\equiv 0$，即 $\boldsymbol{b}$ 是常向量，$\boldsymbol{a}(t)$ 方向不变. □

题 5 设 $\mathcal{T}$ 是 E^3 的一个合同变换，$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 是 E^3 的两个向量，求 $(\mathcal{T}\boldsymbol{v})\wedge(\mathcal{T}\boldsymbol{w})$ 与 $\mathcal{T}(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w})$ 的关系.

解 设 $\mathcal{T}: X\mapsto XT+P$，其中 T 是正交方阵，则 $(\mathcal{T}\boldsymbol{v})\wedge(\mathcal{T}\boldsymbol{w})=\det(T)\mathcal{T}(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w})$.

不妨设 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 不共线. 于是存在 $\boldsymbol{u}\in E^3$，使得方阵 $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{u}\end{pmatrix}$ 可逆，则

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}* & * & (\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w})^{\mathsf{T}}\end{pmatrix},$$
$$T^{-1}A^{-1}=(AT)^{-1}=\frac{1}{\det(A)\det(T)}\begin{pmatrix}* & * & ((\boldsymbol{v}T)\wedge(\boldsymbol{w}T))^{\mathsf{T}}\end{pmatrix}.$$

将第一式两边左乘 T^{-1} 并与第二式比较就得到

$$T^{-1}(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w})^{\mathsf{T}}=\frac{1}{\det(T)}((\boldsymbol{v}T)\wedge(\boldsymbol{w}T))^{\mathsf{T}},$$

两边取转置即

$$(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w})\,T=\frac{1}{\det(T)}(\boldsymbol{v}T)\wedge(\boldsymbol{w}T).$$

故

$$(\mathcal{T}\boldsymbol{v})\wedge(\mathcal{T}\boldsymbol{w})=\det(T)\mathcal{T}(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w}).$$

□

§1.2 欧氏空间上的微分形式和外微分运算

题 6 设 $f,g\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$，$h\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. 验证如下性质：

(1) $\mathrm{d}(f+g)=\mathrm{d}f+\mathrm{d}g$.

(2) $\mathrm{d}(fg)=f\,\mathrm{d}g+g\,\mathrm{d}f$.

(3) $\mathrm{d}(h(f))=h'(f)\,\mathrm{d}f$.

证明 (1) $\mathrm{d}(f+g)=\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i=\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i+\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{\partial g}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i=\mathrm{d}f+\mathrm{d}g.$

(2) 我们有

$$\mathrm{d}(fg)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(fg)}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i=\sum_{i=1}^{3}\left(f\frac{\partial g}{\partial x^i}+g\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i=f\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial g}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i+g\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i=f\,\mathrm{d}g+g\,\mathrm{d}f.$$

(3) $\mathrm{d}(h(f))=\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{\partial h(f)}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i=\sum\limits_{i=1}^{3}h'(f)\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i=h'(f)\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i=h'(f)\,\mathrm{d}f.$ □

题 7 证明：$\mathbb{R}^3$ 中任一微分 3-形式 η 都可表成 $\eta=\eta(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3$.

证明 任取 $p\in\mathbb{R}^3$,对任意 $(\boldsymbol{r}_p,\boldsymbol{s}_p,\boldsymbol{t}_p)\in\mathbb{R}^3_p\times\mathbb{R}^3_p\times\mathbb{R}^3_p$,设 $\boldsymbol{r}_p=\sum\limits_{i=1}^{3}r_p^i\boldsymbol{u}_i(p)$,$\boldsymbol{s}_p=\sum\limits_{i=1}^{3}s_p^i\boldsymbol{u}_i(p)$,$\boldsymbol{t}_p=\sum\limits_{i=1}^{3}t_p^i\boldsymbol{u}_i(p)$,则

$$\begin{aligned}\eta\left(\boldsymbol{r}_p,\boldsymbol{s}_p,\boldsymbol{t}_p\right)&=\eta\left(\sum_{i=1}^{3}r_p^i\boldsymbol{u}_i(p),\sum_{j=1}^{3}s_p^j\boldsymbol{u}_j(p),\sum_{k=1}^{3}t_p^k\boldsymbol{u}_k(p)\right)=\sum_{i,j,k}r_p^is_p^jt_p^k\eta(\boldsymbol{u}_i(p),\boldsymbol{u}_j(p),\boldsymbol{u}_k(p))\\&=\sum_{i,j,k}\eta(\boldsymbol{u}_i(p),\boldsymbol{u}_j(p),\boldsymbol{u}_k(p))\,\mathrm{d}x^i(\boldsymbol{r}_p)\,\mathrm{d}x^j(\boldsymbol{s}_p)\,\mathrm{d}x^k(\boldsymbol{t}_p)\\&=\sum_{i<j<k}\eta(\boldsymbol{u}_i(p),\boldsymbol{u}_j(p),\boldsymbol{u}_k(p))\,\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^k(\boldsymbol{r}_p,\boldsymbol{s}_p,\boldsymbol{t}_p)\\&=\eta(\boldsymbol{u}_1(p),\boldsymbol{u}_2(p),\boldsymbol{u}_3(p))\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3(\boldsymbol{r}_p,\boldsymbol{s}_p,\boldsymbol{t}_p).\end{aligned}$$

□

题 8 证明：对任一 $\phi\in\Omega^k\left(\mathbb{R}^3\right)$ 都有 $\mathrm{d}^2\phi=0$，其中 $\Omega^k\left(\mathbb{R}^3\right):=\{\mathbb{R}^3\text{上的所有光滑 }k\text{-形式}\}$.

证明 只需证 $k=0,1$ 的情形.

① 若 $\phi\in\Omega^0\left(\mathbb{R}^3\right)$，即 $\phi\in\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$，则

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\phi)=\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i\right)=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right)\wedge\mathrm{d}x^i=\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^j\partial x^i}\,\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i\right).$$

因为 $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^j\partial x^i}=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}$ 且 $\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i$，所以

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\phi)=\sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^j\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j=0.$$

② 若 $\phi\in\Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right)$. 先考虑 $\phi=\phi(u_1)\,\mathrm{d}x^1$，有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}\phi)&=\mathrm{d}\left(\mathrm{d}\phi(u_1)\wedge\mathrm{d}x^1\right)=\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\phi(u_1)}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^1\right)\\&=\mathrm{d}\left(\frac{\partial\phi(u_1)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^1+\frac{\partial\phi(u_1)}{\partial x^3}\,\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^1\right)\\&=\frac{\partial^2\phi(u_1)}{\partial x^3\partial x^2}\,\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^1+\frac{\partial^2\phi(u_1)}{\partial x^2\partial x^3}\,\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^1\\&=0.\end{aligned}$$

同理，对 $\phi=\phi(u_i)\,\mathrm{d}x^i$ $(i=2,3)$ 也有 $\mathrm{d}^2\phi=0$. 因此由线性性即得 $\mathrm{d}^2\phi=0$，$\forall\phi\in\Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right)$. □

题 9 设 $f,g\in\Omega^0\left(\mathbb{R}^3\right)$，$\phi,\psi\in\Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right)$. 证明：

(1) $\mathrm{d}(fg) = f\,\mathrm{d}g + g\,\mathrm{d}f$.

(2) $\mathrm{d}(f\phi) = \mathrm{d}f \wedge \phi + f\,\mathrm{d}\phi$.

(3) $\mathrm{d}(\phi \wedge \psi) = \mathrm{d}\phi \wedge \psi - \phi \wedge \mathrm{d}\psi$.

证明 (1) 此即题6(2).

(2) 设 $\phi = \sum_{i=1}^{3} \phi(\boldsymbol{u}_i)\,\mathrm{d}x^i$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(f\phi) &= \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}(f\phi(\boldsymbol{u}_i)) \wedge \mathrm{d}x^i = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial(f\phi(\boldsymbol{u}_i))}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\phi(\boldsymbol{u}_i) + f\frac{\partial \phi(\boldsymbol{u}_i)}{\partial x^j}\right)\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \phi(\boldsymbol{u}_i)\frac{\partial f}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i + f\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \phi(\boldsymbol{u}_i)}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i = \mathrm{d}f \wedge \phi + f\,\mathrm{d}\phi.\end{aligned}$$

(3) 设 $\phi = \sum_{i=1}^{3} \phi(\boldsymbol{u}_i)\,\mathrm{d}x^i$，$\psi = \sum_{j=1}^{3} \psi(\boldsymbol{u}_j)\,\mathrm{d}x^j$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\phi \wedge \psi) &= \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \phi(\boldsymbol{u}_i)\psi(\boldsymbol{u}_j)\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial\left(\phi(\boldsymbol{u}_i)\psi(\boldsymbol{u}_j)\right)}{\partial x^k}\,\mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial \phi(\boldsymbol{u}_i)}{\partial x^k}\psi(\boldsymbol{u}_j) + \phi(\boldsymbol{u}_i)\frac{\partial \psi(\boldsymbol{u}_j)}{\partial x^k}\right)\mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \phi(\boldsymbol{u}_i)}{\partial x^k}\psi(\boldsymbol{u}_j)\,\mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \phi(\boldsymbol{u}_i)\frac{\partial \psi(\boldsymbol{u}_j)}{\partial x^k}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^j \\ &= \mathrm{d}\phi \wedge \psi - \phi \wedge \mathrm{d}\psi.\end{aligned}$$

□

题 10 设 $\phi_i = \sum_{j=1}^{3} f_{ij}\,\mathrm{d}x^j$ $(i = 1, 2, 3)$ 是 3 个 1-形式. 证明:

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 = \det\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3.$$

证明 用 $\tau(j_1, j_2, j_3)$ 表示 $(1, 2, 3)$ 的排列 (j_1, j_2, j_3) 的逆序数，则

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 = \sum_{j_1, j_2, j_3} f_{1j_1} f_{2j_2} f_{3j_3}\,\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \mathrm{d}x^{j_2} \wedge \mathrm{d}x^{j_3} = \sum_{(j_1, j_2, j_3) \in S_3} (-1)^{\tau(j_1, j_2, j_3)} f_{1j_1} f_{2j_2} f_{3j_3}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3.$$

由行列式定义，

$$\sum_{(j_1, j_2, j_3) \in S_3} (-1)^{\tau(j_1, j_2, j_3)} f_{1j_1} f_{2j_2} f_{3j_3} = \det\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}.$$

故结论得证. □

第二章　曲线的局部理论

§2.1　平面曲线

题 11 设曲线 C 在极坐标 (r,θ) 下的表示为 $r=f(\theta)$，证明：曲线 C 的曲率表达式为

$$\kappa(\theta)=\frac{f^2(\theta)+2\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\right)^2-f(\theta)\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}\theta^2}}{\left[f^2(\theta)+\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

证明 曲线 C 在 E^2 的正交标架下以 θ 为参数的表示为 $\boldsymbol{r}(\theta)=(x(\theta),y(\theta))=(f(\theta)\cos\theta,f(\theta)\sin\theta)$. 由

$$\boldsymbol{r}'(\theta)=\left(f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta,f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta\right),$$
$$\boldsymbol{r}''(\theta)=\left(f''(\theta)\cos\theta-2f'(\theta)\sin\theta-f(\theta)\cos\theta,f''(\theta)\sin\theta+2f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta\right)$$

即得曲线 C 的曲率表达式

$$\kappa(\theta)=\frac{x'(\theta)y''(\theta)-x''(\theta)y'(\theta)}{\left[(x')^2+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{f^2(\theta)+2\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\right)^2-f(\theta)\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}\theta^2}}{\left[f^2(\theta)+\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

□

§2.2　空间曲线

题 12 证明：E^3 的正则曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的曲率和挠率分别为

$$\kappa(t)=\frac{|\boldsymbol{r}'\wedge\boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3},\quad \tau(t)=\frac{(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}'\wedge\boldsymbol{r}''|^2}.$$

证明 对弧长参数 s 与一般参数 t，有

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}'(t)=\dot{\boldsymbol{r}}(s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},\\ \boldsymbol{r}''(t)=\dot{\boldsymbol{r}}(s)\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2,\\ \boldsymbol{r}'''(t)=\dot{\boldsymbol{r}}(s)\frac{\mathrm{d}^3s}{\mathrm{d}t^3}+3\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+\dddot{\boldsymbol{r}}(s)\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3.\end{cases}$$

由 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}(s)=\boldsymbol{t}(s)\wedge\kappa\boldsymbol{n}(s)=\kappa\boldsymbol{b}(s)$ 知 $|\dot{\boldsymbol{r}}(s)\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|=\kappa$. 又有

$$|\boldsymbol{r}'(t)|=|\dot{\boldsymbol{r}}(s)|\cdot\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$
$$|\boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t)|=\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3|\dot{\boldsymbol{r}}(s)\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|=\kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3,$$
$$(\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t),\boldsymbol{r}'''(t))=\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^6(\dot{\boldsymbol{r}}(s),\ddot{\boldsymbol{r}}(s),\dddot{\boldsymbol{r}}(s)).$$

于是

$$\kappa(t)=\frac{|\boldsymbol{r}'\wedge\boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3},\quad \tau(t)=\frac{(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}'\wedge\boldsymbol{r}''|^2}.$$

□

题 13 设曲线

$$\boldsymbol{r}(t)=\begin{cases}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}},t,0\right), & t<0,\\ (0,0,0), & t=0,\\ \left(0,t,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}\right), & t>0.\end{cases}$$

(1) 证明：$\boldsymbol{r}(t)$ 是一条正则曲线，且在 $t=0$ 处曲率 $\kappa=0$；

(2) 求 $\boldsymbol{r}(t)$ $(t\neq 0$ 时$)$ 的 Frenet 标架，并讨论 $t\to 0$ 时 Frenet 标架的极限.

解 (1) 定义函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 观察可知，当 $x\neq 0$ 时，$f(x)$ 有任意阶导数：

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}},\quad n=1,2,\cdots,$$

其中 $P_n(z)$ 是 $3n$ 次整系数多项式. 由

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{1}{x}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}\to 0,\quad x\to 0$$

知 $f'(0)=0$. 再假设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处直至 n 阶导数都为 0. 则

$$\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}=\frac{\frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}\to 0,\quad x\to 0,$$

即 $f^{(n+1)}(0)=0$. 故由数学归纳法可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处各阶导数均为 0. 于是 $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$，由此可知曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的每个分量都是 $\mathcal{C}^\infty$ 函数. 又

$$\boldsymbol{r}'(t)=\begin{cases}\left(\frac{2}{t^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}},1,0\right), & t<0,\\ (0,1,0), & t=0,\\ \left(0,1,\frac{2}{t^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}\right), & t>0,\end{cases}$$

因此 $|\boldsymbol{r}'(t)|\neq 0$，$\forall t$. 故 $\boldsymbol{r}(t)$ 是一条正则曲线. 从而 $\boldsymbol{r}(t)$ 的曲率函数也是 $\mathcal{C}^\infty$ 函数. 当 $t<0$ 时，

$$\boldsymbol{r}''(t)=\left(\left(\frac{4}{t^6}-\frac{6}{t^4}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}},0,0\right),$$

因此当 $t<0$ 时，曲率

$$\kappa(t)=\frac{|\boldsymbol{r}'\wedge\boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3}=\frac{|6t^2-4|\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}}{t^6\left(1+\frac{4}{t^6}\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{t^2}}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

由 $\kappa(t)$ 的光滑性即得

$$\kappa(0)=\lim_{t\to 0^-}\kappa(t)=\lim_{t\to 0^-}\frac{|6t^2-4|\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}}{t^6\left(1+\frac{4}{t^6}\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{t^2}}\right)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{t\to 0^-}\frac{|6t^2-4|\cdot\frac{\frac{1}{t^6}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{t^2}}}}{\left(1+\frac{\frac{4}{t^6}}{\mathrm{e}^{\frac{2}{t^2}}}\right)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

(2) 当 $t\neq 0$ 时，

$$\boldsymbol{t}(t)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}=\begin{cases}\left(\frac{\frac{2}{t^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}}{\sqrt{1+\frac{4}{t^6}\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{t^2}}}},\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{t^6}\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{t^2}}}},0\right), & t<0,\\ \left(0,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{t^6}\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{t^2}}}},\frac{\frac{2}{t^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}}{\sqrt{1+\frac{4}{t^6}\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{t^2}}}}\right), & t>0.\end{cases}$$

$$\boldsymbol{b}(t)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t)|}=\begin{cases}\left(0,0,\dfrac{\frac{6}{t^4}-\frac{4}{t^6}}{\left|\frac{6}{t^4}-\frac{4}{t^6}\right|}\right), & t<0,\\ \left(\dfrac{\frac{4}{t^6}-\frac{6}{t^4}}{\left|\frac{4}{t^6}-\frac{6}{t^4}\right|},0,0\right), & t>0\end{cases}=\begin{cases}\operatorname{sgn}\left(6t^2-4\right)(0,0,1), & t<0,\\ \operatorname{sgn}\left(4-6t^2\right)(1,0,0), & t>0.\end{cases}$$

$$\boldsymbol{n}(t)=\boldsymbol{b}(t)\wedge\boldsymbol{t}(t)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sgn}(6t^2-4)}{\sqrt{1+\frac{4}{t^6}\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{t^2}}}}\left(-1,\dfrac{2}{t^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}},0\right), & t<0,\\ \dfrac{\operatorname{sgn}(6t^2-4)}{\sqrt{1+\frac{4}{t^6}\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{t^2}}}}\left(0,\dfrac{2}{t^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}},-1\right), & t>0.\end{cases}$$

当 $t\to 0$ 时，$\operatorname{sgn}\left(6t^2-4\right)=-1$. 因此

$$\lim_{t\to 0^-}\boldsymbol{t}(t)=(0,1,0)=\lim_{t\to 0^+}\boldsymbol{t}(t),$$

$$\lim_{t\to 0^-}\boldsymbol{b}(t)=(0,0,-1),\quad \lim_{t\to 0^+}\boldsymbol{b}(t)=(1,0,0),$$

$$\lim_{t\to 0^-}\boldsymbol{n}(t)=(1,0,0),\quad \lim_{t\to 0^+}\boldsymbol{n}(t)=(0,0,1).$$

故 $\boldsymbol{r}(t)$ 的 Frenet 标架在 $t\to 0^-$ 和 $t\to 0^+$ 时极限不相等. □

题 14 设弧长参数曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的曲率 $\kappa>0$，挠率 $\tau>0$，$\boldsymbol{b}(s)$ 是 C 的副法向量，定义曲线 $\widetilde{C}$:

$$\widetilde{\boldsymbol{r}}(s)=\int_0^s\boldsymbol{b}(u)\,\mathrm{d}u.$$

(1) 证明：s 是曲线 $\widetilde{C}$ 的弧长参数且 $\widetilde{\kappa}=\tau$，$\widetilde{\tau}=\kappa$;

(2) 求 $\widetilde{C}$ 的 Frenet 标架.

证明 因为 $|\widetilde{\boldsymbol{r}}'(s)|=|\boldsymbol{b}(s)|=1$，所以 s 是曲线 $\widetilde{C}$ 的弧长参数. 因为

$$\widetilde{\boldsymbol{r}}'(s)=\boldsymbol{b}(s),\quad \widetilde{\boldsymbol{r}}''(s)=\boldsymbol{b}'(s)=-\tau(s)\boldsymbol{n}(s),$$

所以

$$\widetilde{\kappa}(s)=|\widetilde{\boldsymbol{r}}''(s)|=|-\tau(s)|=\tau(s).$$

又曲线 $\widetilde{C}$ 的单位切向量为 $\boldsymbol{b}(s)$，主法向量为 $-\boldsymbol{n}(s)$，所以它的副法向量为

$$\boldsymbol{b}(s)\wedge(-\boldsymbol{n}(s))=\boldsymbol{t}(s).$$

即 $\widetilde{C}$ 的 Frenet 标架为 $\{\widetilde{\boldsymbol{r}}(s);\boldsymbol{b}(s),-\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{t}(s)\}$. 故 $\widetilde{C}$ 的挠率

$$\widetilde{\tau}=\left\langle\widetilde{\boldsymbol{n}}'(s),\widetilde{\boldsymbol{b}}(s)\right\rangle=\langle-\dot{\boldsymbol{n}}(s),\boldsymbol{t}(s)\rangle=\langle\kappa(s)\boldsymbol{t}(s)-\tau\boldsymbol{b}(s),\boldsymbol{t}(s)\rangle=\kappa(s).$$

□

题 15 给定曲线 $\boldsymbol{r}(s)$，它的曲率和挠率分别是 κ,τ；$\boldsymbol{r}(s)$ 的单位切向量 $\boldsymbol{t}(s)$ 可视作单位球面 S^2 上的一条曲线，称为曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的切线像. 证明：曲线 $\widetilde{\boldsymbol{r}}(s)=\boldsymbol{t}(s)$ 的曲率、挠率分别为

$$\widetilde{\kappa}=\sqrt{1+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2},\quad \widetilde{\tau}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)}{\kappa\left[1+\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)^2\right]}.$$

证明 由 Frenet 公式，

$$\widetilde{\boldsymbol{r}}'(s)=\dot{\boldsymbol{t}}(s)=\kappa(s)\boldsymbol{n}(s),$$

$$\widetilde{\boldsymbol{r}}''(s)=\dot\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)+\kappa(s)\dot{\boldsymbol{n}}(s)=\dot\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)+\kappa(s)\left[-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s)+\tau(s)\boldsymbol{b}(s)\right]=-\kappa^2\boldsymbol{t}+\dot\kappa\boldsymbol{n}+\kappa\tau\boldsymbol{b},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{r}}'''(s)=-2\kappa\dot\kappa\boldsymbol{t}-\kappa^2\dot{\boldsymbol{t}}+\ddot\kappa\boldsymbol{n}+\dot\kappa\dot{\boldsymbol{n}}+\dot\kappa\tau\boldsymbol{b}+\kappa\dot\tau\boldsymbol{b}+\kappa\tau\dot{\boldsymbol{b}}=-3\kappa\dot\kappa\boldsymbol{t}+\left(\ddot\kappa-\kappa^3-\kappa\tau^2\right)\boldsymbol{n}+\left(2\dot\kappa\tau+\kappa\dot\tau\right)\boldsymbol{b}.$$

于是

$$\widetilde{\boldsymbol{r}}'(s)\wedge\widetilde{\boldsymbol{r}}''(s)=\kappa^2\tau\boldsymbol{t}+\kappa^3\boldsymbol{b},\quad\left|\widetilde{\boldsymbol{r}}'(s)\wedge\widetilde{\boldsymbol{r}}''(s)\right|=\sqrt{\kappa^6+\kappa^4\tau^2}.$$

从而曲线 $\widetilde{\boldsymbol{r}}(s)$ 的曲率

$$\widetilde{\kappa}(s)=\frac{\left|\widetilde{\boldsymbol{r}}'(s)\wedge\widetilde{\boldsymbol{r}}''(s)\right|}{\left|\widetilde{\boldsymbol{r}}'(s)\right|^3}=\frac{\sqrt{\kappa^6+\kappa^4\tau^2}}{\kappa^3}=\sqrt{1+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}.$$

又

$$\left(\widetilde{\boldsymbol{r}}'(s),\widetilde{\boldsymbol{r}}''(s),\widetilde{\boldsymbol{r}}'''(s)\right)=\kappa^4\dot\tau-\kappa^3\dot\kappa\tau,$$

所以曲线 $\widetilde{\boldsymbol{r}}(s)$ 的挠率

$$\widetilde{\tau}(s)=\frac{\left(\widetilde{\boldsymbol{r}}'(s),\widetilde{\boldsymbol{r}}''(s),\widetilde{\boldsymbol{r}}'''(s)\right)}{\left|\widetilde{\boldsymbol{r}}'(s)\wedge\widetilde{\boldsymbol{r}}''(s)\right|^2}=\frac{\kappa^4\dot\tau-\kappa^3\dot\kappa\tau}{\kappa^6+\kappa^4\tau^2}=\frac{\kappa\dot\tau-\dot\kappa\tau}{\kappa^3+\kappa\tau^2}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)}{\kappa\left[1+\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)^2\right]}.$$

□

题 16 求满足 $\tau=c\kappa$ (c 为常数，$\kappa>0$) 的曲线.

解 由 Frenet 公式，

$$\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{t}}(s)\\ \dot{\boldsymbol{n}}(s)\\ \dot{\boldsymbol{b}}(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & \kappa & \\ -\kappa & & \tau\\ & -\tau & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}(s)\\ \boldsymbol{n}(s)\\ \boldsymbol{b}(s)\end{pmatrix}.$$

作换元 $t(s)=\displaystyle\int_0^s\kappa(u)\,\mathrm{d}u$，则 $\mathrm{d}t=\kappa(s)\,\mathrm{d}s$，从而

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}'(t)\\ \boldsymbol{n}'(t)\\ \boldsymbol{b}'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & 1 & \\ -1 & & c\\ & -c & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}(t)\\ \boldsymbol{n}(t)\\ \boldsymbol{b}(t)\end{pmatrix}.$$

由此可知

$$\boldsymbol{n}''(t)=-\boldsymbol{t}'(t)+c\boldsymbol{b}'(t)=-(c^2+1)\boldsymbol{n}(t).$$

令 $\omega=\sqrt{1+c^2}$，则

$$\boldsymbol{n}(t)=\cos\omega t\boldsymbol{v}_1+\sin\omega t\boldsymbol{v}_2,$$

其中 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 为常向量. 进而由 $\boldsymbol{t}'(t)=\boldsymbol{n}(t)$ 可解得

$$\boldsymbol{t}(t)=\frac{1}{\omega}\left(\sin\omega t\boldsymbol{v}_1-\cos\omega t\boldsymbol{v}_2+c\boldsymbol{v}_3\right),$$

其中 $\boldsymbol{v}_3$ 为常向量. 于是再由 $\boldsymbol{b}'(t)=-c\boldsymbol{n}(t)$ 可解得

$$\boldsymbol{b}(t)=-\frac{c}{\omega}\left(\sin\omega t\boldsymbol{v}_1-\cos\omega t\boldsymbol{v}_2\right)+\frac{1}{\omega}\boldsymbol{v}_3.$$

于是

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{t}(0) \\ \boldsymbol{n}(0) \\ \boldsymbol{b}(0) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} & -\frac{1}{\omega} & \frac{c}{\omega} \\ 1 & & \\ & \frac{c}{\omega} & \frac{1}{\omega} \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}.$$

注意到 $\det(P) = \dfrac{1+c^2}{\omega^2} = 1$，所以为使 $\{\boldsymbol{t}(0), \boldsymbol{n}(0), \boldsymbol{b}(0)\}$ 是单位正交右手系，只需选取 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ 为单位正交右手系. 由 $\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{t}(t)$ 可得曲线方程

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(t) &= \frac{1}{\omega}\left(\int_0^s \sin\omega t(u)\,\mathrm{d}u\boldsymbol{v}_1 - \int_0^s \cos\omega t(u)\,\mathrm{d}u\boldsymbol{v}_2 + cs\boldsymbol{v}_3\right) + \boldsymbol{v}_4 \\ &= \frac{1}{\omega}\left[\int_0^s \sin\left(\sqrt{1+c^2}\int_0^u \kappa(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u\boldsymbol{v}_1 - \int_0^s \cos\left(\sqrt{1+c^2}\int_0^u \kappa(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u\boldsymbol{v}_2 + cs\boldsymbol{v}_3\right] + \boldsymbol{v}_4, \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{v}_4$ 为常向量. □

题 17 证明：曲线 $\boldsymbol{r}(t) = \left(t+\sqrt{3}\sin t, 2\cos t, \sqrt{3}t - \sin t\right)$ 与曲线 $\widetilde{\boldsymbol{r}}(t) = \left(2\cos\dfrac{t}{2}, 2\sin\dfrac{t}{2}, -t\right)$ 是合同的.

证明 曲线 $\widetilde{\boldsymbol{r}}(t) = \left(2\cos\dfrac{t}{2}, 2\sin\dfrac{t}{2}, -t\right)$ 是圆柱螺旋线，作换元 $u = \dfrac{t}{2}$ 可得 $\widetilde{\boldsymbol{r}}(u) = (2\cos u, 2\sin u, -2u)$. 由例 (3.2) 知其曲率 $\kappa_2 \equiv \dfrac{1}{4}$，挠率 $\tau_2 \equiv -\dfrac{1}{4}$. 而

$$\begin{gathered} \boldsymbol{r}'(t) = \left(1+\sqrt{3}\cos t, -2\sin t, \sqrt{3}-\cos t\right), \\ \boldsymbol{r}''(t) = \left(-\sqrt{3}\sin t, -2\cos t, \sin t\right), \\ \boldsymbol{r}'''(t) = \left(-\sqrt{3}\cos t, 2\sin t, \cos t\right), \\ \boldsymbol{r}'(t)\wedge\boldsymbol{r}''(t) = \left(2\sqrt{3}\cos t - 2, -4\sin t, -2\cos t - 2\sqrt{3}\right), \\ (\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''') = \langle \boldsymbol{r}''', \boldsymbol{r}'\wedge\boldsymbol{r}''\rangle = -8, \end{gathered}$$

故曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的曲率

$$\kappa_1(t) = \frac{|\boldsymbol{r}'\wedge\boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3} = \frac{4\sqrt{2}}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{4},$$

挠率

$$\tau_1(t) = \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}'\wedge\boldsymbol{r}''|^2} = \frac{-8}{32} = -\frac{1}{4}.$$

因此 $\kappa_1 \equiv \kappa_2$，$\tau_1 \equiv \tau_2$. 由曲线论基本定理得两曲线合同. □

第三章　曲面的局部理论

§3.1　正则曲面、第一基本形式、Gauss 曲率、法曲率、第二基本形式

题 18 求 xy 平面的曲线 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$，沿 E^3 的常方向 $\boldsymbol{a}$ 平行移动所得的曲面的参数表示式.

解 所得曲面参数表示为 $\widetilde{\boldsymbol{r}}(u,v) = (x(u), y(u), 0) + v\boldsymbol{a}$. □

题 19 证明：曲面 $F\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right) = 0$ 的任意切平面过原点.

证明 曲面 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 在其上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处切平面方程为

$$\langle(\nabla F)_{P_0},(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\rangle=0.$$

代入

$$\nabla F=\left(-F_1\frac{y}{x^2}-F_2\frac{z}{x^2},\frac{F_1}{x},\frac{F_2}{x}\right)$$

化简即得 P_0 处切平面方程

$$(F_1y_0+F_2z_0)z-F_1x_0y-F_2x_0z=0,$$

可见其过原点. □

题 20 设曲面 S 与平面 Π 相交于点 P，且 S 位于 Π 的同一侧，证明：Π 是曲面 S 在点 P 的切平面.

证明 设曲面 S 的参数表示为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，$P=\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$. 取平面 Π 的单位法向量 $\boldsymbol{n}_\Pi$，其方向指向曲面 S 一侧. 考虑曲面 S 上点到平面 Π 的高度函数

$$h(u,v)=\langle\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{r}(u_0,v_0),\boldsymbol{n}_\Pi\rangle,$$

它在 (u_0,v_0) 处有极小值，因此

$$h_u(u_0,v_0)=\langle\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0),\boldsymbol{n}_\Pi\rangle=0,$$
$$h_v(u_0,v_0)=\langle\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0),\boldsymbol{n}_\Pi\rangle=0.$$

这说明 $\boldsymbol{n}_\Pi$ 与 $\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)\wedge\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)$ 平行，故 Π 是曲面 S 在点 P 的切平面. □

题 21 求曲面 $z=f(x,y)$ 的第一基本形式.

解 该曲面以 x,y 为参数的表示为 $\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$. 则由

$$\boldsymbol{r}_x=(1,0,f_x),\quad \boldsymbol{r}_y=(0,1,f_y)$$

可得

$$E=\langle\boldsymbol{r}_x,\boldsymbol{r}_x\rangle=1+f_x^2,\quad F=\langle\boldsymbol{r}_x,\boldsymbol{r}_y\rangle=f_xf_y,\quad G=\langle\boldsymbol{r}_y,\boldsymbol{r}_y\rangle=1+f_y^2.$$

故该曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=\left(1+f_x^2\right)\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x+f_xf_y\left(\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}y+\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}x\right)+\left(1+f_y^2\right)\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y.$$

□

题 22 使 $F=\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\rangle=0$ 的参数 (u,v) 称为曲面的正交参数系. 给定一个曲面 S 以及它的一个参数表示 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，证明：对曲面 S 上任一点 $P_0=P(u_0,v_0)$，存在 P_0 的邻域 D 以及 D 的新参数 (s,t)，使得 (s,t) 是曲面 S 的正交参数系.

证明 先证明一个比正交参数系的存在性更一般的引理.

引理 设 $\boldsymbol{a}(u,v)$ 与 $\boldsymbol{b}(u,v)$ 是正则参数曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上两个处处线性无关的光滑向量场，则对曲面 S 上任意一点 P，存在 P 的邻域 U 及其上的新参数化 $\widetilde{\boldsymbol{r}}=\widetilde{\boldsymbol{r}}(\widetilde{u},\widetilde{v})$，使得 $\widetilde{\boldsymbol{r}}_{\widetilde{u}},\widetilde{\boldsymbol{r}}_v$ 分别与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行.

【引理的证明：设

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}(u,v)=a_1(u,v)\boldsymbol{r}_u+a_2(u,v)\boldsymbol{r}_v,\\ \boldsymbol{b}(u,v)=b_1(u,v)\boldsymbol{r}_u+b_2(u,v)\boldsymbol{r}_v,\end{cases}$$

则由 $\boldsymbol{a}(u,v)$ 与 $\boldsymbol{b}(u,v)$ 处处线性无关可得

$$\Delta:=\begin{vmatrix}a_1(u,v) & a_2(u,v)\\ b_1(u,v) & b_2(u,v)\end{vmatrix}\neq 0.$$

根据一次微分式积分因子的存在性定理，对于曲面上任意一点 P，存在 P 的邻域 U 和定义在 U 上的处处非零的光滑函数 ξ,η，使得

$$\begin{cases}\mathrm{d}\widetilde{u}=\xi(b_2\,\mathrm{d}u-b_1\,\mathrm{d}v),\\ \mathrm{d}\widetilde{v}=\eta(-a_2\,\mathrm{d}u+a_1\,\mathrm{d}v).\end{cases}$$

于是

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\widetilde{u}}{\partial u} & \dfrac{\partial\widetilde{v}}{\partial u}\\ \dfrac{\partial\widetilde{u}}{\partial v} & \dfrac{\partial\widetilde{v}}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi b_2(u,v) & -\eta a_2(u,v)\\ -\xi b_1(u,v) & \eta a_1(u,v)\end{pmatrix},$$

且由 $\xi\eta\Delta\neq 0$ 可知该矩阵可逆，说明 $\widetilde{u},\widetilde{v}$ 是曲面 S 在邻域 U 上的新参数. 此时

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial\widetilde{u}} & \dfrac{\partial v}{\partial\widetilde{u}}\\ \dfrac{\partial u}{\partial\widetilde{v}} & \dfrac{\partial v}{\partial\widetilde{v}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\widetilde{u}}{\partial u} & \dfrac{\partial\widetilde{v}}{\partial u}\\ \dfrac{\partial\widetilde{u}}{\partial v} & \dfrac{\partial\widetilde{v}}{\partial v}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\xi\eta\Delta}\begin{pmatrix}\eta a_1(u,v) & \eta a_2(u,v)\\ \xi b_1(u,v) & \xi b_2(u,v)\end{pmatrix},$$

故

$$\begin{cases}\widetilde{\boldsymbol{r}}_{\widetilde{u}}=\boldsymbol{r}_u\dfrac{\partial u}{\partial\widetilde{u}}+\boldsymbol{r}_v\dfrac{\partial v}{\partial\widetilde{u}}=\dfrac{1}{\xi\Delta}(a_1\boldsymbol{r}_u+a_2\boldsymbol{r}_v)=\dfrac{1}{\xi\Delta}\boldsymbol{a},\\ \widetilde{\boldsymbol{r}}_{\widetilde{v}}=\boldsymbol{r}_u\dfrac{\partial u}{\partial\widetilde{v}}+\boldsymbol{r}_v\dfrac{\partial v}{\partial\widetilde{v}}=\dfrac{1}{\eta\Delta}(b_1\boldsymbol{r}_u+b_2\boldsymbol{r}_v)=\dfrac{1}{\eta\Delta}\boldsymbol{b}.\end{cases}$$

引理得证.】

对 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$ 作 Gram-Schmidt 标准正交化：

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{r}_u}{|\boldsymbol{r}_u|}=\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}},$$

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{r}_v-\langle\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{e}_1\rangle\,\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{r}_v-\frac{F}{E}\boldsymbol{r}_u,$$

$$\boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{G-\frac{F^2}{E}}}\left(\boldsymbol{r}_v-\frac{F}{E}\boldsymbol{r}_u\right)=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(-\frac{F}{\sqrt{E}}\boldsymbol{r}_u+\sqrt{E}\boldsymbol{r}_v\right).$$

将 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_1(u,v)$ 与 $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2(u,v)$ 视作曲面 S 上的两个单位正交向量场，则由引理知存在点 P 的邻域 D 以及 D 的新参数化 $\widetilde{\boldsymbol{r}}=\widetilde{\boldsymbol{r}}(s,t)$，使得 $\widetilde{\boldsymbol{r}}_s$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 平行，$\widetilde{\boldsymbol{r}}_t$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 平行，故 (s,t) 是 S 的正交参数系. □

题 23 证明：在曲面的任意一点，任何两个相互正交的切向的法曲率之和为常数.

证明 对给定点选取充分小的邻域合适的参数化使得曲面方程在其上可写为 $\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$，且该点坐标为 $(0,0,0)$，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=f_{xy}(0,0)=0$. 记 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{r}_x(0,0)=(1,0,0)$，$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{r}_y(0,0)=(0,1,0)$. 任取曲面在该点处的两个单位切向量 $\boldsymbol{v}_1=\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{v}_2=-\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2$，则由 Euler 公式，

$$\kappa_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{v}_1)+\kappa_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{v}_2)=\kappa_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{e}_1)\cos^2\theta+\kappa_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{e}_2)\sin^2\theta+\kappa_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{e}_1)\sin^2\theta+\kappa_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{e}_2)\cos^2\theta=\kappa_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{e}_1)+\kappa_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{e}_2).$$

□

题 24 设曲面 S 由方程 $x^2+y^2-f(z)=0$ 给定，f 满足 $f(0)=0, f'(0)\neq 0$，证明：S 在点 $(0,0,0)$ 的法曲率为常数.

证明 由于 $f'(0)\neq 0$，由反函数定理，存在 $f(0)$ 的一个邻域 U 及函数 $g: f(U)\to U$，使得 $g=(f|_U)^{-1}$. 于是曲面在点 $(0,0,0)$ 附近可表示为 $\boldsymbol{r}(x,y)=\left(x,y,g\left(x^2+y^2\right)\right)$. 我们有

$$\boldsymbol{r}_x=\left(1,0,2xg'\left(x^2+y^2\right)\right),\quad \boldsymbol{r}_y=\left(0,1,2yg'\left(x^2+y^2\right)\right).$$

记 $h(x,y)=g\left(x^2+y^2\right)$，则

$$\begin{aligned} h_x(0,0)&=\left(2xg'\left(x^2+y^2\right)\right)_{(x,y)=(0,0)}=0,\\ h_y(0,0)&=\left(2yg'\left(x^2+y^2\right)\right)_{(x,y)=(0,0)}=0,\\ h_{xy}(0,0)&=\left(4xyg''\left(x^2+y^2\right)\right)_{(x,y)=(0,0)}=0. \end{aligned}$$

下设

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{r}_x(0,0)=(1,0,0),\quad \boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{r}_y(0,0)=(0,1,0),$$

则由 Euler 公式，只需证 $\kappa_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{e}_1)=\kappa_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{e}_2)$，其中 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2=(0,0,1)$. 因为平面 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{n}\}$ 截曲面所得曲线可表示为 $\widetilde{\boldsymbol{r}}(t)=\left(t,g\left(t^2\right)\right)$，该参数化满足曲线在点 $(0,0)$ 处切向量恰为 $\boldsymbol{e}_1$，因此 S 在点 $(0,0,0)$ 处沿 $\boldsymbol{e}_1$ 方向的法曲率即该曲线在点 $(0,0)$ 处带符号曲率：

$$\kappa_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{e}_1)=\left(\frac{1\cdot[2g'(x^2)+4x^2g''(x^2)]}{\left[1^2+\left(2xg'(x^2)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right)_{x=0}=2g'(0).$$

同理可得 S 在点 $(0,0,0)$ 处沿 $\boldsymbol{e}_2$ 方向的法曲率 $\kappa_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{e}_2)=2g'(0)$. 因此 S 在点 $(0,0,0)$ 处沿各方向的法曲率均为 $\dfrac{2}{f'(0)}$. □

题 25 求曲面 $z=f(x,y)$ 的 Gauss 曲率.

解 曲面以 x,y 为参数的表示为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$. 由

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_x=(1,0,f_x),\\ \boldsymbol{r}_y=(0,1,f_y)\end{cases}$$

可得

$$\boldsymbol{r}_x\wedge\boldsymbol{r}_y=(1,0,f_x)\wedge(0,1,f_y)=(-f_x,-f_y,1).$$

从而与 $\boldsymbol{r}_x,\boldsymbol{r}_y$ 构成右手系的单位法向量

$$\boldsymbol{n}(x,y)=\frac{\boldsymbol{r}_x\wedge\boldsymbol{r}_y}{|\boldsymbol{r}_x\wedge\boldsymbol{r}_y|}=\frac{(-f_x,-f_y,1)}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}.$$

由于 $\boldsymbol{r}_x\wedge\boldsymbol{r}_y$ 与 $\boldsymbol{n}_x\wedge\boldsymbol{n}_y$ 平行，为计算 Gauss 曲率，只需考虑这两个向量的第 3 个分量之比

$$\boldsymbol{n}_x^1\boldsymbol{n}_y^2-\boldsymbol{n}_x^2\boldsymbol{n}_y^1.$$

而

$$\boldsymbol{n}_x^1=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-f_x}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}\right)=\frac{-f_{xx}\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}+f_x\frac{f_xf_{xx}+f_yf_{yx}}{\sqrt{f_x^2+f_y^1+1}}}{f_x^2+f_y^2+1}=\frac{-f_{xx}\left(f_y^2+1\right)+f_xf_yf_{yx}}{\left(f_x^2+f_y^2+1\right)^{\frac{3}{2}}},$$
$$\boldsymbol{n}_x^2=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-f_y}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}\right)=\frac{-f_{yx}\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}+f_y\frac{f_xf_{xx}+f_yf_{yx}}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}}{f_x^2+f_y^2+1}=\frac{-f_{yx}\left(f_x^2+1\right)+f_xf_yf_{xx}}{\left(f_x^2+f_y^2+1\right)^{\frac{3}{2}}},$$
$$\boldsymbol{n}_y^1=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-f_x}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}\right)=\frac{-f_{xy}\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}+f_x\frac{f_xf_{xy}+f_yf_{yy}}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}}{f_x^2+f_y^2+1}=\frac{-f_{xy}\left(f_y^2+1\right)+f_xf_yf_{yy}}{\left(f_x^2+f_y^2+1\right)^{\frac{3}{2}}},$$
$$\boldsymbol{n}_y^2=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-f_y}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}\right)=\frac{-f_{yy}\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}+f_y\frac{f_xf_{xy}+f_yf_{yy}}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}}{f_x^2+f_y^2+1}=\frac{-f_{yy}\left(f_x^2+1\right)+f_xf_yf_{xy}}{\left(f_x^2+f_y^2+1\right)^{\frac{3}{2}}},$$

代入即得

$$\begin{aligned}&\kappa(x,y,f(x,y))=\boldsymbol{n}_x^1\boldsymbol{n}_y^2-\boldsymbol{n}_x^2\boldsymbol{n}_y^1\\=&\frac{\left[f_xf_yf_{yx}-f_{xx}\left(f_y^2+1\right)\right]\left[f_xf_yf_{xy}-f_{yy}\left(f_x^2+1\right)\right]-\left[f_xf_yf_{xx}-f_{yx}\left(f_x^2+1\right)\right]\left[f_xf_yf_{yy}-f_{xy}\left(f_y^2+1\right)\right]}{\left(f_x^2+f_y^2+1\right)^3}\\=&\frac{\left(f_x^2+f_y^2+1\right)f_{xx}f_{yy}-\left(f_x^2+f_y^2+1\right)f_{xy}^2}{\left(f_x^2+f_y^2+1\right)^3}\\=&\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{\left(f_x^2+f_y^2+1\right)^2}.\end{aligned}$$

□

题 26 求曲面 $z=f(x,y)$ 的第二基本形式.

解 由曲面方程 $\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$ 可得

$$\boldsymbol{r}_x=(1,0,f_x),\quad \boldsymbol{r}_y=(0,1,f_y),$$
$$\boldsymbol{r}_{xx}=(0,0,f_{xx}),\quad \boldsymbol{r}_{xy}=(0,0,f_{xy}),\quad \boldsymbol{r}_{yy}=(0,0,f_{yy}).$$

于是

$$\boldsymbol{n}(x,y)=\frac{\boldsymbol{r}_x\wedge\boldsymbol{r}_y}{|\boldsymbol{r}_x\wedge\boldsymbol{r}_y|}=\frac{(-f_x,-f_y,1)}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}},$$
$$L=\langle\boldsymbol{r}_{xx},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{f_{xx}}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}},$$
$$M=\langle\boldsymbol{r}_{xy},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{f_{xy}}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}},$$
$$N=\langle\boldsymbol{r}_{yy},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{f_{yy}}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}.$$

故曲面的第二基本形式

$$\mathrm{II}=\frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}\left[f_{xx}\,\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x+f_{xy}\left(\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}y+\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}x\right)+f_{yy}\,\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y\right].$$

□

题 27 设曲面 S_1 和 S_2 的交线 C 的曲率为 κ，曲线 C 在曲面 S_i 上的法曲率为 k_i $(i=1,2)$；若沿 C，S_1 和 S_2 法向的夹角为 θ，证明：

$$\kappa^2\sin^2\theta = k_1^2+k_2^2-2k_1k_2\cos\theta.$$

证明 设曲线 C 的弧长参数表示为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，$\boldsymbol{n}_i(s)$ 为 $\boldsymbol{r}(s)$ 在曲面 S_i 上的法向量 (定向选取同题目条件)，则

$$\begin{aligned}
k_1^2+k_2^2-2k_1k_2\cos\theta &= \left\langle \dot{\boldsymbol{t}}(s),\boldsymbol{n}_1(s)\right\rangle^2+\left\langle \dot{\boldsymbol{t}}(s),\boldsymbol{n}_2(s)\right\rangle^2-2\left\langle \dot{\boldsymbol{t}}(s),\boldsymbol{n}_1(s)\right\rangle^2\left\langle \dot{\boldsymbol{t}}(s),\boldsymbol{n}_2(s)\right\rangle^2\left\langle \boldsymbol{n}_1(s),\boldsymbol{n}_2(s)\right\rangle\\
&=\left|\left\langle \dot{\boldsymbol{t}}(s),\boldsymbol{n}_1(s)\right\rangle \boldsymbol{n}_2(s)-\left\langle \dot{\boldsymbol{t}}(s),\boldsymbol{n}_2(s)\right\rangle \boldsymbol{n}_1(s)\right|^2\\
&\overset{\text{题1}}{=\!=}\left|\dot{\boldsymbol{t}}(s)\wedge(\boldsymbol{n}_2(s)\wedge\boldsymbol{n}_1(s))\right|^2\\
&=\left|\dot{\boldsymbol{t}}(s)\wedge(\pm\sin\theta\,\boldsymbol{t}(s))\right|^2\\
&=\kappa^2\left|\boldsymbol{n}(s)\wedge\boldsymbol{t}(s)\right|^2\sin^2\theta\\
&=\kappa^2\sin^2\theta.
\end{aligned}$$

□

§3.2　平均曲率、极小曲面、曲面的局部外蕴几何、脐点

题 28 求曲面 $z=f(x,y)$ 的平均曲率.

解 曲面方程为 $\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$. 由

$$\boldsymbol{r}_x=(1,0,f_x),\quad \boldsymbol{r}_y=(0,1,f_y)$$

可得

$$\boldsymbol{n}(x,y)=\frac{\boldsymbol{r}_x\wedge\boldsymbol{r}_y}{|\boldsymbol{r}_x\wedge\boldsymbol{r}_y|}=\frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}\left(-f_x,-f_y,1\right),$$

$$\boldsymbol{r}_{xx}=(0,0,f_{xx}),\quad \boldsymbol{r}_{xy}=(0,0,f_{xy}),\quad \boldsymbol{r}_{yy}=(0,0,f_{yy}).$$

于是

$$E=\langle\boldsymbol{r}_x,\boldsymbol{r}_x\rangle=1+f_x^2,\quad F=\langle\boldsymbol{r}_x,\boldsymbol{r}_y\rangle=f_xf_y,\quad G=\langle\boldsymbol{r}_y,\boldsymbol{r}_y\rangle=1+f_y^2,$$

$$L=\langle\boldsymbol{r}_{xx},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad M=\langle\boldsymbol{r}_{xy},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad N=\langle\boldsymbol{r}_{yy},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$$

故曲面的平均曲率

$$\begin{aligned}
H(x,y)=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}^{-1}\right)&=\frac{LG-2MF+NE}{2\left(EG-F^2\right)}\\
&=\frac{f_{xx}\left(1+f_y^2\right)-2f_xf_yf_{xy}+f_{yy}\left(1+f_x^2\right)}{2\left(1+f_x^2+f_y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

□

题 29 求曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)=(a(u+v),b(u-v),4uv)$ 的 Gauss 曲率、平均曲率、主曲率及对应的主方向.

解 由

$$\boldsymbol{r}_u=(a,b,4v),\quad \boldsymbol{r}_v=(a,-b,4u)$$

可得

$$\boldsymbol{n}(u,v)=\frac{\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{r}_v|}=\frac{1}{\sqrt{4b^2(u+v)^2+4a^2(u-v)^2+a^2b^2}}(2b(u+v),2a(v-u),-ab),$$

$$\boldsymbol{r}_{uu}=(0,0,0),\quad \boldsymbol{r}_{uv}=(0,0,4),\quad \boldsymbol{r}_{vv}=(0,0,0).$$

于是

$$E=\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_u\rangle=a^2+b^2+16v^2,\quad F=\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\rangle=a^2-b^2+16uv,\quad G=\langle\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_v\rangle=a^2+b^2+16u^2,$$

$$L=\langle\boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{n}\rangle=0,\quad M=\langle\boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{-4ab}{\sqrt{4b^2(u+v)^2+4a^2(u-v)^2+a^2b^2}},\quad N=\langle\boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{n}\rangle=0.$$

故曲面的 Gauss 曲率

$$\begin{aligned}K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}&=\frac{\frac{-16a^2b^2}{4b^2(u+v)^2+4a^2(u-v)^2+a^2b^2}}{(a^2+b^2+16v^2)(a^2+b^2+16u^2)-(a^2-b^2+16uv)^2}\\&=\frac{-4a^2b^2}{[a^2b^2+4a^2(u-v)^2+4b^2(u+v)^2]^2},\end{aligned}$$

平均曲率

$$\begin{aligned}H=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}&=\frac{\frac{8ab\left(a^2-b^2+16uv\right)}{\sqrt{4b^2(u+v)^2+4a^2(u-v)^2+a^2b^2}}}{2\left[(a^2+b^2+16v^2)(a^2+b^2+16u^2)-(a^2-b^2+16uv)^2\right]}\\&=\frac{ab\,(a^2-b^2+16uv)}{[a^2b^2+4a^2(u-v)^2+4b^2(u+v)^2]^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

解关于 k 的方程 $k^2-2Hk+K=0$ 得主曲率 $k_1=H+\sqrt{H^2-K},k_2=H-\sqrt{H^2-K}$，由

$$H^2-K=\frac{a^2b^2\left[(a^2+b^2+16u^2)(a^2+b^2+16v^2)\right]}{[a^2b^2+4a^2(u-v)^2+4b^2(u_v)^2]^3}$$

不妨设 $ab\geqslant 0$(若 $ab<0$ 则 k_1,k_2 互换，不影响结果). 代入即得

$$k_1=\frac{ab\left[a^2-b^2+16uv+\sqrt{(a^2+b^2+16u^2)(a^2+b^2+16v^2)}\right]}{[a^2b^2+4a^2(u-v)^2+4b^2(u+v)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$k_2=\frac{ab\left[a^2-b^2+16uv-\sqrt{(a^2+b^2+16u^2)(a^2+b^2+16v^2)}\right]}{[a^2b^2+4a^2(u-v)^2+4b^2(u+v)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Weingarten 变换在自然标架 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$ 下的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}=\frac{M}{EG-F^2}\begin{pmatrix}-F&G\\E&-F\end{pmatrix},$$

于是该矩阵与特征值 k_1,k_2 相伴的特征空间的一个基即两方程

$$\begin{pmatrix}\pm\sqrt{(a^2+b^2+16u^2)(a^2+b^2+16v^2)}&a^2+b^2+16u^2\\a^2+b^2+16v^2&\pm\sqrt{(a^2+b^2+16u^2)(a^2+b^2+16v^2)}\end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$$

的各一个非零解：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\sqrt{a^2+b^2+16u^2}\boldsymbol{r}_u+\sqrt{a^2+b^2+16v^2}\boldsymbol{r}_v,$$
$$\boldsymbol{\xi}_2=\sqrt{a^2+b^2+16u^2}\boldsymbol{r}_u-\sqrt{a^2+b^2+16v^2}\boldsymbol{r}_v,$$

这即是分别与主曲率 k_1,k_2 对应的主方向. □

题 30 曲面 S 上的一条曲线 C 称为曲率线，是指 C 在每点的切向量都是曲面 S 在该点的一个主方向. 证明：曲线 $C:\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(u(t),v(t))$ 是曲率线当且仅当沿着 C，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}t}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 平行.

证明 曲线 $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(u(t),v(t))$ 是曲率线 $\iff$ $\boldsymbol{r}'(t)=u'(t)\boldsymbol{r}_u+v'(t)\boldsymbol{r}_v$ 是 Weingarten 变换的特征向量 $\iff$ 存在 $\lambda(t)$，使得 $\lambda(t)\boldsymbol{r}'(t)=\mathcal{W}(\boldsymbol{r}'(t))=u'(t)\mathcal{W}(\boldsymbol{r}_u)+v'(t)\mathcal{W}(\boldsymbol{r}_v)=-u'(t)\boldsymbol{n}_u-v'(t)\boldsymbol{n}_v=-\boldsymbol{n}'(t)$ $\iff$ $\boldsymbol{n}'(t)$ 与 $\boldsymbol{r}'(t)$ 平行. □

题 31 曲面 S 上的一个切向称为渐近方向，是指沿此方向的法曲率为 0；S 上一条曲线 C 称为渐近线，是指它的切向均为渐近方向. 证明：曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 的参数曲线是渐近线当且仅当 $L=N=0$.

证明 曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 的参数曲线 $\boldsymbol{r}_1(u)=\boldsymbol{r}(u,v_0)$ 和 $\boldsymbol{r}_2(v)=(u_0,v)$ 都是渐近线 $\iff$ $\kappa_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}_u)=\kappa_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}_v)=\boldsymbol{0}$ $\iff$ $\begin{cases}\mathrm{II}(\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_u)=L=0,\\ \mathrm{II}(\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_v)=N=0.\end{cases}$ □

题 32 求曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)=\left(u^3,v^3,u+v\right)$ 上抛物点的轨迹.

解 由

$$\boldsymbol{r}_u=\left(3u^2,0,1\right),\quad \boldsymbol{r}_v=\left(0,3v^2,1\right)$$

可得

$$\boldsymbol{r}_{uu}=(6u,0,0),\quad \boldsymbol{r}_{uv}=(0,0,0),\quad \boldsymbol{r}_{vv}=(0,6v,0),$$
$$\boldsymbol{n}(u,v)=\frac{\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{r}_v|}=\frac{1}{\sqrt{u^4+v^4+9u^4v^4}}\left(-v^2,-u^2,3u^2v^2\right).$$

于是

$$L=\langle\boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{-6uv^2}{\sqrt{u^4+v^4+9u^4v^4}},\quad M=\langle\boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{n}\rangle=0,\quad N=\langle\boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{-6u^2v}{\sqrt{u^4+v^4+9u^4v^4}}.$$

因此曲面上抛物点的轨迹方程为

$$LN-M^2=0\iff uv=0,$$

其轨迹即两条三次曲线

$$\begin{cases}y=z^3,\\ x=0\end{cases}\quad 与\quad\begin{cases}x=z^3,\\ y=0.\end{cases}$$

□

题 33 设 P 是曲面 S 上的一点. 证明：当 P 不是脐点时，S 的主曲率 k_1,k_2 是 P 附近的光滑函数；当 P 是脐点时，主曲率是 P 附近的连续函数.

证明 由

$$K=k_1k_2,\quad H=\frac{k_1+k_2}{2}$$

可得

$$k_{1,2}=H\pm\sqrt{H^2-K},$$

而

$$H^2-K=\frac{(k_1-k_2)^2}{4}\geqslant 0,$$

等号成立当且仅当 $k_1=k_2$ 即 P 是脐点. 由此可见，主曲率 k_1,k_2 总是 P 附近的连续函数，并在 P 不是脐点时是 P 附近的光滑函数. □

题 34 设曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上没有抛物点，$\boldsymbol{n}$ 是 S 的法向量；曲面 $\widetilde{S}:\widetilde{\boldsymbol{r}}=\widetilde{\boldsymbol{r}}(u,v)=\boldsymbol{r}(u,v)+\lambda\boldsymbol{n}(u,v)$(常数 λ 充分小) 称为 S 的平行曲面.

(1) 证明：曲面 S 和 $\widetilde{S}$ 在对应点的切平面平行；

(2) 可以选取 $\widetilde{S}$ 的单位法向量 $\widetilde{\boldsymbol{n}}$，使得 $\widetilde{S}$ 的 Gauss 曲率和平均曲率分别为

$$\widetilde{K}=\frac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2K},\quad \widetilde{H}=\frac{H-\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2K}.$$

解 (1) 由

$$\widetilde{\boldsymbol{r}}_u=\boldsymbol{r}_u+\lambda\boldsymbol{n}_u,\quad \widetilde{\boldsymbol{r}}_v=\boldsymbol{r}_v+\lambda\boldsymbol{n}_v$$

可知

$$\widetilde{\boldsymbol{r}}_u\wedge\widetilde{\boldsymbol{r}}_v=\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{r}_v+\lambda\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{n}_v+\lambda\boldsymbol{n}_u\wedge\boldsymbol{r}_v+\lambda^2\boldsymbol{n}_u\wedge\boldsymbol{n}_v.$$

注意到 $\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{n}_v$、$\boldsymbol{n}_u\wedge\boldsymbol{r}_v$ 及 $\boldsymbol{n}_u\wedge\boldsymbol{n}_v$ 均与 $\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{r}_v$ 共线，因此 $\widetilde{\boldsymbol{r}}_u\wedge\widetilde{\boldsymbol{r}}_v$ 与 $\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{r}_v$ 共线，即 S 和 $\widetilde{S}$ 在对应点的切平面平行.

(2) 由 (1) 知 $\widetilde{\boldsymbol{n}}=\pm\boldsymbol{n}$. 假设 $\widetilde{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{n}$. 设曲面 S 和 $\widetilde{S}$ 的 Weingarten 变换在各自的自然标架 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$ 和 $\{\widetilde{\boldsymbol{r}}_u,\widetilde{\boldsymbol{r}}_v\}$ 下的矩阵表示分别为 A 和 $\widetilde{A}$，则由

$$A\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{n}_u & -\boldsymbol{n}_v\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{r}}_u & \widetilde{\boldsymbol{r}}_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}_u & \boldsymbol{n}_v\end{pmatrix}=(I-\lambda A)\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\end{pmatrix},$$
$$\widetilde{A}\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{r}}_u & \widetilde{\boldsymbol{r}}_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{n}_u & -\boldsymbol{n}_v\end{pmatrix}$$

可得

$$\widetilde{A}=(I-\lambda A)^{-1}A.$$

于是 $\widetilde{S}$ 的 Gauss 曲率

$$\widetilde{K}=\det\left(\widetilde{A}\right)=\frac{\det(A)}{\det(I-\lambda A)}=\frac{K}{\lambda^2\det\left(\frac{1}{\lambda}I-A\right)}=\frac{K}{\lambda^2\left(\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2H}{\lambda}+K\right)}=\frac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2K},$$

平均曲率

$$\widetilde{H}=\frac{\widetilde{k}_1+\widetilde{k}_2}{2}=\frac{\frac{k_1}{1-\lambda k_1}+\frac{k_2}{1-\lambda k_2}}{2}=\frac{k_1+k_2-2\lambda k_1k_2}{2\lambda^2k_1k_2-2\lambda(k_1+k_2)+2}=\frac{H-\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2K}.$$

故 $\widetilde{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{n}$ 即满足要求. □

题 35 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 是无脐点曲面 S 的一个参数表示，证明：曲面 S 的参数曲线 $u=$ 常数 和 $v=$ 常数是曲率线的充要条件是 $F=M=0$.

证明 $\Rightarrow$：若曲面 S 的参数曲线是曲率线，则有

$$-\boldsymbol{n}_u=k_1\boldsymbol{r}_u,\quad -\boldsymbol{n}_v=k_2\boldsymbol{r}_v,$$

其中 k_1,k_2 是曲面 S 的主曲率，且由曲面 S 无脐点知 $k_1\neq k_2$. 于是由 Euler 定理知 $\boldsymbol{r}_u$ 与 $\boldsymbol{r}_v$ 正交，即 $F=\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\rangle=0$. 进而 $M=-\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{n}_v\rangle=\langle\boldsymbol{r}_u,k_2\boldsymbol{r}_v\rangle=0$.

$\Leftarrow$：若 $F=M=0$，则 $\boldsymbol{r}_u$ 与 $\boldsymbol{r}_v$、$\boldsymbol{r}_u$ 与 $\boldsymbol{n}_v$ 均正交，而 $\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}_v$ 共面，因此存在 $k_2\in\mathbb{R}$，使得 $-\boldsymbol{n}_v=k_2\boldsymbol{r}_v$，即 $\boldsymbol{r}_v$ 是一个主方向. 同理 $\boldsymbol{r}_u$ 也是一个主方向. 故曲面 S 的参数曲线是曲率线. □

题 36 若曲面 $z=f(x)+g(y)$ 是极小曲面且非平面，证明：除相差一个常数外，它可以写成

$$z=\frac{1}{a}\ln\frac{\cos ay}{\cos ax}.$$

这个曲面称为 Scherk 曲面.

证明 曲面方程为 $\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,f(x)+g(y))$. 由

$$\boldsymbol{r}_x=(1,0,f'(x)),\quad \boldsymbol{r}_y=(0,1,g'(y))$$

可得

$$\boldsymbol{r}_{xx}=(0,0,f''(x)),\quad \boldsymbol{r}_{xy}=(0,0,0),\quad \boldsymbol{r}_{yy}=(0,0,g''(y)),$$
$$\boldsymbol{n}(x,y)=\frac{\boldsymbol{r}_x\wedge\boldsymbol{r}_y}{|\boldsymbol{r}_x\wedge\boldsymbol{r}_y|}=\frac{1}{\sqrt{(f'(x))^2+(g'(y))^2+1}}\left(-f'(x),-g'(y),1\right).$$

于是

$$E=\langle\boldsymbol{r}_x,\boldsymbol{r}_x\rangle=1+(f'(x))^2,\quad F=\langle\boldsymbol{r}_x,\boldsymbol{r}_y\rangle=f'(x)g'(y),\quad G=\langle\boldsymbol{r}_y,\boldsymbol{r}_y\rangle=1+(g'(y))^2,$$
$$L=\langle\boldsymbol{r}_{xx},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{f''(x)}{\sqrt{(f'(x))^2+(g'(y))^2+1}},\quad M=\langle\boldsymbol{r}_{xy},\boldsymbol{n}\rangle=0,\quad N=\langle\boldsymbol{r}_{yy},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{g''(y)}{\sqrt{(f'(x))^2+(g'(y))^2+1}}.$$

故曲面的平均曲率

$$H=\frac{1}{2}\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}=\frac{f''(x)+f''(x)\left(g'(y)\right)^2+g''(y)+g''(y)\left(f'(x)\right)^2}{2\left[1+(f'(x))^2+(g'(y))^2\right]^{\frac{3}{2}}}=0,$$

即

$$f''(x)+f''(x)\left(g'(y)\right)^2+g''(y)+g''(y)\left(f'(x)\right)^2=0.$$

分离变量即得

$$\frac{f''(x)}{1+(f'(x))^2}=-\frac{g''(y)}{1+(g'(y))^2}\equiv C,$$

也即

$$\left(\arctan f'(x)\right)'=-\left(\arctan g'(y)\right)'=a.$$

由于曲面非平面，$a\neq 0$，可解得

$$f(x)=-\frac{1}{a}\ln\left[\cos(ax+c_1)\right]+c_2,$$

$$g(y)=\frac{1}{a}\ln\left[\cos(ay+c_3)\right]+c_4,$$

其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数. 故

$$z=f(x)+g(y)=\frac{1}{a}\ln\frac{\cos(ay+c_3)}{\cos(ax+c_1)}+c_2+c_4.$$

□

第四章　标架与曲面论基本定理

§4.1　自然标架运动方程、曲面结构方程、曲面论基本定理

题 37 定义 Riemann 记号

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma}:=-g_{\delta\xi}\left(\frac{\partial\Gamma^{\xi}_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}-\frac{\partial\Gamma^{\xi}_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}}+\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\xi}_{\eta\gamma}-\Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\xi}_{\eta\beta}\right).$$

(1) 证明：

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 g_{\delta\beta}}{\partial u^{\gamma}\partial u^{\alpha}}+\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}\partial u^{\delta}}+\frac{\partial^2 g_{\delta\gamma}}{\partial u^{\beta}\partial u^{\alpha}}-\frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}\partial u^{\delta}}\right)+\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\Gamma_{\eta\delta\gamma}-\Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}\Gamma_{\eta\delta\beta},$$

其中 $\Gamma_{\eta\delta\gamma}:=g_{\eta\xi}\Gamma^{\xi}_{\delta\gamma}$ 为第二类 Christoffel 符号.

(2) 计算所有 Christoffel 符号 $\left\{\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\mid\alpha,\beta,\gamma=1,2\right\}$ 用 E,F,G 及其偏导数表示的表达式.

(3) 利用 (1) 和 (2) 证明：

$$\begin{aligned}4\left(EG-F^2\right)R_{1212}=&E\left(E_vG_v-2F_uG_v+(G_v)^2\right)+F\left(E_uG_v-E_vG_u-2E_vF_v+F_uF_v-2F_uG_u\right)\\&+G\left(E_uG_u-2E_uF_v+(E_v)^2\right)-2\left(EG-F^2\right)\left(E_{vv}-2F_{uv}+G_{uu}\right).\end{aligned}$$

由此及 Gauss 绝妙定理即得 $R_{1212}=\left(EG-F^2\right)K$.

(4) 设 $\boldsymbol{r}:D\to\mathbb{R}^3,(u,v)\mapsto\boldsymbol{r}(u,v)$ 为一正则曲面片且其参数化满足 $F=M=0$. 利用 (2) 证明 Codazzi 方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial b_{11}}{\partial u^2}-\dfrac{\partial b_{12}}{\partial u^1}=\Gamma^{\xi}_{12}b_{\xi 1}-\Gamma^{\xi}_{11}b_{\xi 2},\\ \dfrac{\partial b_{21}}{\partial u^2}-\dfrac{\partial b_{22}}{\partial u^1}=\Gamma^{\xi}_{22}b_{\xi 1}-\Gamma^{\xi}_{21}b_{\xi 2}\end{cases}$$

用记号 E,F,G,L,M,N 可表为

$$L_v=HE_v,\quad N_u=HG_u,$$

其中 H 为平均曲率.

证明 (1) 我们有

$$\begin{aligned}R_{\delta\alpha\beta\gamma}=&-\frac{\partial\Gamma_{\delta\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}+\frac{\partial\Gamma_{\delta\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}}+\frac{\partial g_{\delta\xi}}{\partial u^{\gamma}}\Gamma^{\xi}_{\alpha\beta}-\frac{\partial g_{\delta\xi}}{\partial u^{\beta}}\Gamma^{\xi}_{\alpha\gamma}-\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\Gamma_{\delta\eta\gamma}+\Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}\Gamma_{\delta\eta\beta}\\=&-\frac{\partial\Gamma_{\delta\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}+\frac{\partial\Gamma_{\delta\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}}-\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\left(\Gamma_{\delta\eta\gamma}-\frac{\partial g_{\delta\eta}}{\partial u^{\gamma}}\right)+\Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}\left(\Gamma_{\delta\eta\beta}-\frac{\partial g_{\delta\eta}}{\partial u^{\beta}}\right)\\=&-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^{\gamma}}\left(g_{\alpha\delta,\beta}+g_{\delta\beta,\alpha}-g_{\alpha\beta,\delta}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^{\beta}}\left(g_{\alpha\delta,\gamma}+g_{\delta\gamma,\alpha}-g_{\alpha\gamma,\delta}\right)\\&-\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\left[\frac{1}{2}\left(g_{\eta\delta,\gamma}+g_{\delta\gamma,\eta}-g_{\eta\gamma,\delta}\right)-g_{\delta\eta,\gamma}\right]+\Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}\left[\frac{1}{2}\left(g_{\eta\delta,\beta}+g_{\delta\beta,\eta}-g_{\eta\beta,\delta}\right)-g_{\delta\eta,\beta}\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\left(g_{\alpha\delta,\beta}+g_{\delta\beta,\alpha}-g_{\alpha\beta,\delta}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^\beta}\left(g_{\alpha\delta,\gamma}+g_{\delta\gamma,\alpha}-g_{\alpha\gamma,\delta}\right)\\
&\quad+\Gamma^\eta_{\alpha\beta}\left[\frac{1}{2}\left(g_{\eta\delta,\gamma}-g_{\delta\gamma,\eta}+g_{\eta\gamma,\delta}\right)\right]-\Gamma^\eta_{\alpha\gamma}\left[\frac{1}{2}\left(g_{\eta\delta,\beta}-g_{\delta\beta,\eta}+g_{\eta\beta,\delta}\right)\right]\\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\left(g_{\alpha\delta,\beta}+g_{\delta\beta,\alpha}-g_{\alpha\beta,\delta}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^\beta}\left(g_{\alpha\delta,\gamma}+g_{\delta\gamma,\alpha}-g_{\alpha\gamma,\delta}\right)+\Gamma^\eta_{\alpha\beta}\Gamma_{\eta\delta\gamma}-\Gamma^\eta_{\alpha\gamma}\Gamma_{\eta\delta\beta}\\
&=\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 g_{\delta\beta}}{\partial u^\gamma\partial u^\alpha}+\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma\partial u^\delta}+\frac{\partial^2 g_{\delta\gamma}}{\partial u^\beta\partial u^\alpha}-\frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta\partial u^\delta}\right)+\Gamma^\eta_{\alpha\beta}\Gamma_{\eta\delta\gamma}-\Gamma^\eta_{\alpha\gamma}\Gamma_{\eta\delta\beta}.
\end{aligned}
$$

(2) 我们有

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{11}&=\frac{1}{2}g^{1\xi}\left(2g_{1\xi,1}-g_{11,\xi}\right)=\frac{1}{2}\frac{GE_u-2FF_u+FE_v}{EG-F^2},\\
\Gamma^2_{11}&=\frac{1}{2}g^{2\xi}\left(2g_{1\xi,1}-g_{11,\xi}\right)=\frac{1}{2}\frac{-EE_v+2EF_u-FE_u}{EG-F^2},\\
\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}&=\frac{1}{2}g^{1\xi}\left(g_{1\xi,2}+g_{2\xi,1}-g_{12,\xi}\right)=\frac{1}{2}\frac{GE_v-FG_u}{EG-F^2},\\
\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}&=\frac{1}{2}g^{2\xi}\left(g_{1\xi,2}+g_{2\xi,1}-g_{12,\xi}\right)=\frac{1}{2}\frac{EG_u-FE_v}{EG-F^2},\\
\Gamma^1_{22}&=\frac{1}{2}g^{1\xi}\left(2g_{2\xi,2}-g_{22,\xi}\right)=\frac{1}{2}\frac{-FG_v+2GF_v-GG_u}{EG-F^2},\\
\Gamma^2_{22}&=\frac{1}{2}g^{2\xi}\left(2g_{2\xi,2}-g_{22,\xi}\right)=\frac{1}{2}\frac{EG_v-2FF_v+FG_u}{EG-F^2}.
\end{aligned}
$$

(3) 利用 (1) 可见 (每个)Gauss 方程

$$
R_{\delta\alpha\beta\gamma}=-b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta}+b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta}
$$

等号两端均关于 β,γ 反称，关于 δ,α 反称，而关于 $(\delta,\alpha),(\beta,\gamma)$ 对称. 因此只需考虑 $(\delta,\alpha,\beta,\gamma)=(1,2,1,2)$ 的情形，即方程

$$
R_{1212}=b_{11}b_{22}-b_{12}^2.
$$

先计算 $\Gamma_{112},\Gamma_{212},\Gamma_{111},\Gamma_{211}$ 用 E,F,G 及其偏导数表示的表达式：

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{112}&=g_{1\xi}\Gamma^\xi_{12}=\frac{E\left(GE_v-FG_u\right)+F\left(EG_u-FE_v\right)}{2\left(EG-F^2\right)}=\frac{E_v}{2},\\
\Gamma_{212}&=g_{2\xi}\Gamma^\xi_{12}=\frac{F\left(GE_v-FG_u\right)+G\left(EG_u-FE_v\right)}{2\left(EG-F^2\right)}=\frac{G_u}{2},\\
\Gamma_{111}&=g_{1\xi}\Gamma^\xi_{11}=\frac{E\left(GE_u-2FF_u+FE_v\right)-F\left(EE_v-2EF_u+FE_u\right)}{2\left(EG-F^2\right)}=\frac{E_u}{2},\\
\Gamma_{211}&=g_{2\xi}\Gamma^\xi_{11}=\frac{F\left(GE_u-2FF_u+FE_v\right)-G\left(EE_v-2EF_u+FE_u\right)}{2\left(EG-F^2\right)}=\frac{2F_u-E_v}{2}.
\end{aligned}
$$

由 (1) 可得

$$
R_{1212}=\frac{1}{2}\left(-E_{vv}+2F_{uv}-G_{uu}\right)+\Gamma^1_{21}\Gamma_{112}+\Gamma^2_{21}\Gamma_{212}-\Gamma^1_{22}\Gamma_{111}-\Gamma^2_{22}\Gamma_{211}.
$$

因此

$$
\begin{aligned}
4\left(EG-F^2\right)R_{1212}=&2\left(EG-F^2\right)\left(-E_{vv}+2F_{uv}-G_{uu}\right)+\left(GE_v-FG_u\right)E_v+\left(EG_u-FE_v\right)G_u\\
&+\left(FG_v-2GF_v+GG_u\right)E_u-\left(EG_v-2FF_v+FG_u\right)\left(2F_u-E_v\right)\\
=&E\left(E_vG_v-2F_uG_v+(G_u)^2\right)+F\left(E_uG_v-E_vG_u-2E_vF_v+4F_uF_v-2F_uG_u\right)\\
&+G\left(E_uG_u-2E_uF_v+(E_v)^2\right)-2\left(EG-F^2\right)\left(E_{vv}-2F_{uv}+G_{uu}\right).
\end{aligned}
$$

由 Gauss 绝妙定理，上式右端即 $4\left(EG-F^2\right)^2K$，因此 $R_{1212}=\left(EG-F^2\right)K$.

(4) 由 (2) 及 $F=M=0$ 可得

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^{\xi}b_{\xi1}=\Gamma_{12}^{1}b_{11}+\Gamma_{12}^{2}b_{21}=\frac{LE_v}{2E},\\ \Gamma_{11}^{\xi}b_{\xi2}=\Gamma_{11}^{1}b_{12}+\Gamma_{11}^{2}b_{22}=\frac{-NE_v}{2G},\\ \Gamma_{22}^{\xi}b_{\xi1}=\Gamma_{22}^{1}b_{11}+\Gamma_{22}^{2}b_{21}=\frac{-LG_u}{2E},\\ \Gamma_{21}^{\xi}b_{\xi2}=\Gamma_{21}^{1}b_{12}+\Gamma_{21}^{2}b_{22}=\frac{NG_u}{2G}.\end{aligned}$$

故此时 Codazzi 方程组等价于

$$\begin{cases}L_v=\dfrac{(LG+NE)E_v}{2EG},\\ N_u=\dfrac{(LG+NE)G_u}{2EG}.\end{cases}$$

注意到平均曲率

$$H=\frac{1}{2}\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}=\frac{LG+NE}{2EG},$$

因此 Codazzi 方程组可表为

$$L_v=HE_v,\quad N_u=HG_u.$$

□

§4.2 正交活动标架运动方程、曲面上的微分形式和外微分、正交活动标架结构方程

题 38 在旋转曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,f(u))$ 上建立正交标架场 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 并求相应的诸微分形式.

解 由 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 是旋转曲面可不妨设 $u>0$. 因为 $\boldsymbol{r}_u=(\cos v,\sin v,f'(u))$ 与 $\boldsymbol{r}_v=(-u\sin v,u\cos v,0)$ 正交，所以可取

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{r}_u}{|\boldsymbol{r}_u|}=\frac{1}{\sqrt{E}}\boldsymbol{r}_u,\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_v|}=\frac{1}{\sqrt{G}}\boldsymbol{r}_v,\quad \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2,$$

其中

$$E=\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_u\rangle=1+\left(f'(u)\right)^2,\quad G=\langle\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_v\rangle=u^2.$$

由

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\,\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\,\mathrm{d}v$$

可得

$$\begin{gathered}\omega^1=\langle\mathrm{d}\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1\rangle=\left\langle\boldsymbol{r}_u\,\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\,\mathrm{d}v,\frac{1}{\sqrt{E}}\boldsymbol{r}_u\right\rangle=\sqrt{E}\,\mathrm{d}u=\sqrt{1+\left(f'(u)\right)^2}\,\mathrm{d}u,\\ \omega^2=\langle\mathrm{d}\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_2\rangle=\left\langle\boldsymbol{r}_u\,\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\,\mathrm{d}v,\frac{1}{\sqrt{G}}\boldsymbol{r}_v\right\rangle=\sqrt{G}\,\mathrm{d}v=u\,\mathrm{d}v,\\ \omega^1\wedge\omega^2=\sqrt{EG}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.\end{gathered}$$

又

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega^1&=\mathrm{d}\left(\sqrt{E}\,\mathrm{d}u\right)=\mathrm{d}\left(\sqrt{E}\right)\wedge\mathrm{d}u=\left(\left(\sqrt{E}\right)_u\mathrm{d}u+\left(\sqrt{E}\right)_v\mathrm{d}v\right)\wedge\mathrm{d}u=\left(\sqrt{E}\right)_v\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}u\\ &=-\frac{\left(\sqrt{E}\right)_v}{\sqrt{EG}}\,\omega^1\wedge\omega^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega^2&=\mathrm{d}\left(\sqrt{G}\,\mathrm{d}v\right)=\mathrm{d}\left(\sqrt{G}\right)\wedge\mathrm{d}v=\left(\left(\sqrt{G}\right)_u\mathrm{d}u+\left(\sqrt{G}\right)_v\mathrm{d}v\right)\wedge\mathrm{d}v=\left(\sqrt{G}\right)_u\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\\&=\frac{\left(\sqrt{G}\right)_u}{\sqrt{EG}}\,\omega^1\wedge\omega^2,\end{aligned}$$

因此

$$\omega_1^2=-\frac{\left(\sqrt{E}\right)_v}{\sqrt{EG}}\,\omega^1+\frac{\left(\sqrt{G}\right)_u}{\sqrt{EG}}\,\omega^2=-\frac{\left(\sqrt{E}\right)_v}{\sqrt{G}}\,\mathrm{d}u+\frac{\left(\sqrt{G}\right)_u}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}v=\frac{1}{\sqrt{1+\left(f'(u)\right)^2}}\,\mathrm{d}v.$$

再由

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1&=\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\boldsymbol{r}_u\right)=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)_u\mathrm{d}u+\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)_v\mathrm{d}v\right]\boldsymbol{r}_u+\frac{1}{\sqrt{E}}\left(\boldsymbol{r}_{uu}\,\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_{uv}\,\mathrm{d}v\right)\\&=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)_u\boldsymbol{r}_u+\frac{1}{\sqrt{E}}\boldsymbol{r}_{uu}\right]\mathrm{d}u+\left[\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)_v\boldsymbol{r}_u+\frac{1}{\sqrt{E}}\boldsymbol{r}_{uv}\right]\mathrm{d}v,\\\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2&=\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\boldsymbol{r}_v\right)=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\right)_u\mathrm{d}u+\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\right)_v\mathrm{d}v\right]\boldsymbol{r}_u+\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\boldsymbol{r}_{vu}\,\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_{vv}\,\mathrm{d}v\right)\\&=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\right)_u\boldsymbol{r}_u+\frac{1}{\sqrt{G}}\boldsymbol{r}_{vu}\right]\mathrm{d}u+\left[\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\right)_v\boldsymbol{r}_u+\frac{1}{\sqrt{G}}\boldsymbol{r}_{vv}\right]\mathrm{d}v\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}\omega_1^3&=\langle\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3\rangle=\frac{\langle\boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{e}_3\rangle}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}u+\frac{\langle\boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{e}_3\rangle}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}v=\frac{L}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}u+\frac{M}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}v,\\\omega_2^3&=\langle\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\rangle=\frac{\langle\boldsymbol{r}_{vu},\boldsymbol{e}_3\rangle}{\sqrt{G}}\,\mathrm{d}u+\frac{\langle\boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{e}_3\rangle}{\sqrt{G}}\,\mathrm{d}v=\frac{M}{\sqrt{G}}\,\mathrm{d}u+\frac{N}{\sqrt{G}}\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

由

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\left(0,0,f''(u)\right),\quad\boldsymbol{r}_{uv}=\left(-\sin v,\cos v,0\right),\quad\boldsymbol{r}_{vv}=\left(-u\cos v,-u\sin v,0\right),$$

$$\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{r}_v=\left(-u\cos vf'(u),-u\sin vf'(u),u\right),\quad\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{1+\left(f'(u)\right)^2}}\left(-\cos vf'(u),-\sin vf'(u),1\right)$$

可得

$$L=\langle\boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{e}_3\rangle=\frac{f''(u)}{\sqrt{1+\left(f'(u)\right)^2}},\quad M=\langle\boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{e}_3\rangle=0,\quad N=\langle\boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{e}_3\rangle=\frac{uf'(u)}{\sqrt{1+\left(f'(u)\right)^2}}.$$

代入即得

$$\omega_1^3=\frac{f''(u)}{1+\left(f'(u)\right)^2}\,\mathrm{d}u,\quad\omega_2^3=\frac{f'(u)}{\sqrt{1+\left(f'(u)\right)^2}}\,\mathrm{d}v.$$

□

题 39 设 (u,v) 是曲面 S 的正交参数，$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}},\boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}}$，证明：方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}\omega_1^3=\omega_1^2\wedge\omega_2^3,\\\mathrm{d}\omega_2^3=\omega_2^1\wedge\omega_1^3\end{cases}$$

与 Codazzi 方程

$$\begin{cases}\left(\dfrac{L}{\sqrt{E}}\right)_v-\left(\dfrac{M}{\sqrt{E}}\right)_u-N\dfrac{\left(\sqrt{E}\right)_v}{G}-M\dfrac{\left(\sqrt{G}\right)_u}{\sqrt{EG}}=0,\\\left(\dfrac{N}{\sqrt{G}}\right)_u-\left(\dfrac{M}{\sqrt{G}}\right)_v-L\dfrac{\left(\sqrt{G}\right)_u}{E}-M\dfrac{\left(\sqrt{E}\right)_v}{\sqrt{EG}}=0\end{cases}$$

等价.

证明 在题38中已求得正交参数系下

$$\omega_1^2=-\frac{\left(\sqrt{E}\right)_v}{\sqrt{G}}\,\mathrm{d}u+\frac{\left(\sqrt{G}\right)_u}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}v,\quad \omega_1^3=\frac{L}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}u+\frac{M}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}v,\quad \omega_2^3=\frac{M}{\sqrt{G}}\,\mathrm{d}u+\frac{N}{\sqrt{G}}\,\mathrm{d}v.$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega_1^3&=\left[\left(\frac{M}{\sqrt{E}}\right)_u-\left(\frac{L}{\sqrt{E}}\right)_v\right]\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v,\\
\mathrm{d}\omega_2^3&=\left[\left(\frac{N}{\sqrt{G}}\right)_u-\left(\frac{M}{\sqrt{G}}\right)_v\right]\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v,\\
\omega_1^2\wedge\omega_2^3&=-\left[\frac{\left(\sqrt{E}\right)_v}{\sqrt{G}}\frac{N}{\sqrt{G}}+\frac{\left(\sqrt{G}\right)_u}{\sqrt{E}}\frac{M}{\sqrt{G}}\right]\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v,\\
\omega_2^1\wedge\omega_1^3&=\left[\frac{\left(\sqrt{E}\right)_v}{\sqrt{G}}\frac{M}{\sqrt{E}}+\frac{\left(\sqrt{G}\right)_u}{\sqrt{E}}\frac{L}{\sqrt{E}}\right]\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

由此可见两个方程组等价. □

题 40 设 M 为正则曲面片，$p\in M$ 不是脐点，则存在 p 点的邻域 $U\subset M$，使得 U 上存在正交活动标架 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$，满足 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为主方向.

证明 设 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 是 M 的正交活动标架，其中 $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{n}$. 因为 p 不是脐点，总可以令 $\boldsymbol{e}_1(p),\boldsymbol{e}_2(p)$ 在切平面内旋转使得它们均不是主方向. 由连续性，$k_1\neq k_2$ 在 p 点的一个邻域内成立. 设 Weingarten 变换在 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 下的矩阵表示为 $\begin{pmatrix}h_1^1&h_1^2\\h_2^1&h_2^2\end{pmatrix}$. 由假设及此矩阵的对称性，有 $h_1^2(p)=h_2^1(p)\neq0$，由连续性，在 p 点的一个邻域内有 $h_1^2=h_2^1\neq0$. 结合 $h_1^1h_2^2-h_1^2h_2^1=k_1k_2, h_1^1+h_2^2=k_1+k_2$ 可注意到在此邻域内，

$$\boldsymbol{v}_1=h_1^2\boldsymbol{e}_1+\left(k_1-h_1^1\right)\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{v}_2=\left(k_2-h_2^2\right)\boldsymbol{e}_1+h_1^2\boldsymbol{e}_2$$

为该矩阵的两个特征向量 (由 $h_1^2\neq0$ 知 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\neq\boldsymbol{0}$)，故可取 $\widetilde{\boldsymbol{e}}_1=\dfrac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|},\widetilde{\boldsymbol{e}}_2=\dfrac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|},\widetilde{\boldsymbol{e}}_3=\boldsymbol{e}_3$，则 $\{\boldsymbol{r};\widetilde{\boldsymbol{e}}_1,\widetilde{\boldsymbol{e}}_2,\widetilde{\boldsymbol{e}}_3\}$ 为满足题意的正交活动标架. □

题 41 设 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 是曲面的正交标架，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是曲面的主方向，k_1,k_2 是相应的主曲率. 证明：这时曲面的 Codazzi 方程等价于

$$\mathrm{d}k_1\wedge\omega^1=\left(k_2-k_1\right)\omega_1^2\wedge\omega^2,\quad \mathrm{d}k_2\wedge\omega^2=\left(k_1-k_2\right)\omega_2^1\wedge\omega^1.$$

证明 由已知，$\begin{pmatrix}\omega_1^3\\\omega_2^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1&\\&k_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1\\\omega^2\end{pmatrix}$. 故此时 Codazzi 方程组为

$$\begin{cases}\mathrm{d}\left(k_1\,\omega^1\right)=\omega_1^2\wedge\left(k_2\,\omega^2\right),\\ \mathrm{d}\left(k_2\,\omega^2\right)=\omega_2^1\wedge\left(k_1\,\omega^1\right).\end{cases}$$

也即

$$\begin{cases}\mathrm{d}k_1\wedge\omega^1=k_2\,\omega_1^2\wedge\omega^2-k_1\,\mathrm{d}\omega^1,\\ \mathrm{d}k_2\wedge\omega^2=k_1\,\omega_2^1\wedge\omega^1-k_2\,\mathrm{d}\omega^2.\end{cases}$$

再代入 $\mathrm{d}\omega^1=\omega^2\wedge\omega_2^1,\mathrm{d}\omega^2=\omega^1\wedge\omega_1^2$ 即得题中形式. □

题 42 验证：$\omega^1\wedge\omega^2=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u^1\wedge\mathrm{d}u^2$.

证明 对 $\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2\}$ 作 Gram-Schmidt 标准正交化：

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_1|}=\frac{\boldsymbol{r}_1}{\sqrt{E}},$$
$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{r}_2-\langle\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{e}_1\rangle\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{r}_2-\frac{F}{E}\boldsymbol{r}_1,$$
$$\boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{G-\frac{F^2}{E}}}\left(\boldsymbol{r}_2-\frac{F}{E}\boldsymbol{r}_1\right)=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(-\frac{F}{\sqrt{E}}\boldsymbol{r}_1+\sqrt{E}\boldsymbol{r}_2\right).$$

故

$$\omega^1=\langle\mathrm{d}\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1\rangle=\left\langle\boldsymbol{r}_1\,\mathrm{d}u^1+\boldsymbol{r}_2\,\mathrm{d}u^2,\boldsymbol{e}_1\right\rangle=\sqrt{E}\,\mathrm{d}u^1+\frac{F}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}u^2,$$
$$\omega^2=\langle\mathrm{d}\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_2\rangle=\left\langle\boldsymbol{r}_1\,\mathrm{d}u^1+\boldsymbol{r}_2\,\mathrm{d}u^2,\boldsymbol{e}_2\right\rangle=\sqrt{\frac{EG-F^2}{E}}\,\mathrm{d}u^2,$$
$$\omega^1\wedge\omega^2=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u^1\wedge\mathrm{d}u^2.$$

□

题 43 若正则曲面片 M 的 Gauss 曲率 $K\equiv0$ 且无脐点，则 M 是可展曲面.

证明 由题40，可取 M 上的正交活动标架 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 使 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是 M 的主方向. 设对应的主曲率为 k_1,k_2. 由 M 无脐点知 $k_1\neq k_2$，不妨设 $k_1=0,k_2\neq0$，则 $\begin{pmatrix}\omega_1^3\\ \omega_2^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&k_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ k_2\,\omega^2\end{pmatrix}$. 此时由 Codazzi 方程得

$$\mathrm{d}\omega_1^3=\omega_1^2\wedge\omega_2^3=\omega_1^2\wedge\left(k_2\,\omega^2\right)=k_2\,\omega_1^2\wedge\omega^2=0,$$

因为 $k_2\neq0$，所以 $\omega_1^2\wedge\omega^2=0$，$\omega_1^2=f\,\omega^2$. 下面证明，曲面 M 上满足 $\omega^2\equiv0$ 的曲线族是直线族. 将正交活动标架运动方程限制在任一这样的曲线上，由 $\omega_1^2=f\,\omega^2=0$ 得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1=\omega_1^2\boldsymbol{e}_2+\omega_1^3\boldsymbol{e}_3=0.$$

而

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\omega^1\boldsymbol{e}_1+\omega^2\boldsymbol{e}_2=\omega^1\boldsymbol{e}_1,$$

说明此曲线的切向量为 E^3 中的常向量，因此它是直线. 故 M 为直纹面，结合 Gauss 曲率 $K\equiv0$ 知 M 是可展曲面. □

题 44 设曲面 $S:\boldsymbol{r}\left(u^1,u^2\right)$ 有参数变换 $u^\alpha=u^\alpha\left(\widetilde{u}^1,\widetilde{u}^2\right),\alpha=1,2$. 记 $a_i^\alpha=\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial\widetilde{u}^i},\widetilde{a}_\alpha^i=\dfrac{\partial\widetilde{u}^i}{\partial u^\alpha}$ $(1\leqslant\alpha,i\leqslant2)$，$S$ 在参数 $\left(\widetilde{u}^1,\widetilde{u}^2\right)$ 下的第一、第二基本形式为 $\{\widetilde{g}_{ij}\},\left\{\widetilde{b}_{ij}\right\}$，证明：

(1) $\widetilde{g}_{ij}=g_{\alpha\beta}a_i^\alpha a_j^\beta$，$\widetilde{b}_{ij}=\operatorname{sgn}\left(\det\left(a_\beta^\alpha\right)\right)b_{\alpha\beta}a_i^\alpha a_j^\beta$，$g^{\alpha\beta}=\widetilde{g}^{ij}a_i^\alpha a_j^\beta$；

(2) $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k=\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma a_i^\alpha a_j^\beta\widetilde{a}_\gamma^k+\dfrac{\partial a_i^\alpha}{\partial\widetilde{u}^j}\widetilde{a}_\alpha^k$.

证明 (1) 记 $\widetilde{\boldsymbol{r}}\left(\widetilde{u}^1,\widetilde{u}^2\right)=\boldsymbol{r}\left(u^1\left(\widetilde{u}^1,\widetilde{u}^2\right),u^2\left(\widetilde{u}^1,\widetilde{u}^2\right)\right)$，则 $\widetilde{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{r}_\alpha\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial\widetilde{u}^i}=a_i^\alpha\boldsymbol{r}_\alpha$，从而

$$\widetilde{g}_{ij}=\langle\widetilde{\boldsymbol{r}}_i,\widetilde{\boldsymbol{r}}_j\rangle=\left\langle a_i^\alpha\boldsymbol{r}_\alpha,a_j^\beta\boldsymbol{r}_\beta\right\rangle=a_i^\alpha a_j^\beta\langle\boldsymbol{r}_\alpha,\boldsymbol{r}_\beta\rangle=g_{\alpha\beta}a_i^\alpha a_j^\beta.$$

又

$$\widetilde{\boldsymbol{r}}_1\wedge\widetilde{\boldsymbol{r}}_2=\left(a_1^\alpha\boldsymbol{r}_\alpha\right)\wedge\left(a_2^\beta\boldsymbol{r}_\beta\right)=\det\left(a_\beta^\alpha\right)\boldsymbol{r}_1\wedge\boldsymbol{r}_2,$$

因此

$$\widetilde{\boldsymbol{n}} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{r}}_1 \wedge \widetilde{\boldsymbol{r}}_2}{|\widetilde{\boldsymbol{r}}_1 \wedge \widetilde{\boldsymbol{r}}_2|} = \operatorname{sgn}\left(\det\left(a_\beta^\alpha\right)\right)\boldsymbol{n}.$$

记 $a_{ij}^\alpha = \dfrac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \widetilde{u}^i \partial \widetilde{u}^j}$，则 $\widetilde{\boldsymbol{r}}_{ij} = \dfrac{\partial}{\partial \widetilde{u}^j}\left(a_i^\alpha \boldsymbol{r}_\alpha\right) = a_{ij}^\alpha \boldsymbol{r}_\alpha + a_i^\alpha a_j^\beta \boldsymbol{r}_{\alpha\beta}$，于是

$$\widetilde{b}_{ij} = \langle \widetilde{\boldsymbol{r}}_{ij}, \widetilde{\boldsymbol{n}} \rangle = \left\langle a_{ij}^\alpha \boldsymbol{r}_\alpha + a_i^\alpha a_j^\beta \boldsymbol{r}_{\alpha\beta}, \operatorname{sgn}\left(\det\left(a_\beta^\alpha\right)\right)\boldsymbol{n}\right\rangle = \operatorname{sgn}\left(\det\left(a_\beta^\alpha\right)\right) b_{\alpha\beta} a_i^\alpha a_j^\beta.$$

设 $G = (g_{\alpha\beta})_{\alpha\beta}, \widetilde{G} = (\widetilde{g}_{ij})_{ij}, A = (a_{i\alpha})_{i\alpha}$，则由 $\widetilde{g}_{ij} = a_i^\alpha g_{\alpha\beta} a_j^\beta$ 可知 $\widetilde{G} = AGA^\mathsf{T}$，因此 $\widetilde{G}^{-1} = A^{-\mathsf{T}} G^{-1} A^{-1}$，从而 $G^{-1} = A^\mathsf{T} \widetilde{G}^{-1} A$，即 $g^{\alpha\beta} = \widetilde{g}^{ij} a_i^\alpha a_j^\beta$.

(2) 一方面，由曲面自然标架运动方程，

$$\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \widetilde{u}^j} = \widetilde{\Gamma}_{ij}^k \widetilde{\boldsymbol{r}}_k + \widetilde{b}_{ij}\widetilde{\boldsymbol{n}}.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \widetilde{u}^j} &= \frac{\partial}{\partial \widetilde{u}^j}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \widetilde{u}^i}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \widetilde{u}^j}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha}\right)\frac{\partial u^\alpha}{\partial \widetilde{u}^i} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha}\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \widetilde{u}^j \partial \widetilde{u}^i} \\
&= \frac{\partial u^\beta}{\partial \widetilde{u}^j}\frac{\partial}{\partial u^\beta}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha}\right)\frac{\partial u^\alpha}{\partial \widetilde{u}^i} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha}\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \widetilde{u}^j \partial \widetilde{u}^i} \\
&= a_j^\beta a_i^\alpha \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \boldsymbol{r}_\gamma + b_{\alpha\beta}\boldsymbol{n}\right) + \frac{\partial a_i^\alpha}{\partial \widetilde{u}^j}\boldsymbol{r}_\alpha \\
&= \left(\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha a_j^\beta a_i^\gamma + \frac{\partial a_i^\alpha}{\partial \widetilde{u}^j}\right)\boldsymbol{r}_\alpha + a_j^\beta a_i^\gamma b_{\gamma\beta}\boldsymbol{n} \\
&= \left(\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha a_j^\beta a_i^\gamma + \frac{\partial a_i^\alpha}{\partial \widetilde{u}^j}\right)\widetilde{a}_\alpha^k \widetilde{\boldsymbol{r}}_k + a_j^\beta a_i^\gamma b_{\gamma\beta}\boldsymbol{n},
\end{aligned}$$

故

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha a_j^\beta a_i^\gamma \widetilde{a}_\alpha^k + \frac{\partial a_i^\alpha}{\partial \widetilde{u}^j}\widetilde{a}_\alpha^k = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma a_i^\alpha a_j^\beta \widetilde{a}_\gamma^k + \frac{\partial a_i^\alpha}{\partial \widetilde{u}^j}\widetilde{a}_\alpha^k.$$

□

第五章　曲面的内蕴几何学

§5.1　测地线、测地曲率、协变导数和平行移动

题 45 在球面 $\boldsymbol{r} = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u)$ 上，

(1) 证明：曲线的测地曲率可以表示为

$$k_g = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} - \sin u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s},$$

其中 s 是曲线 $\boldsymbol{r}(u(s), v(s))$ 的弧长参数，θ 是曲线与经线 (u 线) 的夹角；

(2) 求曲面纬圆的测地曲率.

解 (1) 由

$$\boldsymbol{r}_u = (-a\sin u\cos v, -a\sin u\sin v, a\cos u), \quad \boldsymbol{r}_v = (-a\cos u\sin v, a\cos u\cos v, 0)$$

可知

$$E=\langle \boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_u\rangle=a^2,\quad F=\langle \boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\rangle=0,\quad G=\langle \boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_v\rangle=a^2\cos^2 u.$$

因此 (u,v) 是曲面的正交参数，根据 Liouville 公式，曲线的测地曲率

$$\begin{aligned}k_g&=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta\\&=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{1}{2a\cos u}\frac{\partial\ln(a^2)}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2a}\frac{\partial\ln(a^2\cos^2u)}{\partial u}\sin\theta\\&=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}+\frac{1}{a}\frac{\partial\ln(a\cos u)}{\partial u}\sin\theta\\&=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{1}{a}\sin\theta\tan u.\end{aligned}$$

由于 s 是曲线 $\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}(u(s),v(s))$ 的弧长参数，

$$1=\langle\dot{\boldsymbol{r}}(s),\dot{\boldsymbol{r}}(s)\rangle=\left\langle\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{r}_u+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{r}_v,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{r}_u+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{r}_v\right\rangle=E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2+G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2,$$

进而

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{\langle\boldsymbol{r}_u,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{r}_u+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{r}_v\rangle}{\sqrt{E}}\right)^2=1-\left(\frac{E\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}}{\sqrt{E}}\right)^2=1-E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2=G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2,$$

即

$$\sin\theta=\sqrt{G}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=a\cos u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}.$$

将其代入测地曲率表达式中即得

$$k_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{1}{a}\cdot a\cos u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\cdot\tan u=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\sin u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}.$$

(2) 纬圆 $\boldsymbol{r}(u_0,v)$ 与经线夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，代入 (1) 证明过程中得到的公式就有

$$k_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{1}{a}\tan u_0=-\frac{1}{a}\tan u_0.$$

□

题 46 设 S 是 E^3 的曲面，$\boldsymbol{n}$ 是 S 的单位法向量场，$\boldsymbol{r}(t)$ 是曲面 S 上的正则曲线. 若 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}(t)$ 是沿曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的曲面的单位切向量场，θ 是 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的夹角，证明：

$$\left\langle\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t},\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{w}\right\rangle-\left\langle\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t},\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{v}\right\rangle=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

证明 由混合积的轮换对称性，

$$\begin{aligned}&\left\langle\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t},\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{w}\right\rangle-\left\langle\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t},\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{v}\right\rangle\\=&\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{w}\right)-\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{v}\right)\\=&\left(\boldsymbol{n},\boldsymbol{w},\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t}\right)-\left(\boldsymbol{n},\boldsymbol{v},\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)\\=&\left\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{w}\wedge\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t}\right\rangle-\left\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{v}\wedge\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right\rangle\\=&\left\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{w}\wedge\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t}-\left\langle\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t},\boldsymbol{n}\right\rangle\boldsymbol{n}\right)\right\rangle-\left\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{v}\wedge\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}-\left\langle\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t},\boldsymbol{n}\right\rangle\boldsymbol{n}\right)\right\rangle\end{aligned}$$

$$= \left\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{w} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{v} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \right\rangle.$$

由于 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 是沿曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的曲面的单位切向量场，可取 $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{e}_1$，则 $\boldsymbol{w} = \cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \boldsymbol{e}_2$. 由

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t} = -\sin\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}t} + \cos\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_2 + \sin\theta \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2}{\mathrm{d}t}$$

得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t} = & \cos^2\theta \boldsymbol{e}_1 \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}t} + \cos^2\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n} + \sin\theta\cos\theta \boldsymbol{e}_1 \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2}{\mathrm{d}t} + \sin^2\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n} \\ & + \sin\theta\cos\theta \boldsymbol{e}_2 \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}t} + \sin^2\theta \boldsymbol{e}_2 \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

又

$$\boldsymbol{v} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{e}_1 \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}t},$$

所以

$$\boldsymbol{w} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{v} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \sin^2\theta \left(\boldsymbol{e}_2 \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{e}_1 \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}t} \right) + \sin\theta\cos\theta \left(\boldsymbol{e}_1 \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{e}_2 \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n}.$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{e}_1) = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}t} \wedge \boldsymbol{e}_1}_{\text{与 } \boldsymbol{n} \text{ 平行}} + \underbrace{\boldsymbol{n} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}t}}_{\text{与 } \boldsymbol{e}_1 \text{ 平行}},$$

因此若设

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}t} = a\boldsymbol{e}_2 + b\boldsymbol{n},$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}t} \wedge \boldsymbol{e}_1 + a\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{e}_2 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}t} \wedge \boldsymbol{e}_1 - a\boldsymbol{e}_1,$$

故可设

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2}{\mathrm{d}t} = -a\boldsymbol{e}_1 + c\boldsymbol{n}.$$

于是

$$\boldsymbol{w} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{v} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \sin^2\theta \left(a\boldsymbol{n} + c\boldsymbol{e}_1 - a\boldsymbol{n} + b\boldsymbol{e}_2 \right) + \sin\theta\cos\theta \left(-c\boldsymbol{e}_2 + b\boldsymbol{e}_1 \right) + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n},$$

从而

$$\left\langle \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{w} \right\rangle - \left\langle \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{v} \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{w} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{v} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{n}, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n} \right\rangle = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

□

题 47 设曲线 C 是旋转曲面 $\boldsymbol{r}(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$ 上的一条测地线，θ 是曲线 C 与经线的夹角，证明：沿 C 有 $f(u)\sin\theta =$ 常数.

证明 由曲面是旋转曲面可不妨设 $f(u) > 0$. 设 s 是曲线 C 的弧长参数. 由

$$\boldsymbol{r}_u = (f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u)), \quad \boldsymbol{r}_v = (-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0)$$

可知

$$E = \langle \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_u \rangle = (f'(u))^2 + (g'(u))^2, \quad F = \langle \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v \rangle = 0, \quad G = \langle \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_v \rangle = (f(u))^2.$$

因此 (u,v) 是曲面的正交参数，根据 Liouville 公式，测地线 C 满足

$$0=k_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta,$$

即

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}&=\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta-\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta=-\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta\\&=-\frac{1}{\sqrt{\left(f'(u)\right)^2+\left(g'(u)\right)^2}}\frac{\partial\ln f(u)}{\partial u}\sin\theta=-\frac{f'(u)}{f(u)\sqrt{\left(f'(u)\right)^2+\left(g'(u)\right)^2}}\sin\theta.\end{aligned}$$

又 $\cos\theta=\sqrt{E}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}$，于是沿曲线 C 有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(f(u)\sin\theta\right)&=f'(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\sin\theta+f(u)\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\\&=f'(u)\cdot\frac{\cos\theta}{\sqrt{\left(f'(u)\right)^2+\left(g'(u)\right)^2}}\cdot\sin\theta+f(u)\cos\theta\left(-\frac{f'(u)}{f(u)\sqrt{\left(f'(u)\right)^2+\left(g'(u)\right)^2}}\sin\theta\right)\\&=0,\end{aligned}$$

即沿曲线 C 有 $f(u)\sin\theta=$ 常数. □

§5.2　法坐标系、Gauss 引理、测地线局部最短性、常 Gauss 曲率曲面

题 48 设曲面的第一基本形式为 $\mathrm{I}=\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u+G(u,v)\,\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v$，且 $G(0,v)=1$，$G_u(0,v)=0$，证明：

$$G(u,v)=1-u^2K(0,v)+o\left(u^2\right).$$

证明 设曲面参数化为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$. 取正交活动标架 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{e}_2=\dfrac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}}$，则 $\omega^1=\mathrm{d}u,\omega^2=\sqrt{G}\,\mathrm{d}v$. 由

$$\mathrm{d}\omega^1=\mathrm{d}^2u=0,\quad \mathrm{d}\omega^2=\mathrm{d}\left(\sqrt{G}\,\mathrm{d}v\right)=\left(\sqrt{G}\right)_u\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=\frac{\left(\sqrt{G}\right)_u}{\sqrt{G}}\,\omega^1\wedge\omega^2$$

可知

$$\omega_1^2=\frac{\left(\sqrt{G}\right)_u}{\sqrt{G}}\,\omega^2=\left(\sqrt{G}\right)_u\mathrm{d}v.$$

因此

$$\mathrm{d}\omega_1^2=\left(\sqrt{G}\right)_{uu}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=\frac{\left(\sqrt{G}\right)_{uu}}{\sqrt{G}}\,\omega^1\wedge\omega^2.$$

故 Gauss 曲率

$$K=-\frac{\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}=-\frac{\left(\sqrt{G}\right)_{uu}}{\sqrt{G}}.$$

由 $\left(\sqrt{G}\right)_u=\dfrac{G_u}{2\sqrt{G}}$ 得 $G_u=2\sqrt{G}\left(\sqrt{G}\right)_u$，进而

$$G_{uu}=\frac{\partial}{\partial u}\left(2\sqrt{G}\left(\sqrt{G}\right)_u\right)=2\left[\left(\sqrt{G}\right)_u\right]^2+2\sqrt{G}\left(\sqrt{G}\right)_{uu}=\frac{G_u^2}{2G}-2KG.$$

于是

$$G_{uu}(0,v)=\frac{\left(G_u(0,v)\right)^2}{2G(0,v)}-2K(0,v)G(0,v)=-2K(0,v).$$

对每一个固定的 v，将 $G(u,v)$ 在 $u=0$ 处作 Taylor 展开，

$$G(u,v)=G(0,v)+uG_u(0,v)+\frac{u^2}{2}G_{uu}(0,v)+o\left(u^2\right)=1-u^2K(0,v)+o\left(u^2\right).$$

□

题 49 证明：在常 Gauss 曲率曲面上，测地圆具有常测地曲率.

证明 设以曲面上一点 p 为中心的测地极坐标系参数为 (ρ,θ). 设测地圆为 $\boldsymbol{c}(s)=\boldsymbol{r}(\rho_0,\theta(s))$，其中 s 为弧长参数. 注意到测地圆与 ρ-曲线夹角始终为 $\frac{\pi}{2}$.

① 若 $K\equiv 0$，则 $\mathrm{I}=\mathrm{d}\rho\otimes\mathrm{d}\rho+\rho^2\,\mathrm{d}\theta\otimes\mathrm{d}\theta$. 由 Liouville 公式，

$$k_g=\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial\rho}=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\left(\rho^2\right)}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=\rho_0}=\frac{1}{\rho_0}.$$

② 若 $K\equiv\frac{1}{a^2}>0\ (a>0)$，则 $\mathrm{I}=\mathrm{d}\rho\otimes\mathrm{d}\rho+a^2\sin^2\frac{\rho}{a}\,\mathrm{d}\theta\otimes\mathrm{d}\theta$. 由 Liouville 公式，

$$k_g=\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial\rho}=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\left(a^2\sin^2\frac{\rho}{a}\right)}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=\rho_0}=\frac{1}{a}\cot\frac{\rho_0}{a}.$$

③ 若 $K\equiv-\frac{1}{a^2}<0\ (a>0)$，则 $\mathrm{I}=\mathrm{d}\rho\otimes\mathrm{d}\rho+a^2\sinh^2\frac{\rho}{a}\,\mathrm{d}\theta\otimes\mathrm{d}\theta$. 由 Liouville 公式，

$$k_g=\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial\rho}=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\left(a^2\sinh^2\frac{\rho}{a}\right)}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=\rho_0}=\frac{1}{a}\coth\frac{\rho_0}{a}.$$

□

题 50 (测地平行坐标系的 Gauss 引理) 设 C 为曲面 M 上的一条曲线，过 C 上每一点取与之正交的测地线，得一族测地线，连接这族测地线在 C 同一侧到与 C 相交点弧长相等的点所得曲线与这族测地线正交.

证明 取曲线 C 的弧长参数 v，不妨设 $p\in C$ 使 $C(0)=p$. 再取每一条测地线的弧长参数 u，使得曲线 C 恰满足 $u=0$. 这就得到 p 点附近曲面的一个参数化 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$. 由于这族测地线与 $C(v)$ 正交，

$$F(0,v)=\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\rangle|_{u=0}=0.$$

又

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\rangle=\langle\boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{r}_v\rangle+\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_{vu}\rangle,$$

注意到 $\boldsymbol{r}_{uu}$ 为 u-曲线的曲率向量，由 u-曲线是测地线可知 $\boldsymbol{r}_{uu}$ 在 p 点处曲面切平面投影为 0，从而 $\langle\boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{r}_v\rangle=0$；而

$$\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_{uu}\rangle=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_u\rangle=0,$$

因此 $\frac{\partial F}{\partial u}=0$，$F\equiv F(0,v)=0$. □

第六章 微分流形基础

§6.1 抽象曲面

题 51 对于集合 $\mathbb{S}^2:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1\right\}$，令 $U_1=\mathbb{S}^2\setminus\{(0,0,1)\}$，$\phi_1$ 为从 $(0,0,1)$ 点出发的球极投影；$U_2=\mathbb{S}^2\setminus\{(0,0,-1)\}$，$\phi_2$ 为从 $(0,0,-1)$ 点出发的球极投影.

(1) 证明：$\{(U_1,\phi_1),(U_2,\phi_2)\}$ 是 $\mathbb{S}^2$ 的一个 $\mathcal{C}^\infty$-坐标图册.

(2) 令 $U_0=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z>0\}$. 定义映射

$$\phi_0: U_0\to\mathbb{R}^2,\quad (x,y,z)\mapsto(x,y).$$

证明：坐标卡 (U_0,ϕ_0) 含在包括 $(U_1,\phi_1),(U_2,\phi_2)$ 的最大 $\mathcal{C}^\infty$-坐标图册里.

证明 (1) 由

$$\phi_1: U_1\to\mathbb{R}^2,\quad (x,y,z)\mapsto\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right),$$
$$\phi_2: U_2\to\mathbb{R}^2,\quad (x,y,z)\mapsto\left(\frac{x}{1+z},\frac{y}{1+z}\right)$$

以及它们的逆映射

$$\phi_1^{-1}:\mathbb{R}^2\to U_1,\quad (u,v)\mapsto\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\frac{2v}{u^2+v^2+1},\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$$
$$\phi_2^{-1}:\mathbb{R}^2\to U_2,\quad (u,v)\mapsto\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\frac{2v}{u^2+v^2+1},\frac{1-u^2-v^2}{u^2+v^2+1}\right)$$

均连续可知 ϕ_1,ϕ_2 均为微分同胚，而 $U_1\cup U_2=\mathbb{S}^2$，因此 $\{(U_1,\phi_1),(U_2,\phi_2)\}$ 是 $\mathbb{S}^2$ 的一个坐标图册. 又

$$\phi_2\circ\phi_1^{-1}:\phi_1(U_1\cap U_2)\to\phi_2(U_1\cap U_2),\quad (u,v)\mapsto\left(\frac{u}{u^2+v^2},\frac{v}{u^2+v^2}\right)$$
$$\phi_1\circ\phi_2^{-1}:\phi_2(U_1\cap U_2)\to\phi_1(U_1\cap U_2),\quad (u,v)\mapsto\left(\frac{u}{u^2+v^2},\frac{v}{u^2+v^2}\right)$$

均光滑，坐标卡 (U_1,ϕ_1) 与 (U_2,ϕ_2) 是 $\mathcal{C}^\infty$-相容的. 故 $\{(U_1,\phi_1),(U_2,\phi_2)\}$ 是 $\mathbb{S}^2$ 的一个 $\mathcal{C}^\infty$-坐标图册.

(2) 由

$$\phi_0: U_0\to\mathbb{R}^2,\quad (x,y,z)\mapsto(x,y),$$
$$\phi_0^{-1}:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}\to U_0,\quad (x,y)\mapsto\left(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\right)$$

均连续可知 ϕ_0 为微分同胚. 又

$$\phi_1\circ\phi_0^{-1}:\phi_0(U_0\cap U_1)\to\phi_1(U_0\cap U_1),\quad (u,v)\mapsto\left(\frac{u}{1-\sqrt{1-u^2-v^2}},\frac{v}{1-\sqrt{1-u^2-v^2}}\right),$$
$$\phi_2\circ\phi_0^{-1}:\phi_0(U_0\cap U_2)\to\phi_2(U_0\cap U_2),\quad (u,v)\mapsto\left(\frac{u}{1+\sqrt{1-u^2-v^2}},\frac{v}{1+\sqrt{1-u^2-v^2}}\right),$$
$$\phi_0\circ\phi_1^{-1}:\phi_1(U_0\cap U_1)\to\phi_0(U_0\cap U_1),\quad (u,v)\mapsto\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\frac{2v}{u^2+v^2+1}\right),$$
$$\phi_0\circ\phi_2^{-1}:\phi_2(U_0\cap U_2)\to\phi_0(U_0\cap U_2),\quad (u,v)\mapsto\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\frac{2v}{u^2+v^2+1}\right)$$

均光滑可知 (U_0,ϕ_0) 与 $(U_1,\phi_1),(U_2,\phi_2)$ 均 $\mathcal{C}^\infty$-相容，即 (U_0,ϕ_0) 含在包括 $(U_1,\phi_1),(U_2,\phi_2)$ 的最大 $\mathcal{C}^\infty$-坐标图册里. □

题 52 设 M 为一抽象光滑曲面，A 为一集合，$f: M\to A$ 为一个双射.

(1) 证明：存在唯一方式使 A 成为抽象光滑流形且 f 是微分同胚.

(2) 利用 (1)，说明集合 $\{\mathbb{R}$ 中所有有限闭区间$\}$ 有抽象光滑曲面结构.

证明 (1) 取 $\{(U_\lambda,\phi_\lambda)\mid\lambda\in\Lambda\}$ 为 M 的极大 $\mathcal{C}^\infty$-坐标图册. 我们断言 $\left\{\left(f(U_\lambda),\phi_\lambda\circ f^{-1}\right)\mid\lambda\in\Lambda\right\}$ 为 A 的极大 $\mathcal{C}^\infty$-坐标图册，检验如下. 由 f 是双射可知 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}f(U_\lambda)=A$. 再由 $\{(U_\lambda,\phi_\lambda)\mid\lambda\in\Lambda\}$ 为 M 的 $\mathcal{C}^\infty$-坐标图册可知

$$\left(\phi_{\lambda_1}\circ f^{-1}\right)\circ\left(\phi_{\lambda_2}\circ f^{-1}\right)^{-1}=\phi_{\lambda_1}\circ\phi_{\lambda_2}^{-1}\ \text{光滑},\quad\forall\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda,$$

即 $\{(U_\lambda,\phi_\lambda)\lambda\in\Lambda\}$ 是 $\mathcal{C}^\infty$-相容的. 而对任意与该坐标图册相容的坐标卡 $\left(f(U),\phi\circ f^{-1}\right)$，我们有 $\phi\circ\phi_\lambda^{-1}$ 与 $\phi_\lambda\circ\phi^{-1}$ 均光滑，$\forall\lambda\in\Lambda$，即 (U,ϕ) 与坐标图册 $\{(U_\lambda,\phi_\lambda)\mid\lambda\in\Lambda\}$ 是 $\mathcal{C}^\infty$-相容的. 再由坐标图册 $\{(U_\lambda,\phi_\lambda)\mid\lambda\in\Lambda\}$ 的极大性可知存在 $\lambda_0\in\Lambda$ 使得 $(U,\phi)=(U_0,\phi_0)$，进而 $\left(f(U),\phi\circ f^{-1}\right)=\left(f(U_0),\phi_0\circ f^{-1}\right)$. 故 $\left\{\left(f(U_\lambda),\phi_\lambda\circ f^{-1}\right)\mid\lambda\in\Lambda\right\}$ 为 A 的极大 $\mathcal{C}^\infty$-坐标图册. 又因为当 $f:M\to A$ 是微分同胚时，A 上的拓扑结构是唯一确定的，所以 A 上的光滑结构是唯一的.

(2) 定义映射

$$g:\{\mathbb{R}\ \text{中所有有限闭区间}\}\to\mathbb{R}^2,\quad[x,y]\mapsto(x,y),$$

则 $\mathrm{Im}(g)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x<y\right\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中开集,显然是光滑流形. 因为 $g^{-1}:\mathrm{Im}(g)\to\{\mathbb{R}\ \text{中所有有限闭区间}\}$ 为双射，由 (1) 知 $\{\mathbb{R}$ 中所有有限闭区间$\}$ 有抽象光滑曲面结构. □

题 53 设 $\mathbb{S}^2$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中单位球面，$\mathbb{RP}^2$ 为实射影平面. 定义映射

$$f:\mathbb{S}^2\to\mathbb{RP}^2,\quad p\mapsto\{-p,p\}.$$

证明：f 的秩为 2.

证明 记 $U_i=\left\{\left(x^1:x^2:x^3\right)\in\mathbb{RP}^2\mid x^i\neq0\right\}$，$i=1,2,3$. 定义坐标映射

$$\begin{aligned}
\phi_1:U_1\to\mathbb{R}^2,&\quad\left(x^1:x^2:x^3\right)\mapsto\left(\frac{x^2}{x^1},\frac{x^3}{x^1}\right),\\
\phi_2:U_2\to\mathbb{R}^2,&\quad\left(x^1:x^2:x^3\right)\mapsto\left(\frac{x^3}{x^2},\frac{x^1}{x^2}\right),\\
\phi_3:U_3\to\mathbb{R}^2,&\quad\left(x^1:x^2:x^3\right)\mapsto\left(\frac{x^1}{x^3},\frac{x^2}{x^3}\right).
\end{aligned}$$

则 $\{(U_i,\phi_i)\mid i=1,2,3\}$ 是 $\mathbb{RP}^2$ 的一个坐标图册.

记 $V_{i_+}=\left\{\left(x^1,x^2,x^3\right)\mid x^i>0\right\},V_{i_-}=\left\{\left(x^1,x^2,x^3\right)\mid x^i<0\right\}$，$i=1,2,3$. 定义坐标映射

$$\begin{aligned}
\psi_{1_+}:V_{1_+}\to\mathbb{R}^2,&\quad\left(x^1,x^2,x^3\right)\mapsto\left(x^2,x^3\right),\\
\psi_{1_-}:V_{1_-}\to\mathbb{R}^2,&\quad\left(x^1,x^2,x^3\right)\mapsto\left(x^2,x^3\right),
\end{aligned}$$

其余映射 $\psi_{2_+},\psi_{2_-},\psi_{3_+},\psi_{3_-}$ 类似定义. 则 $\left\{(V_{i_+},\psi_{i_+}),(V_{i_-},\psi_{i_-})\mid i=1,2,3\right\}$ 是 $\mathbb{S}^2$ 的一个坐标图册.

由 $\phi_1\circ f\circ\psi_{1_+}^{-1}:(x,y)\mapsto\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$ 可知其 Jacobi 行列式

$$\det\begin{pmatrix}\dfrac{1-y^2}{(1-x^2-y^2)^{\frac32}}&\dfrac{xy}{(1-x^2-y^2)^{\frac32}}\\\dfrac{xy}{(1-x^2-y^2)^{\frac32}}&\dfrac{1-x^2}{(1-x^2-y^2)^{\frac32}}\end{pmatrix}=\frac{1}{\left(1-x^2-y^2\right)^2}>0$$

同理可得其他复合映射的 Jacobi 行列式不为 0，因此 f 的秩为 2. □

题 54 设 M 为一抽象光滑曲面，C_1, C_2 为 M 上两个不相交闭集. 证明：存在光滑函数 $f: M \to \mathbb{R}$ 使

$$f(p) = \begin{cases} 1, & p \in C_1, \\ 0, & p \in C_2, \end{cases} \quad \forall p \in M.$$

证明 由 M 的底空间的正规性知存在 U_1, U_2 使得 $C_1 \subset U_1, C_2 \subset U_2$ 且 $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. 下证存在函数 f 满足 $f|_{C_1} \equiv 1$ 且 $\overline{\operatorname{supp} f} \subset U_1$. 设 $V_1 = U_1, V_2 = M \setminus C_1$，并设 ψ_1, ψ_2 分别为从属于 V_1, V_2 的单位分解. 由 $\psi_1|_{C_1} \equiv 0$ 及 $\psi_1 + \psi_2 \equiv 1$ 可知 $\psi_2|_{C_1} \equiv 1, \psi_2|_{M \setminus U_1} \equiv 0$. 故 f 满足要求. □

题 55 考虑映射

$$f: \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^6, \quad (x, y, z) \mapsto \left(x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}zx, \sqrt{2}xy\right).$$

试判断 f 是否为浸入或嵌入.

解 f 的 Jacobi 矩阵为 $\begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}z & \sqrt{2}y \\ 0 & 2y & 0 & \sqrt{2}z & 0 & \sqrt{2}x \\ 0 & 0 & 2z & \sqrt{2}y & \sqrt{2}x & 0 \end{pmatrix}$. 由于 $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$，不妨设 $x \neq 0$，则由子式 $\begin{vmatrix} 2x & \sqrt{2}z & \sqrt{2}y \\ 0 & 0 & \sqrt{2}x \\ 0 & \sqrt{2}x & 0 \end{vmatrix} = -4x^3 \neq 0$ 可知该 Jacobi 矩阵行满秩，同理可得其他情形下也是如此. 故 $\operatorname{rank} f = 3$，$f$ 为浸入. 由于 $\mathbb{S}^2$ 是紧集，f 为嵌入当且仅当 f 为单射，但 $f(x, y, z) = f(-x, -y, -z)$，$f$ 非单射，故 f 非嵌入. □

§6.2　切空间、流形上的微分形式、Riemann 度量

题 56 验证外微分 d 的如下性质：对任意 $f, g \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M), \omega \in \Omega^1(M)$，有

$$\mathrm{d}(fg) = g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g, \quad \mathrm{d}(f\omega) = \mathrm{d}f \wedge \omega + f\,\mathrm{d}\omega.$$

证明 ① 由定义，对任意 $p \in M$ 与 $v_p \in T_pM$，有

$$\mathrm{d}(fg)(v_p) = v_p(fg) = g(p)v_p(f) + f(p)v_p(g) = g(p)\,\mathrm{d}f(v_p) + f(p)\,\mathrm{d}g(v_p),$$

即 $\mathrm{d}(fg) = g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g$.

② 由于外微分 d 是线性的，不妨设 $\omega = g\,\mathrm{d}x^1$，则

$$\mathrm{d}(f\omega) = \mathrm{d}\left(fg\,\mathrm{d}x^1\right) = \partial_{x^2}(fg)\,\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^1 = g\partial_{x^2}f\,\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^1 + f\partial_{x^2}g\,\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^1 = \mathrm{d}f \wedge \omega + f\,\mathrm{d}\omega.$$

□

题 57 设 M 为一抽象光滑曲面. 若存在坐标图册 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 覆盖 M，且对任一 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$，有

$$\mathrm{D}_{\alpha\beta}(p) := \det\left(\mathrm{d}\left(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}\left(\phi_\beta(p)\right)\right)\right) > 0,$$

证明：M 上存在处处非零连续 2-形式 ω.

证明 设 $\{f_\alpha\}$ 为从属于 $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}$ 的单位分解，构造如下 2-形式：

$$\omega := \sum_\alpha f_\alpha \omega^\alpha.$$

则对任一 $p\in M$，上述求和为有限和，且

$$\omega(p) := \sum_\alpha f_\alpha(p)\omega^\alpha(p) = \sum_{\alpha\in S} f_\alpha(p)\omega^\alpha(p),$$

其中 $S=\{\alpha \mid p\in \operatorname{supp} f_\alpha\}$. 进一步有

$$\omega(p) := \left(\sum_{\alpha\in S} f_\alpha(p)\mathrm{D}_{\alpha\alpha_0}(p)\right)\omega^{\alpha_0}(p),$$

其中 $\alpha_0\in S$ 是一固定指标. 观察到 $f_\alpha\geqslant 0, \sum\limits_{\alpha\in S} f_\alpha(p)=1, \mathrm{D}_{\alpha\alpha_0}(p)>0$，于是 $\omega(p)\neq 0$，即 ω 是 M 上的处处非零的连续 2-形式. □

题 58 设 M 为一抽象光滑曲面，g 为 M 的一个 Riemann 度量. 对任意 $p\in M, v_p, w_p\in T_pM$，记其张成平行四边形的面积

$$\operatorname{Area}(v_p,w_p)=\sqrt{g(v_p,v_p)\,g(w_p,w_p)-g(v_p,w_p)^2}.$$

M 上的光滑 2-形式 $\omega\in\Omega^2(M)$ 若满足

$$\omega(v_p,w_p)=\operatorname{Area}(v_p,w_p)\text{ 或 }-\operatorname{Area}(v_p,w_p),\quad \forall p\in M,\ \forall v_p,w_p\in T_pM,$$

则称其为 M 上一个面积形式. 证明：M 可定向当且仅当 M 上存在一个面积形式.

证明 $\Leftarrow$：若 M 上存在一个面积形式 ω，则 ω 是一个处处非零的光滑 2-形式，从而 M 可定向.

$\Rightarrow$：若 M 可定向，设 ω 为 M 上的处处非零的光滑 2-形式. 对任意 $p\in M$，取 $\{e_1,e_2\}$ 为 T_pM 的一组标准正交基且 $\omega(e_1,e_2)>0$. 令 $\omega_p=e_1^*\wedge e_2^*$，则对任意 $v_p,w_p\in T_pM$，

$$\begin{aligned}
\omega_p(v_p,w_p)^2 &= \left[e_1^*(v_p)e_2^*(w_p)-e_2^*(v_p)e_1^*(w_p)\right]^2\\
&= e_1^*(v_p)^2e_2^*(w_p)^2+e_2^*(v_p)^2e_1^*(w_p)^2-2e_1^*(v_p)e_2^*(v_p)e_1^*(w_p)e_2^*(w_p)\\
&= \left[e_1^*(v_p)^2+e_2^*(v_p)^2\right]\left[e_1^*(w_p)^2+e_2^*(w_p)^2\right]-\left[e_1^*(v_p)e_1^*(w_p)+e_2^*(v_p)e_2^*(w_p)\right]^2\\
&= g(v_p,v_p)\,g(w_p,w_p)-g(v_p,w_p)^2\\
&= \operatorname{Area}(v_p,w_p)^2.
\end{aligned}$$

只需再验证 p 处 ω_p 的上述定义不依赖于满足条件的 $\{e_1,e_2\}$ 的选取. 若 $\{\overline{e}_1,\overline{e}_2\}$ 是 T_pM 的另一组标准正交基，且 $\omega(\overline{e}_1,\overline{e}_2)>0$，则存在 $\theta\in[0,2\pi)$ 与 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，使得 $(\overline{e}_1,\overline{e}_2)=(e_1,e_2)A$，从而 $(\overline{e}_1^*,\overline{e}_2^*)=(e_1^*,e_2^*)A$. 于是 $\overline{\omega}_p:=\overline{e}_1^*\wedge\overline{e}_2^*=\det(A)e_1^*\wedge e_2^*=e_1^*\wedge e_2^*=\omega_p$. 由 e_1,e_2 选取的光滑性可得 ω_p 的光滑性，因此它是 M 上的面积形式. □

第七章　整体微分几何

§7.1　度量完备曲面、Hilbert 定理

题 59 设 M 是 E^3 中的一个紧致曲面，φ,H,K 为 M 的支撑函数、平均曲率函数、Gauss 曲率函数，$\boldsymbol{n}$ 为单位法向量场.

(1) 证明：$\int_M \mathrm{d}V = \int_M H\varphi\,\mathrm{d}V$. (提示：考察 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\mathrm{d}\boldsymbol{r})$)

(2) 证明：$\int_M \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}V = \boldsymbol{0}$. (提示：对任意常向量 $\boldsymbol{a}$，考察 $(\boldsymbol{r},\mathrm{d}r,\boldsymbol{a})$)

(3) 证明：$\int_M H\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}V = \boldsymbol{0}$. (提示：对任意常向量 $\boldsymbol{a}$，考察 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\boldsymbol{a})$)

(4) 证明：$\int_M K\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}V = \boldsymbol{0}$. (提示：对任意常向量 $\boldsymbol{a}$，考察 $(\boldsymbol{n},\mathrm{d}\boldsymbol{n},\boldsymbol{a})$)

A 附录

§1.1 曲面的联络形式

方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega_2^1, \\ \mathrm{d}\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2 \end{cases}$$

唯一确定了曲面的联络形式

$$\omega_1^2 = \frac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2}\,\omega^1 + \frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2}\,\omega^2.$$

由此可算 Gauss 曲率

$$K = -\frac{\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1 \wedge \omega^2}.$$

例 A.1.1 用活动幺正标架法计算下列第一基本形式的 Gauss 曲率：

(1) $\mathrm{I} = \frac{4}{\left(1-u^2-v^2\right)^2}\left(\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u + \mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v\right)$. 【$-1$】

(2) $\mathrm{I} = \frac{1}{v^2}\left(\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u + \mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v\right)$. 【$-1$】

(3) $\mathrm{I} = \frac{1}{4\left(u-v^2\right)}\left(\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u - 4v\,\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}v + 4u\,\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v\right)$. 【0】

§1.2 两个基本形式

$$\mathrm{I} = \omega^1\otimes\omega^1 + \omega^2\otimes\omega^2,$$

$$\mathrm{II} = \omega^1\otimes\omega_1^3 + \omega^2\otimes\omega_2^3.$$