Markov 链

M/G/1 系统 Example 4.1(A) X_n = 第n位顾客离开时系统滞留顾客数.

G/M/1 系统 Example 4.1(B) X_n = 第n位顾客到达时前面顾客数.

简单随机游走的绝对值 Example 4.1(D) $|S_n|$ = 时刻n与原点距离.

对 $i\neq 0$, $P(S_n=i \mid |S_n|=i, |S_{n-1}|=i_{n-1},\cdots,|S_1|=i_1)=\frac{p^i}{p^i+q^i}$.

Chapman-Kolmogorov 方程: $P_{ij}^{m+n}=\sum_{k=0}^{\infty}P_{ik}^{n}P_{kj}^{m}$, 即 $\mathbb{P}^{(m+n)}=\mathbb{P}^{(m)}\mathbb{P}^{(n)}$.

周期是类性: 若 $i\leftrightarrow j$, 则 $d(i)=d(j)$.

$N_k(n)=\#\{\nu: X_\nu=k, 1\le\nu\le n\}$ 表示前n步状态转移访问状态k的次数.

$f_{jk}=P(N_k(\infty)>0 \mid X_0=j)$ 从j出发, 最终能访问k的概率.

$g_{jk}=P(N_k(\infty)=\infty \mid X_0=j)$ 从j出发, 能无穷次访问k的概率.

$f_{jk}^{0}=0, \forall j,k$. $f_{jk}^{n}=P(X_n=k, X_\nu\neq k, \nu=1,\cdots,n-1 \mid X_0=j)$, $n\ge 1$, 从j出发经n步首达k.

$f_{jk}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{jk}^{n}$, $\quad P_{jk}^{n}=\sum_{m=1}^{n}f_{jk}^{m}P_{kk}^{n-m}$, $\quad \forall j,k$.

$g_{jk}=f_{jk}g_{kk}$, $\quad g_{kk}=\lim_{n\to\infty}(f_{kk})^n$.

g_{kk}: 0-1律. $g_{kk}=1 \Leftrightarrow \overset{\text{常返}}{f_{kk}=1}$, $g_{kk}=0\Leftrightarrow \overset{\text{滑过}}{f_{kk}<1}$.

有限状态MC所有状态不可能都是滑过的, 必有常返态.

常返/滑过如何用转移概率矩阵描述?

$f_{kk}=1\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}P_{kk}^{n}=\infty$ $\qquad f_{kk}<1\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}P_{kk}^{n}<\infty$ (注意 P_{kk}^{n} 的含义)

常返性/非常返性是类性. 例如 Example 4.2(A) 对简单随机游走, 由于任意两状态互达, 只需考虑原点, 即分析 $\sum_{n=1}^{\infty}P_{00}^{n}$ 的敛散性. 只有对称简单随机游走常返.

设 $k\neq j$, $k\to j$ 且 $f_{kk}=1$, 则 $j\leftrightarrow k$ 且 $f_{jk}=1$.

常返类一定是闭的; 闭的非常返类一定含有无穷多个状态.

$\begin{cases}\text{闭的常返类}\\ \text{闭的非常返类}\\ \text{非闭的非常返类}\end{cases}$

设C为一个闭类, $k\in C$, 则C为常返类 $\Leftrightarrow f_{jk}=1, \forall j\in C, j\neq k$.

若j为滑过态, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}P_{ij}^{n}<\infty, \forall i$. 从而 $P_{ij}^{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$.

T_{jj} = 从j出发, 首次返回j所需步数.

$\mu_{jj}=E[T_{jj}]=\begin{cases}\infty, & j\text{为非常返态}\\ \sum_{n=1}^{\infty}nf_{jj}^{n}, & j\text{为常返态}\end{cases}$ $\begin{cases}\mu_{jj}<\infty: \text{正常返}\\ \mu_{jj}=\infty: \text{零常返}\end{cases}$

称j为遍历的, 若j为正常返且非周期.

$\lim\limits_{n\to\infty} P_{jj}^{nd(j)} \Rightarrow \begin{cases} >0: 正常返 \\ =0: 零常返 \end{cases}$

设 $i\leftrightarrow j$，则

- $P(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_j(n)}{n}=\frac{1}{\mu_{jj}}|X_0=i)=1$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}P_{ij}^{k}=\frac{1}{\mu_{jj}}$
- 若j非周期，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}^{n}=\frac{1}{\mu_{jj}}$
- 若j周期d，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{jj}^{nd}=\frac{d}{\mu_{jj}}$. 不能换成ij

正/零常返性为类性.

$(\pi_0,\pi_1,\cdots)\mathbb{P}=(\pi_0,\pi_1,\cdots)$

一个pmf $\{\pi_i,i\geq0\}$ 称为MC $\{X_n,n\geq0\}$ 的平稳分布，若 $\pi_j=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\pi_iP_{ij},\forall j$.

设 $X_0\sim$平稳分布$\{\pi_i,i\geq0\}$，则 $X_n\sim$平稳分布，进而 $\pi_j=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\pi_iP_{ij}^{n},\forall j$.

$\{X_n,n\geq0\}$ 为平稳过程，即联合分布$(X_n,X_{n+1},\cdots,X_{n+m})$与$n$无关.

不可约非周期MC $\begin{cases}(i)\ 所有状态滑过或零常返，P_{ij}^{n}\to0,\forall i,j，不存在平稳分布. \\ (ii)\ 所有状态正常返_{(遍历)}，\pi_j=\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}^{n}>0,\forall i,j，\{\pi_j,j\geq0\}是唯一平稳分布.\end{cases}$

注记 对于不可约、正常返（周期或非周期）MC，存在唯一的pmf $\{\pi_i\}$ 满足 $\pi_j=\sum\limits_i\pi_iP_{ij},\forall j$，$\pi_j$ 可解释为此MC在状态j的长程时间比例：

$$\pi_j=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{前n步转移访问状态j的次数\}=\frac{1}{\mu_{jj}}.$$

不可约、正常返、周期为d的MC：$\lim\limits_{n\to\infty}P_{jj}^{nd}=d\pi_j,\forall j$.

赌徒破产问题 Example 4.4(A)

$$f_i:=P(\text{MC在访问"0"之前先访问"N"}|X_0=i)=\begin{cases}\frac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-(\frac{q}{p})^N}, & 若p\neq\frac12 \\ \frac{i}{N}, & 若p=\frac12\end{cases}\xrightarrow{N\to\infty}\begin{cases}1-(\frac{q}{p})^i, & 若p>\frac12 \\ 0, & 若p\leq\frac12\end{cases}$$

$\Rightarrow$即使是公平赌博，财富也不可能趋于无穷.

应用：求从i开始赌徒达到0或n的期望赌局数（构造停时+Wald等式）

分支过程：$X_n=$第n代群体的大小$(n\geq0)$，$Z_i=$第$n-1$代第i个个体的后代数.

$X_n=\sum\limits_{i=1}^{X_{n-1}}Z_i$，若$X_0=1$，则$E[X_n]=\mu^n$.（$\mu$为每个个体后代数均值）

$\pi_0:=P(群体最终灭绝)$，则 $\pi_0=\sum\limits_{j=0}^{\infty}P(群体最终灭绝|X_1=j)\cdot p_j=\sum\limits_{j=0}^{\infty}p_j\cdot\pi_0^j$.

在$p_0>0,p_0+p_1<1$下：$\pi_0=1\Leftrightarrow\mu\leq1$.

一个不可约正常返的MC必存在平稳分布$\{\pi_i\}$. 当初始状态按平稳概率选取（即$X_0\sim\{\pi_i\}$）时，其逆向链也是MC，其转移概率 $P_{ij}^{*}=\frac{\pi_jP_{ji}}{\pi_i}$.

一个平稳MC称为时间可逆的，若 $P_{ij}^{*}=P_{ij}$ 即 $\pi_iP_{ij}=\pi_jP_{ji},\forall i,j$. 此时$(X_n,X_{n+1})\overset{d}{=}(X_{n+1},X_n)$

时间可逆的充分条件：若存在pmf $\{x_j\}$ 使得 $x_iP_{ij}=x_jP_{ji},\forall i,j$，则$\{X_n\}$时间可逆，且平稳分布为$\{x_j\}$.

(遍历简单随机游走)

满足 $P_{i,i+1}+P_{i,i-1}=1$ 的遍历链是时间可逆的. Example 4.7(A)

时间可逆 MC 满足 $(X_m, X_{m+1}, \cdots, X_{m+k}) \overset{d}{=} (X_{m+k}, \cdots, X_{m+1}, X_m)$

不可约正常返的平稳MC是时间可逆的 $\Leftrightarrow P_{i,i_1}P_{i_1,i_2}\cdots P_{i_{k-1},i_k}P_{i_k,i}=P_{i,i_k}P_{i_k,i_{k-1}}\cdots P_{i_2,i_1}P_{i_1,i}$, $\forall i,i_1,\cdots,i_k,\ k\geq 1$.

逆向链的概念在过程不是时间可逆的情形也是有用的.

考虑一个转移概率矩阵 $\mathbb{P}=(p_{ij})$ 的不可约MC. 若存在一个pmf $\{\pi_i\}$ 和一个转移概率矩阵 $\mathbb{P}^*=(p_{ij}^*)$ 使得 $\pi_i P_{ij}=\pi_j P_{ji}^*$, $\forall i,j$. 则

(i) $\{\pi_i\}$ 为原MC的一个平稳分布.

(ii) P_{ij}^* 为逆向链的转移概率.

(iii) $\{\pi_i\}$ 也为逆向链的一个平稳分布.

时间可逆性的应用 ① Example 4.7(E) ② 设 $\{X_n\}$ 是一个不可约的MC, 其平稳分布为 $\{\pi_i\}$, 设 ϕ 为一个定义于状态空间的有界函数, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\phi(X_k)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\phi(j)\pi_j$.

"有界"可改为"非负"或"$\sum \pi_i|\phi(i)|<\infty$".

设 $\{\pi_i, i\in S\}$ 为pmf, 则存在可逆不可约MC $\{X_n, n\geq 0\}$, 其状态空间为S, 且 $\{\pi_i, i\in S\}$ 为MC的平稳分布.

半马氏过程 (SMP): $\{Z(t), t\geq 0\}$, $S=\{0,1,2,\cdots\}$, 若给定当前过程处在"i".

- 下一次状态转移进入"j"的概率为 P_{ij}.
- 在已知下一步转移进入"j"的条件下, 过程滞留"i"的时间分布为 F_{ij}.

SMP不是Markov过程.

T_i = SMP在下一次状态转移之前于状态 i 滞留时间 $\sim H_i(x)=\sum\limits_j P_{ij}F_{ij}(x)$.

$\mu_i=E[T_i]$ T_{ii} = SMP相邻两次访问状态 i 的时间间隔 $\mu_{ii}=E[T_{ii}]$

设SMP不可约, 且 T_{ii} 非格子点, $\mu_{ii}<\infty$, 则 $\lim\limits_{t\to\infty}P(Z(t)=i|Z(0)=j)=\frac{\mu_i}{\mu_{ii}}$, $\forall i,j$.

引入更新酬劳过程, 取消"非格子点"限制, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{[0,t]\text{处于"}i\text{"时长}}{t}=\frac{\mu_i}{\mu_{ii}}$.

实际中如何计算极限概率?

设SMP不可约, 其嵌入Markov链 $\{X_n\}$ 正常返, $\mu_{ii}<\infty$, 则 $P_i=\lim\limits_{t\to\infty}P(Z(t)=i|Z(0)=j)=\frac{\pi_i\mu_i}{\sum_j \pi_j\mu_j}$.

$Y(t)$ = 时刻 t "剩余寿命" $S(t)$ = t 之后下一个进入的状态

设SMP不可约, T_{ii} 非格子点, $\forall i$, 且 $\mu_{ii}<\infty$, 则 $\lim\limits_{t\to\infty}P(Z(t)=i, Y(t)>x, S(t)=j|Z(0)=k)=\frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}\int_x^\infty \bar{F}_{ij}(u)du$.

$\xrightarrow{\text{对}j\text{求和}} \lim\limits_{t\to\infty}P(Z(t)=i, Y(t)>x|Z(0)=k)=\frac{1}{\mu_{ii}}\int_x^\infty \bar{H}_i(u)du=P_i\cdot\bar{H}_{i,e}(x)$

$H_{i,e}(x)=\frac{1}{\mu_i}\int_0^x \bar{H}_i(u)du$ 为 H_i 的平衡分布

特殊的SMC

连续时间Markov链 $\nu_i=\infty$ 瞬态、$\nu_i=0$ 吸收

当MC进入"i",滞留时间 $T_i\sim Exp(\nu_i)$. 与下一次转入的"j"无关(区别于SMC)

$P_{ii}=0$

T_i 与下一步转移进入的状态独立

一个连续时间MC称为规则的,若有限时间内转移次数有限.

从i到j的转移速率 $q_{ij}=\nu_i\cdot P_{ij},\ i\neq j$. 规定 $q_{ii}=-\nu_i$, 矩阵 $Q=(q_{ij})_{s\times s}$ 每行元素和为0.

$P(\text{于}(t,t+\Delta t)\text{访问状态}j\mid X(t)=i)=q_{ij}\Delta t+o(\Delta t)$

$P_{ij}(t)=P(X(t+s)=j\mid X(s)=i),\ \forall s\geq 0.$ 生灭过程Q矩阵只有3条对角线非0.

生灭过程: $q_{ij}=0,\ |i-j|>1;\ q_{i,i+1}=\lambda_i$(出生率); $q_{i,i-1}=\mu_i$(死亡率).

两指数分布随机变量取min $\Rightarrow T_i\sim Exp(\lambda_i+\mu_i)$. $\nu_i=q_{i,i+1}+q_{i,i-1}$ $P_{i,i+1}=\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}$

HPP事件分类性质 $\Rightarrow$ 处于"i"等待进入"i+1"的时间与等待进入"i-1"的时间独立.

M/M/s系统 Example 5.3(A)(i) 死亡率 $\mu_n=\mu\cdot\min\{n,s\}$, 出生率 $\lambda_n=\lambda$.

具有迁入的线性增长过程 Example 5.3(A)(ii) 该群体中每个个体以强度λ产生后代,以强度μ死亡,外部人口以强度θ进入该群体: $\lambda_n=n\lambda+\theta,\ \mu_n=n\mu$.

纯生过程: ①如HPP(λ), 出生率 $\lambda_n\equiv\lambda$. ② Yule过程: $\lambda_n=n\lambda$. T_i = 第i-1个出生到第i个出生之间的时间间隔(即从i到i+1时间) $\sim Exp(i\lambda)$

$\boxed{P(T_1+\cdots+T_n\leq t)=(1-e^{-\lambda t})^n}$, $n\geq 1\Rightarrow P_{1j}(t)=P(S_{j-1}\leq t)-P(S_j\leq t)=e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-1}$,

即 $[X(t)\mid X(0)=1]\sim Geo^*(e^{-\lambda t})\Rightarrow E[X(t)\mid X(0)=1]=e^{\lambda t}$. i个iid几何随机变量之和服从负二项分布.

前提: 一个老祖先 $P_{ij}(t)=\binom{j-1}{i-1}e^{-\lambda t i}(1-e^{-\lambda t})^{j-i}$, $j\geq i\geq 1$.

$S_n=T_1+\cdots+T_n$. $[(S_1,\cdots,S_n)\mid X(t)=n+1]\overset{d}{=}(V_{1:n},\cdots,V_{n:n})$, $V_1,\cdots,V_n\overset{iid}{\sim}$ pdf. $f(s)=\begin{cases}\frac{\lambda e^{-\lambda(t-s)}}{1-e^{-\lambda t}}, & s\in(0,t)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

时刻t群体中个体年龄之和 Example 5.3(B) $A(t)=a_0+t+\sum_{i=1}^{X(t)-1}(t-S_i)$.

流行病模型 Example 5.3(C) 感染人数出生率 $\lambda_n=n(m-n)\alpha$

Kolmogorov 向后微分方程: $P'_{ij}(t)=\sum_{k\neq i}q_{ik}P_{kj}(t)-\nu_iP_{ij}(t)$, 即 $P'(t)=QP(t)$. (后)

在一定的正则条件下(包括一切生灭过程和一切有限状态模型),有向前微分方程

$P'_{ij}(t)=\sum_{k\neq j}P_{ik}(t)q_{kj}-P_{ij}(t)\nu_j$, 即 $P'(t)=P(t)Q$.

两状态MC Example 5.4(A) 利用 $P_{00}(t)+P_{01}(t)=1$, $P_{00}(0)=1$ 初值 解ODE, 不同方程参数对称性

$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)\Rightarrow y=y_0e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_s^x p(t)dt}ds.$

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

生灭过程向前微分方程 Example 5.4(B)

$\mathbb{P}'(t)=\mathbb{P}(t)Q \Rightarrow P_{i0}'(t)=-\lambda_0 P_{i0}(t)+\mu_1 P_{i1}(t),\ i\geq 0$

$P_{ij}'(t)=\lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t)-(\lambda_j+\mu_j)P_{ij}(t)+\mu_{j+1}P_{i,j+1}(t),\ j\geq 1.$

纯生过程 $\longrightarrow$ $P_{ii}'(t)=-\lambda_i P_{ii}(t)$

Example 5.4(C) $P_{ij}'(t)=\lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t)-\lambda_j P_{ij}(t),\ j>i.$ （注意 $P_{i,i-1}(t)=0,\ \forall i$）

$$\Rightarrow\begin{cases} P_{ii}(t)=e^{-\lambda_i t} \text{（合理）} \\ P_{ij}(t)=\lambda_{j-1}e^{-\lambda_j t}\int_0^t e^{\lambda_j s}P_{i,j-1}(s)ds,\ j>i. \end{cases}$$

SMC 理论 $\Rightarrow P_j:=\lim\limits_{t\to\infty}P(X(t)=j\mid X(0)=i)=\dfrac{\frac{\pi_j}{\nu_j}}{\sum_k \frac{\pi_k}{\nu_k}}$.

如何用 $\{q_{ij}\}$ 表示 $\{P_i\}$？

$\boxed{(P_0,P_1,\cdots)Q=(0,0,\cdots)}$ 看法：向前微分方程 $\mathbb{P}'(t)=\mathbb{P}(t)Q$，$\mathbb{P}'(t)\to\mathbb{O}$.

- P_j 是长时间后过程处于"j"的时间占比.
- 若 $X(0)\sim pmf\ \{P_i\}$，则 $X(t)\sim pmf\ \{P_i\}$.
- 若 $X(0)\sim pmf\ \{P_i\}$，则 $(X(t_1+h),\cdots,X(t_n+h))$ 分布与 h 无关.

$\to P_j\nu_j=\sum_{i\neq j}P_i q_{ij}$ （离开"j"速率=进入"j"速率）

生灭过程：

状态	过程离开的速率	=	过程进入的速率
0	$P_0\lambda_0$	=	$P_1\mu_1$
1	$P_1(\lambda_1+\mu_1)$	=	$P_2\mu_2+P_0\lambda_0$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
n	$P_n(\lambda_n+\mu_n)$	=	$P_{n+1}\mu_{n+1}+P_{n-1}\lambda_{n-1}$

$$\Rightarrow\begin{cases} P_0\lambda_0=P_1\mu_1 \\ P_1\lambda_1=P_2\mu_2 \Rightarrow P_0\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}=P_n\mu_1\cdots\mu_n \\ P_n\lambda_n=P_{n+1}\mu_{n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\sum_{i=0}^{\infty}P_i=P_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1}\right)=1$$

生灭过程存在稳态分布 $\Leftrightarrow$ 此级数收敛

$\Rightarrow \boxed{P_0=\left[1+\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1}}\right]^{-1}}$，$P_1,P_2,\cdots$ 可依次求得.

M/M/1 系统 Example 5.5(A) 顾客到达 $\sim HPP(\lambda)$，服务时间 $\sim Exp(\mu)$. 则 $\lambda_n\equiv\lambda,\ \mu_n\equiv\mu$.

$\to \rho:=\frac{\lambda}{\mu}<1$，即到达率 < 服务率才存在稳态分布.

$P_n=\dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{1+\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\lambda}{\mu})^k}=(\frac{\lambda}{\mu})^n(1-\frac{\lambda}{\mu}),\ n\geq 0$，即当 $t\to\infty$ 时，$X(t)\xrightarrow{d}Geo(1-\frac{\lambda}{\mu})$.

若 $\rho=1$，不可约 MC 零常返：$P_n=0$，由 SMC 理论，$\frac{E[T_n]}{E[T_{nn}]}=0$.

应用：Example 5.5(B)

考虑一个不可约正常返MC $\{X(t),t\ge 0\}$, 假设 $X(0)$ 服从稳态分布 $\{P_i\}$, 其嵌入链的平稳分布为 $\{\pi_i\}$. 则 $\{X(t)\}$ 的逆向链也是MC.

$\{X(t)\}$ 嵌入链的逆向链也是MC, 转移概率 $P^*_{ij}=\frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i}$.

$\{X(t)\}$ 的逆向链在状态 i 滞留时间 $\tau_i^*\sim Exp(\nu_i)$.

$\{X(t),t\ge 0\}$ 称为时间可逆的, 若 $P^*_{ij}=P_{ij}$, 即 $\pi_i P_{ij}=\pi_j P_{ji}$, $\forall i,j$.

$\xrightarrow[q_{ij}=\nu_i P_{ij},\, i\neq j]{P_i\propto \frac{\pi_i}{\nu_i}}$ 时间可逆等价于 $\boxed{P_i q_{ij}=P_j q_{ji}}$ ($i\to j$ 速度 $=j\to i$ 速度) P_j 不仅是原MC的平稳概率也是逆向链的平稳概率

应用

↓遍历的生灭过程在稳态下是时间可逆的.

生灭过程

M/M/s系统的输出过程是Poisson过程: 顾客按HPP(λ)到达, 每个顾客服务时间 $\sim Exp(\mu)$, $\lambda<s\mu$, 则系统在稳态下输出过程也是HPP(λ). Corollary 5.6.2

对连续时间MC $\{X(t)\}$, 若存在pmf $\{x_i\}$ 满足 $x_j q_{ji}=x_i q_{ij}$, $\forall i,j$, 则 $\{x_i\}$ 为MC的稳态分布, 且MC为时间可逆的.

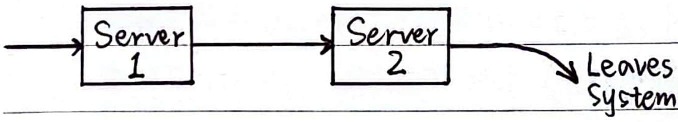
一个连续时间MC $\{X(t),t\ge 0\}$ 称为截于状态 $A\subset S$, 是指其Q-矩阵 $Q^A=(q^A_{ij})$ 满足:

$$q^A_{ij}=q_{ij},\ \forall i,j\in A;\qquad q^A_{ij}=0,\ \forall i\in A, j\notin A.$$

记上述截于A的MC为 $\{X^A(t),t\ge 0\}$. 例子: M/M/1系统限制系统人数上限

设 $\{X(t),t\ge 0\}$ 时间可逆, 稳态概率为 $\{P_i, i\in S\}$, 则 $\{X^A(t),t\ge 0\}$ 也是时间可逆的, 对应的稳态分布为 $P_i^A=\frac{P_i}{\sum_{j\in A}P_j}$, $\forall i\in A$.

$\overset{\lambda}{M}/\overset{\mu}{M}/1/N$-系统(见左页), $\lambda<\mu$, 稳态概率 $P_j=\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^j}{\sum_{k=0}^{N}(\frac{\lambda}{\mu})^k}$, $j=0,1,\cdots,N$.



串联排队系统: Server 1的输出是Poisson过程 $\Rightarrow$ Server 2面对M/M/1.

处于稳态的遍历M/M/1-排队系统
- 目前在系统中的顾客数(排队+服务)与过去离开时刻的序列独立.
- 顾客在系统中度过的时间(排队+服务)与他离开之前的离去过程独立.

处于稳态的M/M/2-串联排队系统 $\lambda<\min\{\mu_1,\mu_2\}$
- 目前在1号台和2号台的顾客数独立, $P(\#1=n,\#2=m)=(\frac{\lambda}{\mu_1})^n(1-\frac{\lambda}{\mu_1})(\frac{\lambda}{\mu_2})^m(1-\frac{\lambda}{\mu_2})$.
- 一顾客在1号台等待时间和在2号台等待时间独立. (但排队时间不独立)

排队+服务

设 $Q=(q_{ij})$ 为一个不可约MC $\{X(t)\}$ 的转移速率矩阵, 若能找到另外一个转移速率矩阵 $Q^*=(q^*_{ij})$ 及一个pmf $\{P_i\}$, 使得 $P_i q_{ij}=P_j q^*_{ji}$, $\forall i\neq j$, $\sum_{j\neq i}q_{ij}=\sum_{j\neq i}q^*_{ij}$, $\forall i$, 则 $\{X(t)\}$ 逆向链转移速率矩阵为 Q^*, $\{P_i\}$ 为正向和逆向链的稳态分布.

一致化 考虑一个特殊的MC $\{X(t)\}$，满足 $\nu_i\equiv\nu,\ \forall i$，记 $N(t)$ 为 $(0,t]$ 时段状态转移次数，则 $\{N(t)\}\sim HPP(\nu)$。于是，

$$P_{ij}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}P(X(t)=j\mid X(0)=i,N(t)=n)\cdot P(N(t)=n\mid X(0)=i)=\sum_{n=0}^{\infty}P_{ij}^{n}\frac{(\nu t)^n}{n!}e^{-\nu t}.$$

引进虚转移 设 $\{X(t)\}$ 为齐次MC，满足 $\nu_i\le\nu<\infty,\ \forall i$，则MC可等价为按如下方式进行状态转移：以速率 ν 发生状态转移，以概率 $\frac{\nu_i}{\nu}$ 转移出"i"，以概率 $1-\frac{\nu_i}{\nu}$ 发生虚转移（仍转入状态"i"）。用 P_{ij}^* 表示带有虚转移的MC的转移概率：

$$P_{ij}^*=\begin{cases}1-\frac{\nu_i}{\nu}, & j=i,\\ \frac{\nu_i}{\nu}P_{ij}, & j\ne i.\end{cases}\Rightarrow P_{ij}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_{ij}^{*n}\cdot\frac{(\nu t)^n}{n!}e^{-\nu t}.$$

应用 Example 5.8(A) 考虑 $\{0,1\}$ 两状态 MC $\{X(t)\}$，$\mathbb{Q}=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$，$\nu_0=\lambda,\ \nu_1=\mu,\ P_{01}=P_{10}=1$。取 $\nu=\lambda+\mu$，引进虚转移状态的MC，其转移概率矩阵为

$$\mathbb{P}^*=\begin{pmatrix}\frac{\mu}{\nu} & \frac{\lambda}{\nu}\\ \frac{\mu}{\nu} & \frac{\lambda}{\nu}\end{pmatrix}\Rightarrow\mathbb{P}^{*n}=(\mathbb{P}^*)^n=\mathbb{P}.$$

$$\Rightarrow P_{00}(t)=e^{-\nu t}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{(\nu t)^n}{n!}e^{-\nu t}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t},$$

$$P_{11}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

鞅

$\{Z_n, n\ge1\}$称为鞅,如果$E[|Z_n|]<\infty, \forall n$,且$E[Z_{n+1}|Z_1,Z_2,\cdots,Z_n]=Z_n$, a.s. $\forall n\ge1$.

- 设$\{X_n\}$独立,$E[X_n]=0$,记$Z_n=\sum_{j=1}^n X_j$,则$\{Z_n\}$为鞅.
- 分支过程$\{X_n\}$,每个个体期望后代数为m,记$Z_n=\frac{X_n}{m^n}$,则$\{Z_n\}$为鞅.
- 设$\{X_n\}$独立,$E[X_n]=1$,记$Z_n=\prod_{j=1}^n X_j$,则$\{Z_n\}$为鞅.

在考虑Z_{n+1}的条件期望时,不只给定$Z_1,\cdots,Z_n$,而且还给定其他随机向量Y,若能证明$E[Z_{n+1}|Z_1,\cdots,Z_n,Y]=Z_n$,则$E[Z_{n+1}|Z_1,\cdots,Z_n]=E\{E[Z_{n+1}|Z_1,\cdots,Z_n,Y]|Z_1,\cdots,Z_n\}=E[Z_n|Z_1,\cdots,Z_n]=Z_n$. ✓ 应用

- 设$\{X, Y_n, n\ge1\}$为任意随机变量序列,满足$E[|X|]<\infty$,定义$Z_n=E[X|Y_1,\cdots,Y_n]$, $n\ge1$, 则$\{Z_n\}$为鞅. Doob型鞅 (若还有$\{X_n\}$ iid,则$Z_n=\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)$)
- 已知任意$\{X_n,n\ge1\}$满足$E[|X_n|]<\infty$(不必独立),定义$Z_n=\sum_{i=1}^n\{X_i-E[X_i|X_1,\cdots,X_{i-1}]\}$, $n\ge1$, 则$\{Z_n\}$为鞅.(减去投影)

设N为$\{Z_n,n\ge1\}$的一个随机时刻,定义$\bar Z_n=Z_{n\wedge N}=\begin{cases}Z_n, & n\le N,\\ Z_N, & n>N,\end{cases}$ 则称$\{\bar Z_n,n\ge1\}$为$\{Z_n,n\ge1\}$的停止过程.

设N为鞅$\{Z_n,n\ge1\}$的随机时刻,则$\{\bar Z_n,n\ge1\}$为鞅. $E[\bar Z_n]=E[\bar Z_1]=E[Z_1]$.

鞅停止定理 设$\{Z_n,n\ge1\}$为鞅,N为停时.若以下三条之一满足:
(i) $\bar Z_n$一致有界; (ii) N有界; (iii) $E[N]<\infty$,且存在常数$M<\infty$使$E[|Z_{n+1}-Z_n||Z_1,\cdots,Z_n]\le M$,
则$E[Z_1]=E[Z_N]$.

花样问题:设$\{W_n,n\ge1\}$ iid, $P(W_1=0)=\frac12$, $P(W_1=1)=\frac13$, $P(W_1=2)=\frac16$. 记N为花样"020"首次发生时刻.求$E[N]$. 引进公平赌博模型,有一系列赌徒进行公平赌博,第i个赌徒于时刻i开始进入赌局,开始赌博.

(1) 首局以\$1赌"0",若"0"出现,则赌徒得\$2.

(2) 下局以\$2赌"2",若"2"出现,则赌徒得\$12.

(3) 再下局以\$12赌"0",若"0"出现,则赌徒得\$24.

一赌徒在任一局中输,则其累计输\$1;若连赢3局,则其累计赢\$(24-1)=\$23.

记X_n为到时刻n为止赌场累计所赢额,则$\{X_n,n\ge1\}$为一个鞅,N为它的一个停时,$|X_{n+1}-X_n|\le3\times23$.则$X_N=(N-3)-23+1-1=N-26$,由鞅停止定理,$E[X_N]=E[X_1]=0$,于是$E[N]=26$.

n个人随机取帽，都得到自己帽子的期望轮数为n. $Z_k=\sum_{i=1}^{k}\{X_i-E[X_i|X_1,\cdots,X_{i-1}]\}$, $k\geq 1$.

设$E[|Z_n|]<\infty$, $\forall n\geq 1$.

(1) 下鞅：$E[Z_{n+1}|Z_1,\cdots,Z_n]\geq Z_n$, a.s. $\forall n\geq 1$. $E[Z_{n+1}]\geq E[Z_n]$ 上/下鞅的停止过程仍为上/下鞅

(2) 上鞅：$E[Z_{n+1}|Z_1,\cdots,Z_n]\leq Z_n$, a.s. $\forall n\geq 1$. $E[Z_{n+1}]\leq E[Z_n]$

鞅停止定理 设N为$\{Z_n, n\geq 1\}$的停时，若以下三条之一满足：

(i) Z_n一致有界；(ii) N有界；(iii) $E[N]<\infty$，且存在常数$M<\infty$使$E[|Z_{n+1}-Z_n||Z_1,\cdots,Z_n]\leq M$,

则 上鞅情形：$E[Z_1]\geq E[Z_N]$

下鞅情形：$E[Z_1]\leq E[Z_N]$.

设$\{X_n, n\geq 1\}$为下鞅，N为有界停时，$P(N\leq n)=1$，则$E[X_1]\leq E[X_N]\leq E[X_n]$.

设$\{Z_n, n\geq 1\}$为下(上)鞅，$f(x)$为单增(减)凸函数，则$\{f(Z_n), n\geq 1\}$为下(上)鞅. 若$\{Z_n\}$为鞅，f可不要求单调性

下鞅Kolmogorov不等式 设$\{Z_n, n\geq 1\}$为非负下鞅，则对任意$a>0$,

$$P(\max\{Z_1,\cdots,Z_n\}>a)\leq\frac{E[Z_n]}{a}.$$

$$\xrightarrow{取f(x)=|x|} P(\max\{|Z_1|,\cdots,|Z_n|\}>a)\leq\frac{E[|Z_n|]}{a}.$$

$$\xrightarrow{取f(x)=x^2} P(\max\{|Z_1|,\cdots,|Z_n|\}>a)\leq\frac{E[Z_n^2]}{a^2}.$$

鞅收敛定理 设$\{Z_n, n\geq 1\}$为鞅，且$E[|Z_n|]\leq M<\infty$, $\forall n\geq 1$，则$\lim_{n\to\infty}Z_n$以概率1存在有限.

$\xrightarrow{推论}$ 非负鞅必收敛(a.s.)于有限r.v.

应用 Example 6.4(B) 公平赌博一定会在有限时间内输光.

$N(0,t)$的矩母函数：$e^{\frac{ts^2}{2}} = E[e^{sX(t)}]$

布朗运动

称$\{X(t), t\ge 0\}$为BMP，若(i) $X(0)=0$；(ii)具有独立平稳增量性；(iii)对$\forall t>0, X(t)\sim N(0,c^2t)$，其中$c>0$。标准BMP：$c=1$。

对$\forall 0<t_1<\cdots<t_n$，$(X(t_1), X(t_2),\cdots,X(t_n))\sim N_n(\vec{0},\Sigma)$，其中$\Sigma=\begin{bmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{bmatrix}$。

若$i\le j$，则$Cov(X(t_i), X(t_j))=t_i$。

设$(Z_1,Z_2)\sim N_2\left(\binom{a}{b}, \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix}\right)$，则$[Z_2|Z_1=x]\sim N(m(x), \sigma_{22}-\sigma_{21}\sigma_{11}^{-1}\sigma_{12})$，其中$m(x)=b+\sigma_{21}\sigma_{11}^{-1}(x-a)$。

对$\forall 0<s<t$，$[X(s)|X(t)=b]\sim N\left(\frac{s}{t}b, \frac{s(t-s)}{t}\right)$。

称$\{X(t), t\ge 0\}$为高斯过程，是指对$\forall t_1<t_2<\cdots<t_n$，$(X(t_1), X(t_2),\cdots,X(t_n))$多元正态分布。

$\{Z(t), 0\le t\le 1\}$称为布朗桥 $\begin{cases} Z(0)=Z(1)=0 \\ \{Z(t), 0<t<1\}\text{为高斯过程} \\ \text{对}\forall 0<s<t<1, E[Z(t)]=0, Cov(Z(s),Z(t))=s(1-t). \end{cases}$

BMP等价定义：(i)高斯过程.(ii)$E[X(t)]=0$.(iii)对$s\le t$，$Cov(X(s),X(t))=s$.

设$\{X(t), t\ge 0\}$为布朗运动，则在给定$X(1)=0$条件下，$\{X(t), 0\le t\le 1\}$为布朗桥.

设$\{X(t), t\ge 0\}$为布朗运动，定义$Z(t)=X(t)-tX(1)$，则$\{Z(t), 0\le t\le 1\}$为布朗桥.

设$X_1, X_2,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} U(0,1)$，定义$N_n(s)=\#\{i: X_i\le s, i=1,\cdots,n\}$，$F_n(s)=\frac{N_n(s)}{n}$，$s\in[0,1]$，$\alpha_n(s)=\sqrt{n}(F_n(s)-s)$，则$\{\alpha_n(s), s\in[0,1]\}\xrightarrow{w}$布朗桥$\{Z(t), t\in[0,1]\}$.

击中时T_a. $\boxed{P(X(t)\ge a)=\frac{1}{2}P(T_a\le t)\quad (a>0)}$

$P(T_a\le t)=2P(X(t)\ge a)=2[1-\Phi(\frac{a}{\sqrt{t}})] \Rightarrow P(T_a<\infty)=1$，$T_a$是r.v.

$E[T_a]=\int_0^{+\infty}P(T_a>t)dt=\int_0^{+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{t}}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right)dt=\frac{2a^2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{y^2}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=+\infty.$

对$\forall a\in\mathbb{R}$，$T_a\overset{d}{=}T_{-a}$.

$P(\max\limits_{0\le s\le t}X(s)\ge a)=P(T_a\le t)=2P(X(t)\ge a)$. √区间右端点/左端点

反正弦律 对$\forall x\in(0,1), t>0$，$P(\text{BMP于时间段}(xt,t)\text{未访问"0"})=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$.

几何BMP $Y(t)=e^{X(t)}, t\ge 0 \Rightarrow E[Y(t)]=e^{\frac{t}{2}}$，$Var(Y(t))=e^{2t}-e^{t}$.

在一点被吸收的BMP 固定$x>0$，定义$Z(t)=\begin{cases}X(t), & T_x>t,\\ x, & T_x\le t.\end{cases}$ 混合型cdf.

$P(Z(t)=x)=P(T_x\le t)=2P(X(t)\ge x)$

对$\forall y<x$，$P(Z(t)\le y)=P(X(t)\le y, \max\limits_{0\le s\le t}X(s)<x)=P(X(t)\le y)-P(X(t)\le y, \max\limits_{0\le s\le t}X(s)\ge x)$

$\overset{\text{对偶原理}}{=}P(X(t)\le y)-P(X(t)\ge 2x-y, \max\limits_{0\le s\le t}X(s)\ge x)=P(X(t)\le y)-P(X(t)\ge 2x-y).$

积分BMP $Z(t)=\int_0^t X(s)ds$. ① $\{Z(t),t\geq 0\}$ 为高斯过程. ② $\{Z(t),t\geq 0\}$ 非Markov过程; $\{(Z(t),X(t))\}$ 为Markov过程. ③ $E[Z(t)]=0$; 对 $s\leq t$, $Cov(Z(s),Z(t))=s^2(\frac{t}{2}-\frac{s}{6})$. ④ $(X(t),Z(t))\sim N_2(\vec{0},\Sigma)$, 其中

$$\Sigma=\begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \end{pmatrix}$$

称 $\{X(t),t\geq 0\}$ 为漂移率为 μ 的布朗运动过程, 若 (i) $X(0)=0$; (ii) 具有独立平稳增量性; (iii) 对 $\forall t>0$, $X(t)\sim N(\mu t,t)$. $X(t)=\mu t+\underbrace{B(t)}_{}$ 标准BMP.

$$\boxed{P(T_A<T_{-B}\mid X(0)=x)=\frac{e^{2\mu B}-e^{-2\mu x}}{e^{2\mu B}-e^{-2\mu A}}, \quad -B<x<A}$$

- 标准BMP ($\mu=0$), $P(T_c<T_d\mid B(0)=x)=\frac{x-d}{c-d}$, $d<x<c$.
- 当 $x=0$, $\mu>0$ 时, 令 $B\to\infty$ 得 $P(T_A<\infty)=1$, $A>0$.
- 当 $\mu<0$ 时, 令 $x=0$ 且 $B\to+\infty$ 得 $P(T_A<\infty)=e^{2\mu A}$; 对偶地, 当 $\mu>0$ 时, $P(T_{-B}<\infty)=e^{-2\mu B}$, $B\geq 0$.

$\Rightarrow$ 当 $\mu<0$ 时, $\max\limits_{t\geq 0} X(t)\sim Exp(2|\mu|)$.

设 $\{X(t),t\geq 0\}$ 为漂移率为 $\mu\geq 0$ 的BMP, 则 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\max\limits_{0\leq s\leq t}X(s)=\mu$.

当 $\mu\leq 0$ 时, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\max\limits_{0\leq s\leq t}X(s)=0$.

设 $\{X(t),t\geq 0\}$ 是漂移率为 μ 的BMP, 则 $E[e^{-\theta T_x}]=\exp\{-x(\sqrt{\mu^2+2\theta}-\mu)\}$, $x\geq 0$, $\theta\geq 0$.

设 $\{B(t),t\geq 0\}$ 为标准BMP, 则有鞅 $\begin{cases} Y(t)=B(t) \\ Y(t)=B^2(t)-t \\ Y(t)=e^{cB(t)-\frac{c^2t}{2}}, \forall c. \end{cases}$

基于鞅分析BMP 设 $X(t)=B(t)+\mu t$, 定义停时 $T=\min\{t: X(t)=A 或 X(t)=-B\}$, $-B<0<A$. T是鞅 $Y(t)=e^{cB(t)-\frac{c^2t}{2}}=e^{cX(t)-c\mu t-\frac{c^2t}{2}}$ 的停时, 由于 $Y(t)$ 介于 $-B$ 与 A 之间(停止过程一致有界), 由鞅停止定理, $E[e^{cX(T)-c\mu T-\frac{c^2T}{2}}]=1$, 取 $c=-2\mu$ 得

$1=E[e^{-2\mu X(T)}]=e^{-2\mu A}P(T_A<T_{-B})+e^{2\mu B}[1-P(T_A<T_{-B})]\Rightarrow P(T_A<T_{-B})=\frac{e^{2\mu B}-1}{e^{2\mu B}-e^{-2\mu A}}$.

求 $E[T]$? 利用鞅 $B(t)=X(t)-\mu t$ 及鞅停止定理, $0=E[X(T)-\mu T]=AP(T_A<T_{-B})-B[1-P(T_A<T_{-B})]-\mu E[T]\Rightarrow E[T]=\frac{Ae^{2\mu B}+Be^{-2\mu A}-A-B}{\mu[e^{2\mu B}-e^{-2\mu A}]}$.

设 $\{X(t),t\geq 0\}$ 为漂移率为 μ 的BMP, 记 $p(x,t;y)$ 为 $[X(t)\mid X(0)=y]$ 的条件pdf.

向后扩散方程: $\frac{\partial}{\partial t}p(x,t;y)=\mu\frac{\partial}{\partial y}p(x,t;y)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}p(x,t;y)$.

向前扩散方程: $\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(x,t;y)=\mu\frac{\partial}{\partial x}p(x,t;y)+\frac{\partial}{\partial t}p(x,t;y)$.