复分析

基本概念：复数 $z = x + iy$; 复数域 $\mathbb{C}$:

$i^2 = -1$.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$

x 称为实部，y 称为虚部.

$(x, y) \to x + iy$.

复数运算:

① 加法: $z_1 = x_1 + iy_1$

$z_2 = x_2 + iy_2$

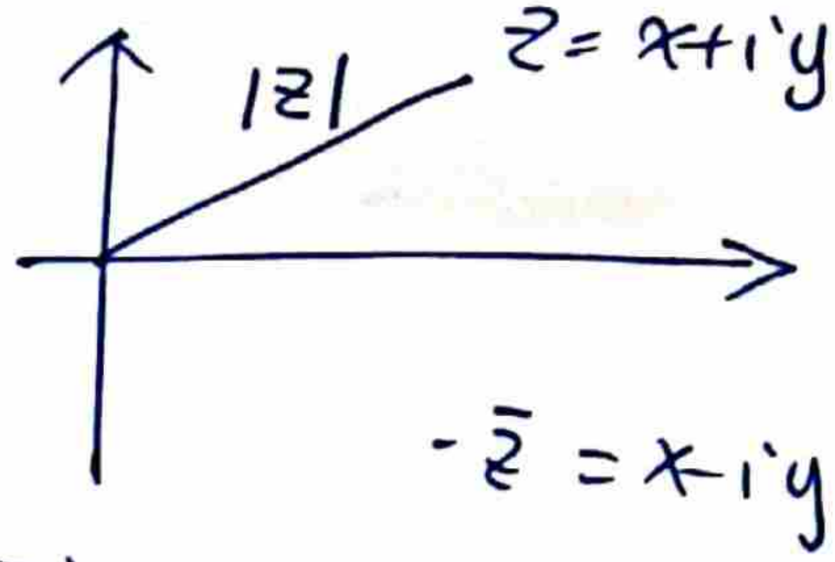
则 $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

② 乘法: $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$

$= x_1 x_2 + i(y_1 x_2 + y_2 x_1) + i^2 y_1 y_2$

$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$

③ 模 $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$



④ 共轭： $\bar{z} = x - iy$

$$\begin{cases} z = x+iy \\ \bar{z} = x-iy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \\ y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) \end{cases}$$

故 $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$， $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$.

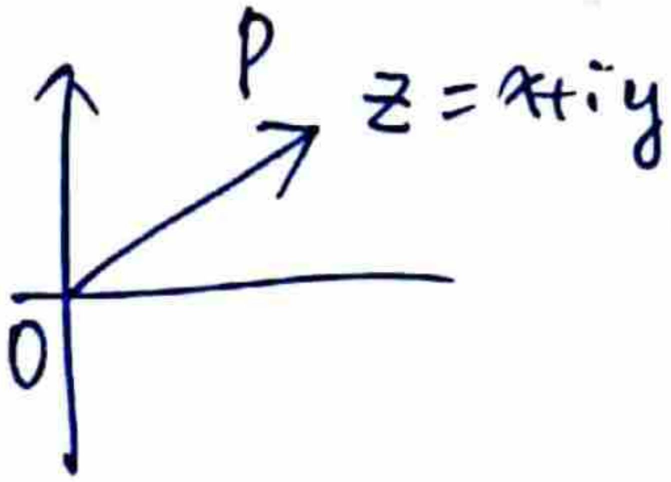
几何意义:

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, y) \longrightarrow x+iy.$$

复数与 $\mathbb{R}^2$ 上的点一一对应

复数与 $\mathbb{R}^2$ 上向量一一对应.



$\overrightarrow{OP}=(x, y)$.

性质：① $|\mathrm{Re}\,z| \le |z|$, $|\mathrm{Im}\,z| \le |z|$

② $|z+w| \le |z| + |w|$

$|z-w| \ge \big||z|-|w|\big|$

③ $|z|^2 = z\bar{z}$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, $(z \ne 0)$

证：① $|\mathrm{Re}\,z| = |x| \le \sqrt{x^2+y^2} = |z|$

$|\mathrm{Im}\,z| = |y| \le \sqrt{x^2+y^2} = |z|$

(2)

$$
\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \\
&= |z|^2 + z\bar{w} + w\bar{z} + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\
&\le |z|^2 + 2\,|z\bar{w}| + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2\cdot|z|\cdot|w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2 .
\end{aligned}
$$

极坐标：令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

则 $z=x+iy=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

其中，θ：定义为 x 轴正向转动到 OZ 所角度.

约定：逆时针转动角度为正

顺时针转动角度为负.

θ 称为 z 的辐角. 若 θ_0 为 z 的一个辐角，则对任意 $k\in\mathbb{Z}$，$\theta_0+2k\pi$ 都是 z 的一个辐角.

故辐角集合可表示为

$$\operatorname{Arg} z = \{\theta_0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$\operatorname{Arg} z$ 是 z 的无穷多值函数.

$\arg z$：称为辐角主值，定义为 $\operatorname{Arg} z$ 在 $(-\pi, \pi)$ 中的角度（或 $[0, 2\pi)$ 中的角度）.

则有 $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

极坐标运算：若 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

则

① $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$

② $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$ $(r_2 \neq 0)$

} 直接验证.

③ $|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$

④ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $(z_2 \neq 0)$

⑤ $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$ （集合相等）.

$\mathrm{Arg}\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{Arg}\, z_1 - \mathrm{Arg}\, z_2$ $(z_1, z_2 \neq 0)$.

注意集合运算：设A, B为两集合，则

$A + B = \{ a + b \mid a \in A,\ b \in B \}$

$A - B = \{ a - b \mid a \in A,\ b \in B \}$.

问题: $\mathrm{Arg}(z^2) = \mathrm{Arg}\, z + \mathrm{Arg}\, z = 2\,\mathrm{Arg}\, z$?

反例：令 $z=1$，则 $\arg z = 0$.

$$\mathrm{Arg}\,1 = \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \cdots\}.$$

$$2\,\mathrm{Arg}\,1 = \{0, \pm 4\pi, \pm 8\pi, \pm 12\pi, \cdots\}.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Arg}\,1 + \mathrm{Arg}\,1 &= \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \cdots\} \\ &\quad + \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \cdots\} \\ &= \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \cdots\}.\end{aligned}$$

故 $\mathrm{Arg}\,1 + \mathrm{Arg}\,1 \neq 2\,\mathrm{Arg}\,1$.

（注意：若 A 为集合，则 $2A \neq \{2a \mid a \in A\}$）.

定义：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，$(\theta \in \mathbb{R})$ （$e^{i\theta}$ 运算性质与实数 e^x 有一样性质）.

则 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$，$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = r_1 e^{i\theta_1} \frac{1}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

几何意义：$e^{i\theta} \cdot z$ 表示 $\overrightarrow{Oz}$ 向量逆时针旋转 θ 角

如 $iz = e^{\frac{\pi}{2}i} z$ 表示 $\overrightarrow{Oz}$ 逆时针转 $\frac{\pi}{2}$ 角度.

$\mathbb{R}^2$ 中直线方程：$ax+by+c=0$，$a,b,c\in\mathbb{R}$，$(a,b)\neq(0,0)$.

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}) \\ y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z}). \end{cases}$$

则 $\frac{1}{2}a(z+\bar{z})+\frac{b}{2i}(z-\bar{z})+c=0$

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2i}\right)z+\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2i}\right)\bar{z}+c=0.$$

令 $B=\frac{a}{2}-\frac{b}{2i}$，则 $\bar{B}=\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2i}\right)$，且 $B\neq 0$

故 $ax+by+c=0 \iff \bar{B}z+B\bar{z}+C=0$，$(B\neq 0)$

圆周方程　$|z-z_0|=R$

$|z-z_0|^2=R^2$, $(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)=R^2$.

$|z|^2 - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + |z_0|^2 - R^2 = 0.$

令 $z=1$, $B=-z_0$, $C=|z_0|^2-R^2$, 则

$A|z|^2 + B\bar{z} + \bar{B}z + C = 0$,

命题：若 $A, C \in \mathbb{R}$，$B \in \mathbb{C}$，$|B|^2 - AC > 0$，则

(*) $\quad A|z|^2 + B\bar{z} + \bar{B}z + C = 0$

表示圆周或直线，并且：

① 若 $A = 0$，则为直线

② 若 $A \neq 0$，则为圆周

证：若 $A=0$，则由假设

$$|B|^2-AC>0 \Rightarrow |B|^2>0 \Rightarrow B\neq 0$$

则 (*) 式 $\Leftrightarrow$ $B\bar{z}+\bar{B}z+C=0 \quad (B\neq 0)$（为直线）

若 $A\neq 0$，则 (*) 式为

$$z\bar{z}+\frac{B}{A}\bar{z}+\frac{\bar{B}}{A}z+C=0$$

$$\left(z+\frac{B}{A}\right)\left(\bar{z}+\frac{\bar{B}}{\bar{A}}\right)=\frac{|B|^2-AC}{A^2}$$

$$\left|z+\frac{B}{A}\right|^2=\frac{|B|^2-AC}{A^2}>0$$

表示圆周.

扩充复平面与球极投影

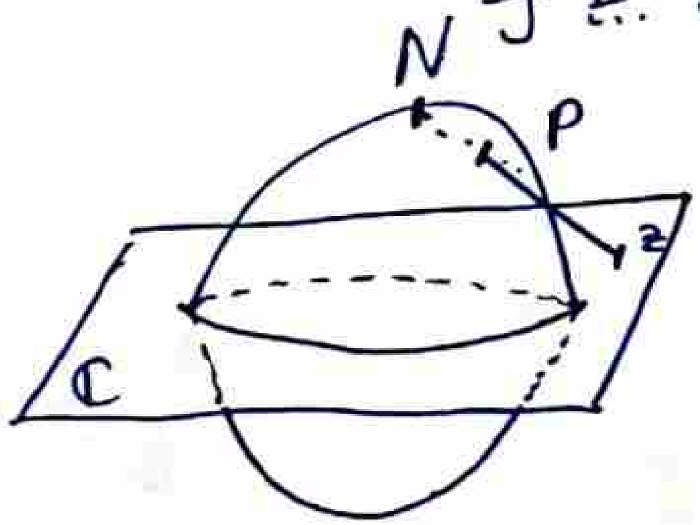
在 $\mathbb{R}^3$ 中，考虑 S^2: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$. 球面

$N(0,0,1)$.

$z=x+iy$ 看作点 $(x,y,0)$

给定 z，在 $\mathbb{R}^3$ 中作直线 Nz，交 S^2 于点 $p\neq N$

反之，若 $p\neq N$，$p\in S^2$ 则直线 Np 交 Oxy 平面于点 z，故 $\mathbb{C}$ 与 $S^2\setminus\{N\}$ 是一一对应的.



$\mathbb{C}\longrightarrow S^2\setminus\{N\}$.

当 $|z|\to+\infty$ 时，点 $p\to N$.

定义 $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$，则 $\overline{\mathbb{C}}$ 与 S^2 一一对应，称为球极投影.

命题：① 若 $z=x+iy$，则对应的点 $p\in S^2$ 为：

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1},\ \frac{z-\bar{z}}{i(|z|^2+1)},\ \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$$

② 若 $p(x_1,x_2,x_3)\in S^2$，则对应的复数为：

$$z=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}$$

证明详见方企勤

③ 在球极投影下，$S^2\longleftrightarrow\mathbb{C}$

不过N点的圆周 $\leftrightarrow$ 圆周

经过N点的圆周 $\leftrightarrow$ 直线.

故 S^2 上的圆周对应 $\mathbb{C}$ 上的圆周或直线.

因此，$\mathbb{C}$ 上的圆周和直线统称为广义圆周.

收敛：设 $\{z_1, z_2, \cdots z_n \cdots\}$ 是 $\mathbb{C}$ 中数列，称 $z_n \to w \in \mathbb{C}$

若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，$\forall n > N$，$|z_n - w| < \varepsilon$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = w \iff \lim\limits_{n\to\infty} |z_n - w| = 0$

$$\iff \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} w \\ \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} w. \end{cases}$$

记号：$B(a,r)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-a|<r\}$ a点的一个邻域

$\overline{B(a,r)}=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-a|\le r\}$.

$B(\infty,R)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|>R\}$，称为 $z=\infty$ 的邻域.

内点：称 z_0 是 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 的内点，若 $\exists r>0$，$B(z_0,r)\subset\Omega$.

Ω° 为 Ω 内点的集合.

开集：Ω 开 $\Leftrightarrow$ $\Omega=\Omega^\circ$ $\Leftrightarrow$ Ω 中任何点都是内点.

闭集：Ω 闭 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}\setminus\Omega$ 是开集

相限点：z_0 是 Ω 的相限点 $\Longleftrightarrow$ $\exists\, z_n \in \Omega$, $z_n \neq z_0$, $z_n \to z_0$.

闭包：$\overline{\Omega} = \{ z \in \mathbb{C} \mid z \in \Omega$ 或 z 为 Ω 的相限点 $\}$

边界：$\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega^\circ$

有界集：Ω 有界 $\Longleftrightarrow$ $\exists M > 0$, $\sup\limits_{z \in \Omega} |z| \leq M$

直径：$\operatorname{diam}(\Omega) = \sup\limits_{z, w \in \Omega} |z - w|$.

紧集：　Ω 为 $\mathbb{C}$ 中紧集，若 Ω 为闭集且有界.

定理：　$\Omega \subset \mathbb{C}$ 为紧集 $\Longleftrightarrow$ Ω 中任何点列都有子序列收敛到 Ω 中的点.

$\Longleftrightarrow$ Ω 中任何开覆盖都有有限子覆盖.

复导数.

定义（连续） $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处连续 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$,

$\forall z$: $|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$.

可导: 若极限 $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 存在, 则称 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处可导, 记为 $f'(z)$.

可微：若 $f(z)$ 在 z_0 处改变量满足：

$$\Delta f = A(z_0)\,\Delta z + \rho(\Delta z),\quad \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\rho(\Delta z)}{\Delta z} = 0$$

则称 f 在 z_0 处可微，其中 $\Delta z = z - z_0$，$\Delta f = f(z) - f(z_0)$.

引理：可导 $\Leftrightarrow$ 可微.

证：
$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{A(z_0)\,\Delta z + \rho(\Delta z)}{\Delta z}$$

$$= A(z_0) + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\rho(\Delta z)}{\Delta z}.$$

定义：① 称 $f(z)$ 在区域 D 中全纯，若 f 在 D 中每点可导.

② 称 $f(z)$ 在 z_0 点全纯，若 f 在 z_0 的某邻域 $B(z_0, r)$ 中全纯.

例：$f(z)=\bar{z}$ 不全纯.

证：
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{z_0+h}-\bar{z}_0}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\bar{h}}{h}=\begin{cases}1, & 若\ h\in\mathbb{R}\\ -1, & 若\ h\in i\mathbb{R}\end{cases}$$

故在 z_0 处不可导.

例: ~~f(z) 在~~ $f(z)=(\mathrm{Re}\,z)^2$ 在 $z=0$ 处可导, 但不全纯.

证: ① $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z)-f(0)}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{(\mathrm{Re}\,z)^2}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{x^2}{x+iy}$

$$\left|\frac{x^2}{x+iy}\right|=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}=|z|\to 0.$$

或: $\lim\limits_{z\to 0}\left|\dfrac{f(z)}{z}\right|=\lim\limits_{z\to 0}\left|\dfrac{(\mathrm{Re}\,z)^2}{z}\right|=\lim\limits_{z\to 0}\left|\dfrac{\mathrm{Re}\,z}{z}\cdot\mathrm{Re}\,z\right|$

$$\le\lim_{z\to 0}|\mathrm{Re}\,z|\to 0.$$

$$\le\lim_{z\to 0}|z|\to 0.$$

当 $\mathrm{Re}\,z_0 \neq 0$ 时，$f(z) = (\mathrm{Re}\,z)^2$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处不可导.

原因. ① $z = x + iy_0$，$x \to x_0$.

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (x+x_0) = 2x_0 \neq 0$$

② $z = x + iy$，$y \to y_0$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{x_0^2 - x_0^2}{i(y-y_0)} = 0$$

故 f 在 z_0 处不可导.

<u>上例说明:</u> 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

u,v 作为 Ω 中 x,y 的2元可微函数，但 f 在 Ω 中不是(复)可微.

定义:(实可微) 若 $f=u(x,y)+iv(x,y)$，u,v 作为二元函数在 (x_0,y_0) 处可微，则称 f 在 z_0 处实可微.

引理：f在z_0处实可微 $\Longleftrightarrow f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\Delta z+\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\overline{\Delta z}+o(|\Delta z|)$.

其中 $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

证:

$$u(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) = u(x_0,y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + o(|\Delta z|)$$

$$v(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) = v(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + o(|\Delta z|)$$

故 $f(z_0+\Delta z) - f(z_0)$

$$= u(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) + i\,v(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) - \left(u(x_0,y_0) + i\,v(x_0,y_0)\right)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + o(|\Delta z|)\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + o(|\Delta z|)\right)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{(x_0,y_0)}\Delta y + o(|\Delta z|)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + o(|\Delta z|).$$

~~记之~~: $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$

则 $\overline{\Delta z} = \Delta x - i\Delta y$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x = \frac{1}{2}(\Delta z + \overline{\Delta z}) \\ \Delta y = \frac{1}{2i}(\Delta z - \overline{\Delta z}). \end{cases}$$

故 $$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{2}(\Delta z + \overline{\Delta z}) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{1}{2i}(\Delta z - \overline{\Delta z}) + o(|\Delta z|).$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\overline{\Delta z} + o(|\Delta z|).$$

定义
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \end{cases} \quad (*)$$

则
$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0)\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x_0,y_0)\overline{\Delta z} + o(|\Delta z|)$$

说明：上述定义(*)的原因：

由于 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \\ y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) \end{cases}$. 将 $z, \bar{z}$ 看作独立变量.

则有：
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}i\frac{\partial}{\partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial y}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}i\frac{\partial}{\partial y}.$$

结合可导的定义，有：

<u>引理</u>：f 在 z_0 处可导（或可微）

$\Leftrightarrow$ f 在 z_0 处实可微，且 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)=0$

$\Leftrightarrow$ f 在 z_0 处实可微，且 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}$ （Cauchy-Riemann方程）.

证明：只需证 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0 \Leftrightarrow$ Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+i\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)$$

故 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0. \end{cases}$

定理：f 在区域 D 中全纯 $\Longleftrightarrow$ f 在 D 中实可微且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$.

例：f 在 z^n 在 $\mathbb{C}$ 上全纯

证明：f 实可微，且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$.

例：f在 $(\mathrm{Re}\, z)^2$ 在 $\mathbb{C}$ 上不全纯.

证：$f = \left(\frac{1}{2}(z+\bar{z})\right)^2 = \frac{1}{4}(z+\bar{z})^2$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \mathrm{Re}\, z$$

$\forall z_0 \in \mathbb{C}$, $\exists z_0' \in B(z_0, \delta)$, 使得 $\mathrm{Re}\, z_0' \neq 0$, 故 f 在 z_0' 不可导.

故 f 在 $\mathbb{C}$ 上任意点 z_0 不全纯.

定义：Laplace 算子： $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

若 $\Delta u = 0$, $u \in C^2$, 则 u 称为调和函数.

命题：设 $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}$

证：$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) u$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u.$

命题: 若 $f = u+iv$, 在 Ω 上全纯, 则 u, v 是 Ω 上调和函数.

证明: $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$, $\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar z}} = 0$, 故 $\frac{\partial \bar f}{\partial z} = 0$.

(原因: $\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar z}} = \overline{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u-iv) = \frac{\partial}{\partial z}\bar f$).

故 $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right) = 0$

$\frac{\partial^2 \bar f}{\partial z \partial \bar z} = \frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{\partial \bar f}{\partial z}\right) = 0$

故 $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar z}(f+\bar f) = 0$, $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar z}(f-\bar f) = 0$.

故 u, v 是 Ω 上调和函数. (注意 $u = \frac{1}{2}(f+\bar f)$, $v = \frac{1}{2i}(f-\bar f)$)

定义.（共轭调和函数）若 u, v 是区域 Ω 上一对调和函数，且满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases},$$

则称 v 为 u 的共轭调和函数.

定理：若 Ω 为单连通区域，u 在 Ω 上调和，则存在 u 的共轭调和函数 v 使 $u+iv$ 为 Ω 上全纯函数.

证 ① 令

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \underbrace{-\frac{\partial u}{\partial y}}_{P}\,dx+\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{Q}\,dy$$

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

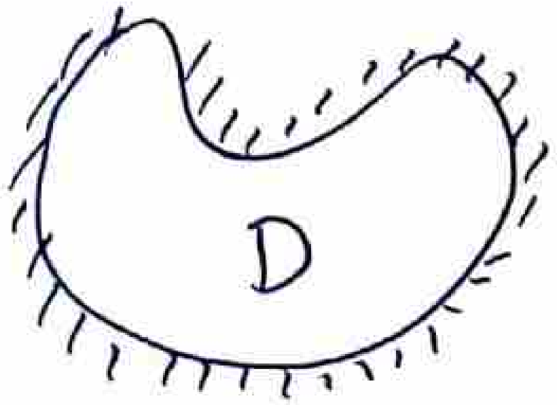
则积分与路径无关，故 v 是合理定义的函数.

② 验证 u, v 满足 Cauchy-Riemann 方程.

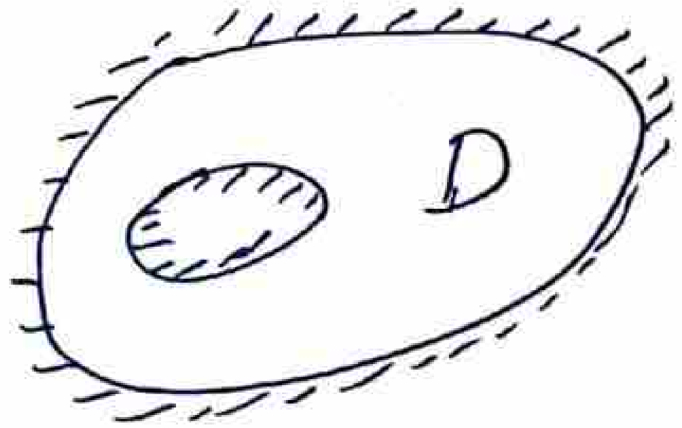
故 $u+iv$ 为 Ω 上全纯函数.

回忆：单连通：若区域D中任何简单闭曲线内部仍在D中

简单闭曲线：自身不相交的闭曲线.



单连通区域



多连通区域

定理：若D为单连通区域，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在D上连续，且有一阶连续的偏导数，则下面条件等价：

① D内任一分段光滑的闭曲线γ，

$$\int_\gamma P\,dx+Q\,dy=0$$

② 在D内 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 处处成立.

回忆: Green公式:

定理: 若函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 Ω 上连续, 且有连续的一阶偏导, 则有

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{\partial\Omega}P\,dx+Q\,dy$$

导数的运算：若 $f(z)$, $g(z)$ 在区域 Ω 中全纯，则 $f\pm g$, fg 也在 Ω 中全纯

且满足：① $(f\pm g)' = f' \pm g'$

② $(fg)' = f'g + fg'$

③ 若在 Ω 中 $g(z) \neq 0$，则 $\frac{f}{g}$ 在 Ω 中全纯且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - gf'}{g^2}$$

④ 若 $\varphi(z) = g(f(z))$ 有定义，则 $\varphi'(z) = g'(f(z))f'(z)$.

说明：若 $g(w, \bar{w})$ 为一般函数（不一定全纯），则

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(g(f(z))\right) = \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}.$$

导数的几何意义：设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为 $\mathbb{C}$ 上全纯函数.

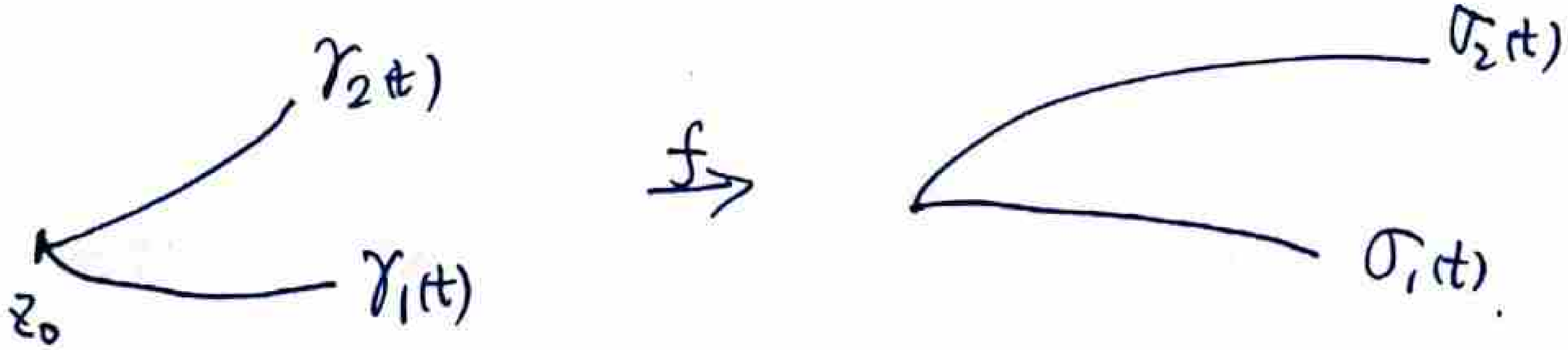
则 f 可看作：$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f:\ (x,y) \longrightarrow (u(x,y),\ v(x,y))$$

设 $\gamma(t)$ 为一条光滑曲线，$\gamma(0)=z_0$，$\sigma(t)=f(\gamma(t))$

$f(z_0)=w_0$，$\left(=u(\gamma(t))+iv(\gamma(t))\right)$.

则 $\sigma(t)$ 为经过 w_0 的曲线.



在z_0处，$\gamma_1(t)$的切线与x轴正向夹角为 $\operatorname{Arg}\gamma_1'(0)$

$\gamma_2(t)$的切线与x轴正向夹角为 $\operatorname{Arg}\gamma_2'(0)$

故z_0处转动的角度为 $\operatorname{Arg}\gamma_2'(0)-\operatorname{Arg}\gamma_1'(0)$

由于 $\sigma(t) = f(\gamma(t))$

$$\frac{d}{dt}\sigma_1(t) = f'(\gamma_1(t))\,\gamma_1'(t), \quad \frac{d}{dt}\sigma_2(t) = f'(\gamma_2(t))\,\gamma_2'(t).$$

若 $f'(z_0) \neq 0$，则有：

故 $\sigma_1(t)$ 的切线在 w_0 处与 x 轴正向夹角为 $\operatorname{Arg}\sigma_1'(0)$

$$= \operatorname{Arg} f'(z_0) + \operatorname{Arg}\gamma_1'(0)$$

$\sigma_2(t)$ 的切线在 w_0 处与 x 轴正向夹角为 $\operatorname{Arg}\sigma_2'(0)$

$$= \operatorname{Arg} f'(z_0) + \operatorname{Arg}\gamma_2'(0)$$

故 $\operatorname{Arg}\sigma_2'(0) - \operatorname{Arg}\sigma_1'(0) = \operatorname{Arg}\gamma_2'(0) - \operatorname{Arg}\gamma_1'(0)$

故在映射下，夹角的大小和旋转方向保持不变.

此时称 $f(z)$ 在 z_0 处是保角的（或共形的）.

定理：若 $f(z)$ 在区域 D 中解析，则在 $f'(z)\neq 0$ 处 $f(z)$ 保角

说明：在 $f'(z_0)=0$ 处，$f(z)$ 一定不保角.

一定不保角 原因：若 f 在 z_0 处全纯，则有展开：

$$f(z)=f(z_0)+a_2(z-z_0)^2+a_3(z-z_0)^3+\cdots \quad (注意 f'(z_0)=0).$$

故 $f(z)-f(z_0)=a_2(z-z_0)^2+a_3(z-z_0)^3+\cdots$

若 $a_2\neq 0$，则 像曲线的夹角是 原像曲线夹角的2倍.

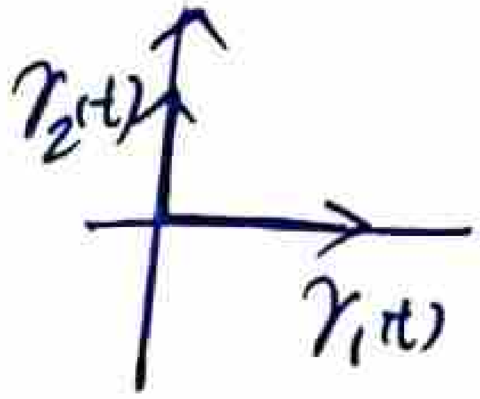
若 $a_2=0$，则存在 $m\in\mathbb{N}$，$m\geq 3$，使得 $a_2=a_3=\cdots=a_{m-1}=0$，$a_m\neq 0$

此时夹角为 m 倍.

例: $f(z)=z^2$, $z_0=0$.

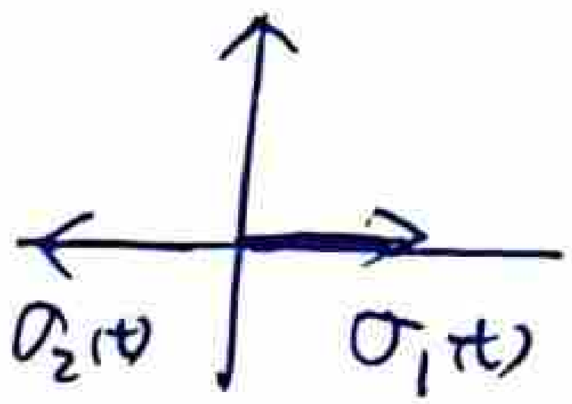
曲线 $\gamma_1(t)=t+i\cdot 0=t\in\mathbb{C}$, $t\geqslant 0$

$\gamma_2(t)=0+it=it\in\mathbb{C}$ $t\geqslant 0$.



$$\sigma_1(t)=f(\gamma_1(t))=t^2$$

$$\sigma_2(t)=f(\gamma_2(t))=(it)^2=-t^2$$



γ_1,γ_2 在 0 处夹角为 $\frac{\pi}{2}$, σ_1,σ_2 在 0 处夹角为 π.

导数模的几何意义:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$$

设 $w=f(z)$，则 $$\lim_{z\to z_0}\frac{|w-w_0|}{|z-z_0|}=|f'(z_0)|$$

故像点间距离与原像间距离之比的极限与 $|f'(z_0)|$ 有关，

与曲线 γ 无关. 故称 $|f'(z_0)|$ 为 f 在 z_0 处的伸缩率。

例：f 在 $B(0,1)\cup\{1\}$ 上全纯，且 $f(B(0,1))\subset B(0,1)$，$f(1)=1$.

证明 $f'(1)\geq 0$

证：f 在 $z=1$ 处全纯，故

$$f(z)=f(1)+f'(1)(z-1)+o(|z-1|),\quad \forall z\in B_\delta(1).$$

$$=1+f'(1)(z-1)+o(|z-1|).$$

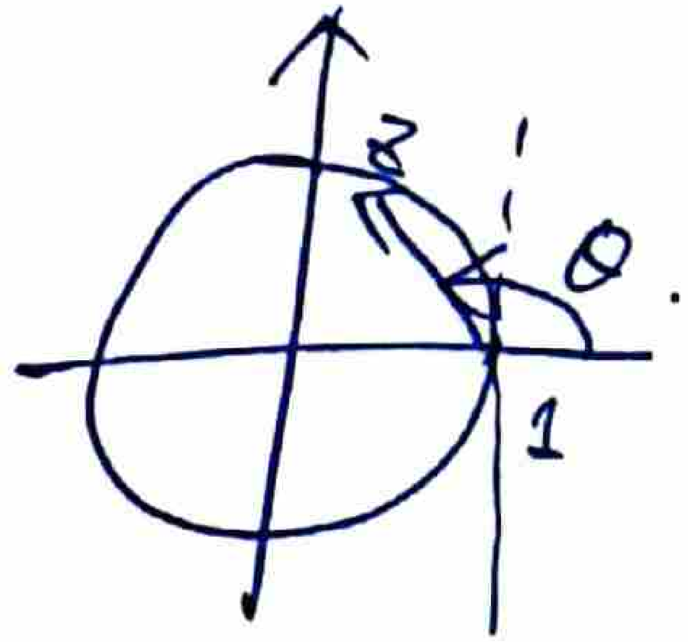
由题意 $|z|<1$ 时有 $|f(z)|<1$. 故.

$$\left|1+f'(1)(z-1)+o(|z-1|)\right|<1,\quad \forall z:\ |z|<1.$$

$$\Leftrightarrow \left(1+f'(1)(z-1)+o(|z-1|)\right)\left(1+\overline{f(1)(z-1)}+o(|z-1|)\right)<1$$

$$\Leftrightarrow 1+2\,\mathrm{Re}\left(f'(1)(z-1)\right)+o(|z-1|)<1$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(f'(1)(z-1)\right)+o(|z-1|)<0.$$



令 $z-1=re^{i\theta}$, $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$.

$$\mathrm{Re}\left(f'(1)\,re^{i\theta}\right)+o(r)<0$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(f'(1)\,e^{i\theta}\right)+o(1)<0.$$

令 $r\to 0$，有 $\mathrm{Re}(f'(1)e^{i\theta})\le 0$，$\forall\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)$

令 $f'(1)=|f'(1)|e^{i\arg f'(1)}$，若 $|f'(1)|\neq 0$，

$$\mathrm{Re}\left(e^{i(\arg f'(1)+\theta)}\right)\le 0,\quad \forall\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)$$

$$\Rightarrow \arg f'(1)+\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right],\ \forall\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)$$

$\Rightarrow \arg f'(1)=0$，故 $f'(1)=|f'(1)|>0$.

综上 $f'(1)\ge 0$.

初等全纯函数

指数函数　设 $z = x + iy$，$x, y \in \mathbb{R}$

定义 $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

则性质：① $\forall z \in \mathbb{C}$，$e^z \neq 0$　$(|e^z| = e^x > 0)$

② $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$，$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

证：由 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1) \cdot e^{x_2} \cdot (\cos y_2 + i\sin y_2)$$

$$= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2))$$

$$= e^{z_1+z_2}$$

③ e^z 是以 $2\pi i$ 为周期的函数.

证: $e^{z+2\pi i} = e^{x+(y+2\pi)i}$

$= e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi))$

$= e^x(\cos y + i\sin y)$

$= e^z$

④ e^z 在 $\mathbb{C}$ 上全纯，且 $(e^z)' = e^z$.

证：$e^z = u(x,y) + iv(x,y)$

则 $\begin{cases} u(x,y) = e^x \cos y \\ v(x,y) = e^x \sin y \end{cases}$

则 u, v 在 $\mathbb{R}^2$ 上实可微，且 $u_x = v_y = e^x \cos y$

$u_y = -v_x = -e^x \sin y$.

满足 Cauchy-Riemann 方程. 故 e^z 可导.

(5) e^z的单叶域.

定义: ① 若 $z_1 \neq z_2$, 则 $f(z_1) \neq f(z_2)$. f称为单叶函数.

② 单叶域: 若f 在区域 Ω 中单叶, 则称 Ω 为f 的单叶域.

设 $e^{z_1} = e^{z_2}$, 则 $e^{z_1 - z_2} = 1$, $z_1 - z_2 = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

故若区域D中任何两点的差不为 $2k\pi i$ $(k \neq 0)$ 时, 则 D为 e^z 的单叶域.

e^z 的映射性质：设 $z=x+iy$，$f(z)=e^x e^{iy}$ ①

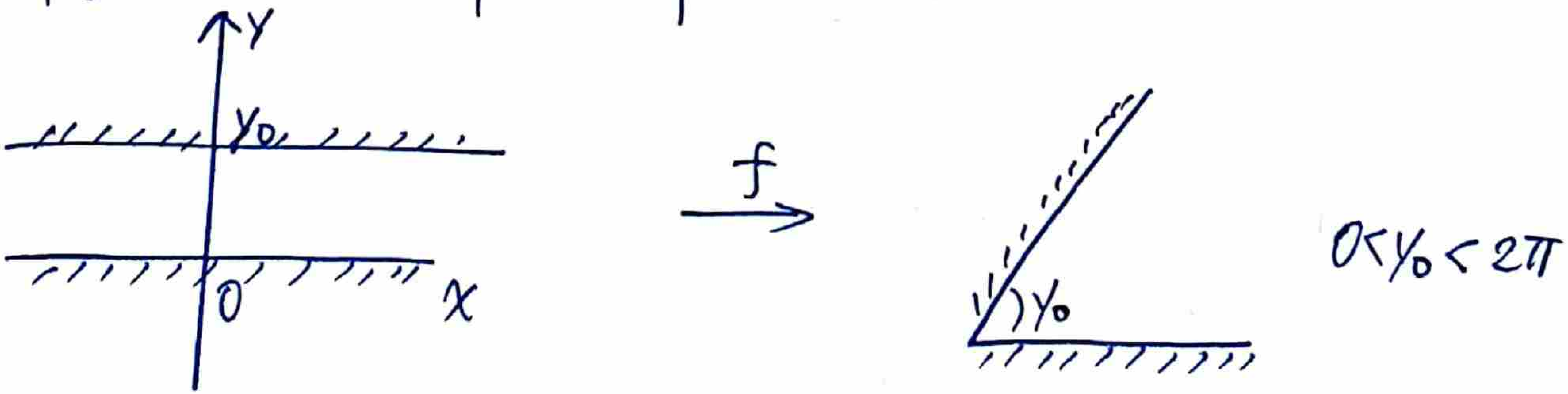
若 $f(z)$ 用极坐标表示，则有 $f(z)=re^{i\theta}$ ②

比较①,②得 $\begin{cases} r=e^x \\ \cancel{y=\theta}\ \theta=y \end{cases}$

故 $(x,y)\to(r,\theta)=(e^x,y)$

设 $D=\{(x,y)\mid 0<y<y_0\}$, $(0<y_0<2\pi)$

则 f 将 D 映为 $\{(r,\theta)\mid 0<\theta<y_0\}$. 角域.



对数函数.

若 $e^{w(z)} = z$，则 $w(z)$ 称为 z 的对数，记为 $w(z) = \operatorname{Log} z$.

令 $z = re^{i\theta}$，$w(z) = u(z) + iv(z)$. 故

$$e^{u(z) + iv(z)} = re^{i\theta}$$

故 $\begin{cases} e^{u(z)} = r \\ e^{iv(z)} = e^{i\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(z) = \log r \\ v(z) = \theta + 2k\pi, \end{cases}$

$\mathrm{Log}\, z = \{ \log r + i(\arg z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z} \}$ 是多值函数.

或者 $\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$.

符号: ① 若 $x>0$ 为实值, 则 $\log x$ 表示正实数的实对数值.

② $\mathrm{Log}\, z$ 表示多值函数.

③ $(\mathrm{Log}\, z)_k$ 表示 $\log|z| + i(\arg z + 2k\pi)$, (固定 k)

$\arg z \in [0, 2\pi)$

性质：$(\mathrm{Log}\, z)_k$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上不是连续函数.

证：$(\mathrm{Log}\,1)_k = \log 1 + i(0 + 2k\pi) = 2k\pi i$

令 $z(s) = e^{is} \quad (s \in (0, 2\pi))$

$$(\mathrm{Log}\, e^{is})_k = \log|e^{is}| + i(\arg e^{is} + 2k\pi)$$

$$= i(s + 2k\pi)$$

故 $\lim\limits_{s\to 2\pi^-} (\mathrm{Log}\, e^{is})_k = i(2\pi + 2k\pi) = (2k+1)\pi i \neq (\mathrm{Log}\,1)_k$

但 $\lim\limits_{s\to 2\pi^-} e^{is} = 1.$

问题：如何求区域 D，使 $(\mathrm{Log}\, z)_k$ 为连续函数？

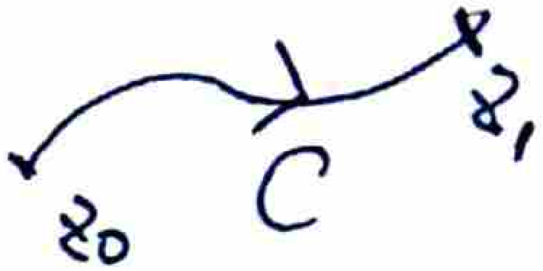
设 $R(z)$ 为有理函数，求区域 D，使 $\mathrm{Log}\, R(z)$ 为连续函数？

多值函数.

定义: ① 设 $F(z)$ 为多值函数, 定义在 Ω 上, 初值为 $f(z_0)$.

当 z_0 沿曲线 C 连续变动到 z_1 时, $f(z_0)$ 连续变动到唯一确定的值 $f(z_1)$, 则称 $F(z)$ 在 C 上的改变量为

$$\Delta_C F(z) = f(z_1) - f(z_0).$$



且 $$\Delta_C\left(F_1(z) \pm F_2(z)\right) = \Delta_C F_1(z) \pm \Delta_C F_2(z)$$

② 若 $\Delta_C F(z)$ 的值仅依赖于 z_0, z, $f(z_0)$，不依赖于 C 的选取，则称 $F(z)$ 在 Ω 内有单值分支，该分支在任何点 z 的值为：

$$f(z) = f(z_0) + \Delta_C F(z),$$ C 为 $z_0 \to z$ 的曲线.

要判断 $F(z)$ 在区域 Ω 上有单值分枝，我们有命题.

命题. $F(z)$ 在 Ω 上有单值分支 $\Longleftrightarrow$ $\forall$ Ω 中简单闭曲线，

$\Delta_C F(z) = 0$.

此时称 Ω 为 $F(z)$ 的~~支~~一个**单值域**.

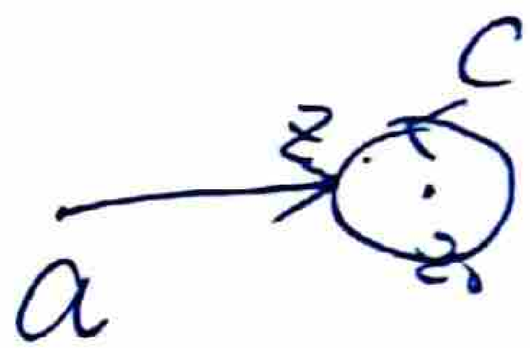
注意. $F(z)$ 的单值域不是唯一的，通常我们要找最大的单值域 Ω

即不存在 Ω'，使得 $\Omega \subsetneq \Omega'$，$F(z)$ 在 Ω' 有单值分支.

③ 寻常点：设 $z_0 \in \Omega$，若存在 z_0 的一个邻域，使多值函数 $F(z)$ 在此邻域中有单值分支，则该点称为寻常点.

支点：设多值函数 $F(z)$ 在 $z_0 \in \Omega$ 点某充分小的空心邻域中有定义，且每点都为寻常点，又以 z_0 为中心的任意小的空心邻域中都存在围绕 z_0 的简单闭曲线 C，使得 $\Delta_C F(z) \neq 0$，则称 z_0 为 $F(z)$ 的支点。

例：求 $\mathrm{Arg}(z-a)$ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上所有支点.

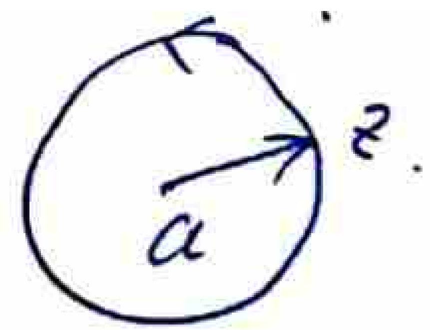


解：① $\forall z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq a$, 作任意绕 z_0 的简单闭曲线 C, a 在 C 外部, 则 $\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a) = 0$.

故 z_0 不为支点.

② 若 $z=a$，则对对任意绕 a 的简单闭曲线 C，有 $\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a)=2\pi$

(注意 C 默认为逆时针方向).



③ 若 $z=\infty$，则 z 的空心邻域 $B(\infty,R)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|>R\}$

中作曲线 $C=\{z \mid |z|=R+1\}\subset B(\infty,R)$,

则 $\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a)\neq 0$.

故 $\mathrm{Arg}(z-a)$ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上所有支点为 a 和 ∞.

说明：① 在支点的邻域中，闭曲线要在"充分小"的邻域中所选取。否则在其内部包含支点的闭曲线上，$F(z)$的改变量可以为0.

例：$F(z)=\mathrm{Log}\dfrac{z-a}{z-b}$，$a\neq b$，

a，b为支点，但 $\Delta_C F(z)=0$.

② 在支点的定义中，不能规定以 z_0 为中心的任意小的空心邻域中围绕 z_0 的所有简单闭曲线都有 $\Delta_C F \neq 0$.

例 $F(z) = \sqrt{z} \sin \frac{1}{z}$， $z = 0, \infty$ 为支点

但在任意小的空心邻域中，存在曲线 C_n：以 $z = \frac{1}{n\pi}$ (n充分大)
$z=0$
为起点和终点，并绕 $z=0$ 的简单闭曲线，有 $\Delta_{C_n} F(z) = 0$.

③ 在支点的定义中，要规定 z 的充分小的空心邻域中都是"寻常点"

例：$F(z)=\sqrt{\sin\frac{1}{z}}$.

$z=\frac{1}{n\pi}$ $(n=\pm1,\pm2,\cdots)$ 都是支点.

但 $z=0$ 不能称为支点，它是支点的极限点。

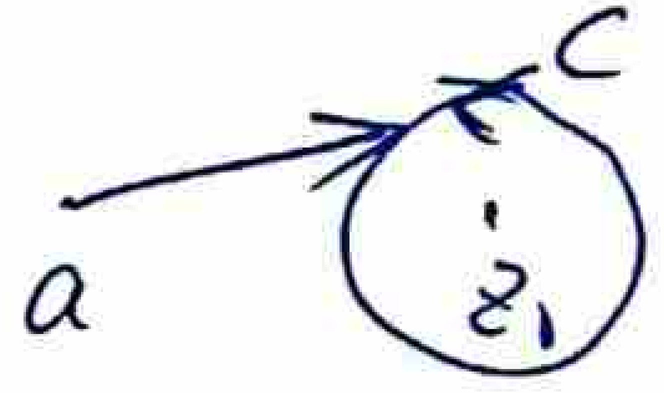
例：求 $\mathrm{Log}(z-a)$ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上所有支点，和一个单值域.

解：
$$\Delta_C \mathrm{Log}(z-a) = \Delta_C\left(\log|z-a| + i\,\mathrm{Arg}(z-a)\right)$$
$$= \Delta_C \log|z-a| + i\,\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a)$$
$$= i\,\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a)$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{若 } a \text{ 在闭曲线外} \\ \pm 2\pi i, & \text{若 } a \text{ 在闭曲线内部.} \end{cases}$$

故 $\mathrm{Log}(z-a)$ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上所有支点为 $z=a,\infty$.

对于~~其他~~点 $z_0\in\mathbb{C}$, $z_0\neq a$, $\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a)=0$

故不是支点.



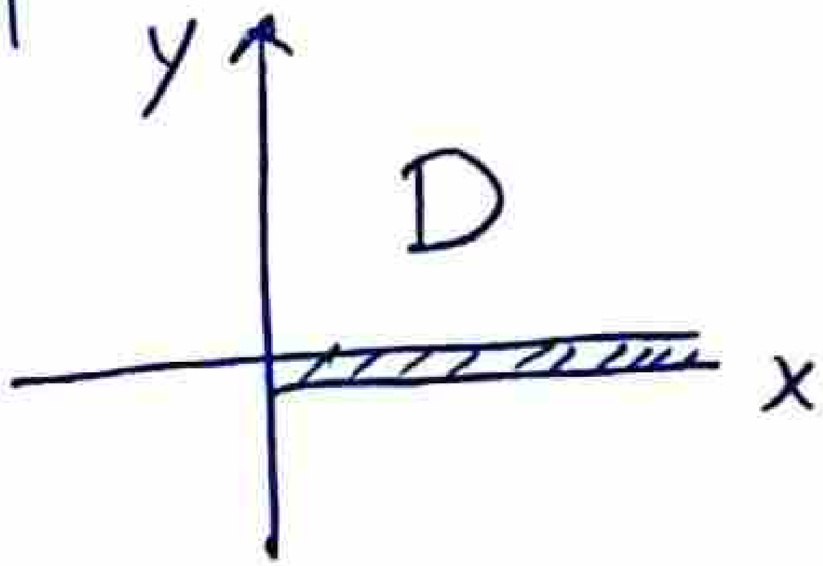
D 为 $\mathrm{Log}(z-a)$ 的单值域 $\Longleftrightarrow$ $\forall$ 闭曲线 $C\subset D$, $\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a)=0$

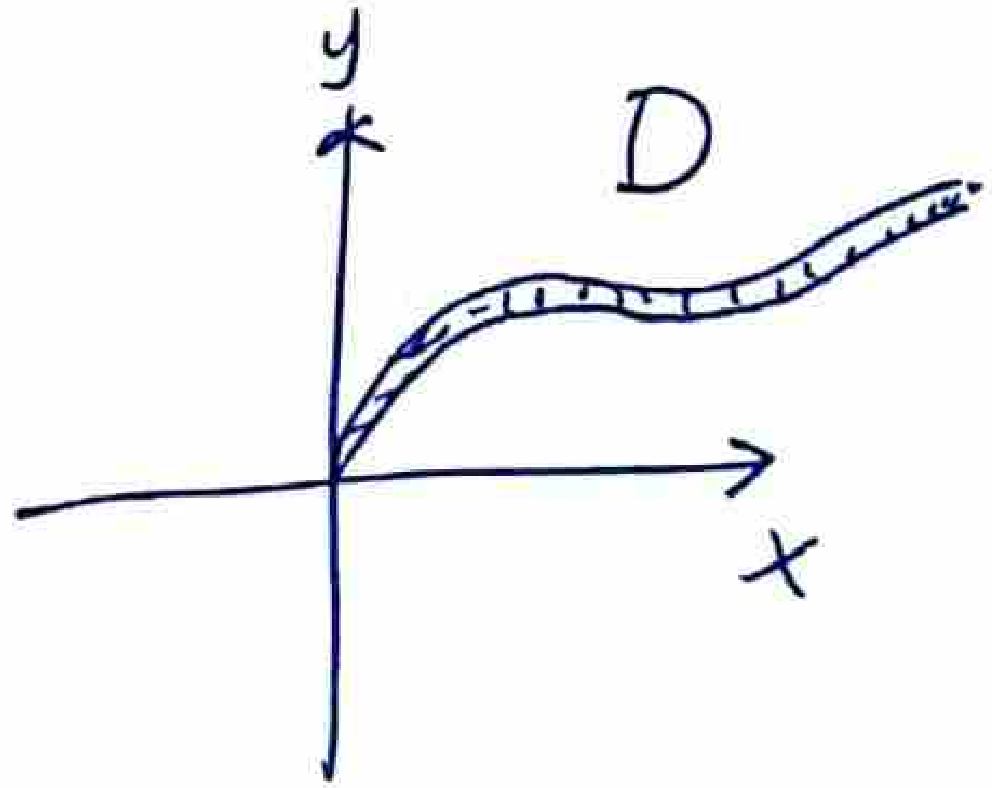
$\Longleftrightarrow$ D 中不包含绕 a 转的简单闭曲线

D为 $\mathrm{Log}(z-a)$ 的单值域 $\Longleftrightarrow$ $\forall$闭曲线C, $\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a)=0$

$\Longleftrightarrow$ D中不包含绕a转的简单闭曲线

例如: $D=\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$.





说明：单值域不是不包含支点的区域

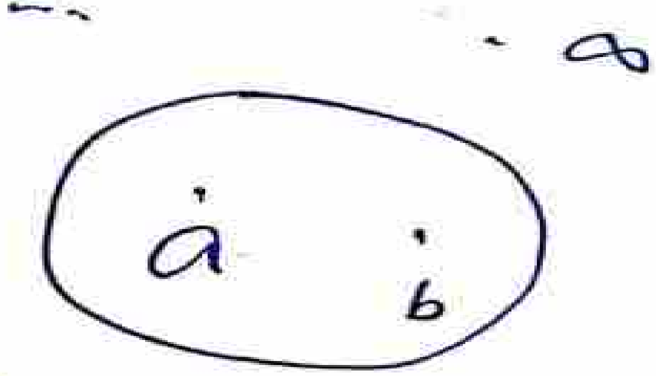
单值域是不包含使变量不为0的简单闭曲线的区域.

例：$F(z)=\mathrm{Log}\dfrac{z-a}{z-b}$，$a\neq b$ 求所有支点和一个单值域.

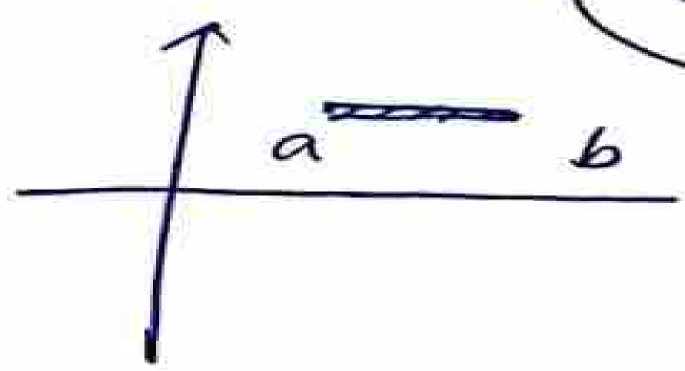
解：

$$\begin{aligned}
\Delta_C F(z) &= \Delta_C \mathrm{Log}\frac{z-a}{z-b} \\
&= \Delta_C\big(\mathrm{Log}(z-a)-\mathrm{Log}(z-b)\big) \\
&= i\big(\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a)-\Delta_C \mathrm{Arg}(z-b)\big) \\
&= \begin{cases} 2\pi i, & \text{若闭曲线 } C \text{ 仅包含 } a \\ -2\pi i, & \text{若闭曲线 } C \text{ 仅包含 } b \\ 0, & \text{若闭曲线 } C \text{ 包含 } a,b \text{ 两点} \\ 0, & \text{若 } C \text{ 不包含 } a,b \text{ 两点} \end{cases}
\end{aligned}$$

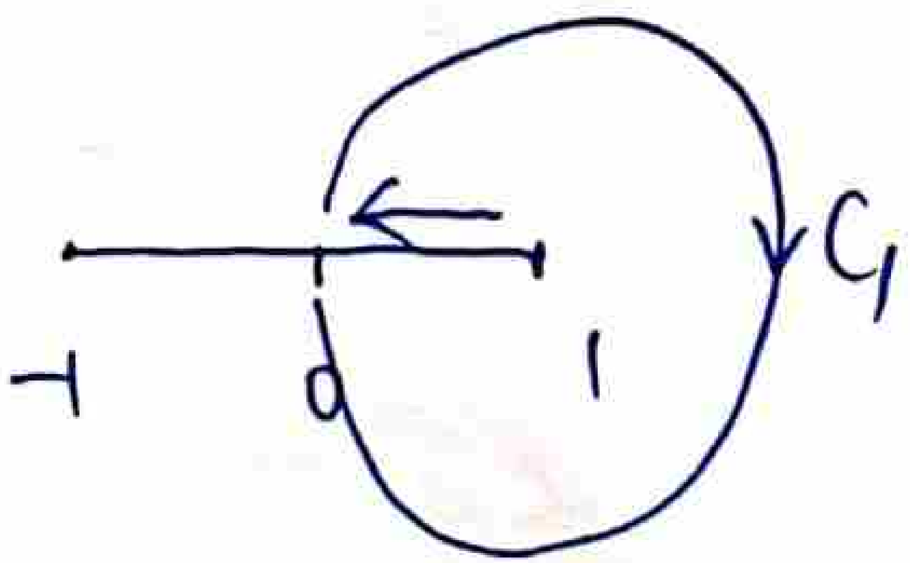
故 a,b 是支点，∞ 不是支点.



单值域：$\mathbb{C}\setminus[a,b]$.



例：$F(z)=\operatorname{Log}\frac{z-1}{z+1}$，$D=\mathbb{C}\setminus[-1,1]$，记 $f(z)$ 为 $F(z)$ 在 D 中单值分支，已知 $f(0_上)=\pi i$，求 $f(0_下)$，$f(\infty)$.

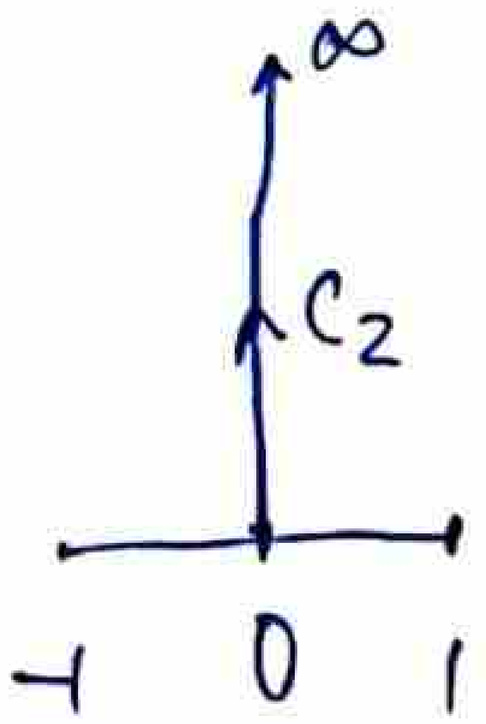


解：$f(0_下)=f(0_上)+\Delta_{C_1}F(z)$

$=\pi i+\Delta_{C_1}\left(\operatorname{Log}(z-1)-\operatorname{Log}(z+1)\right)$

$=\pi i+(-2\pi i-0)$

$=-\pi i$



$$f(\infty) = f(0_+) + \Delta_{C_2} F(z)$$

$$= \pi i + i\left(\Delta_{C_2} \operatorname{Arg}(z-1) - \Delta_{C_2} \operatorname{Arg}(z+1)\right)$$

$$= \pi i + i\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

例: $F(z) = \mathrm{Log}\,\dfrac{z^2(z+1)}{(z-1)^3(z+2)}$

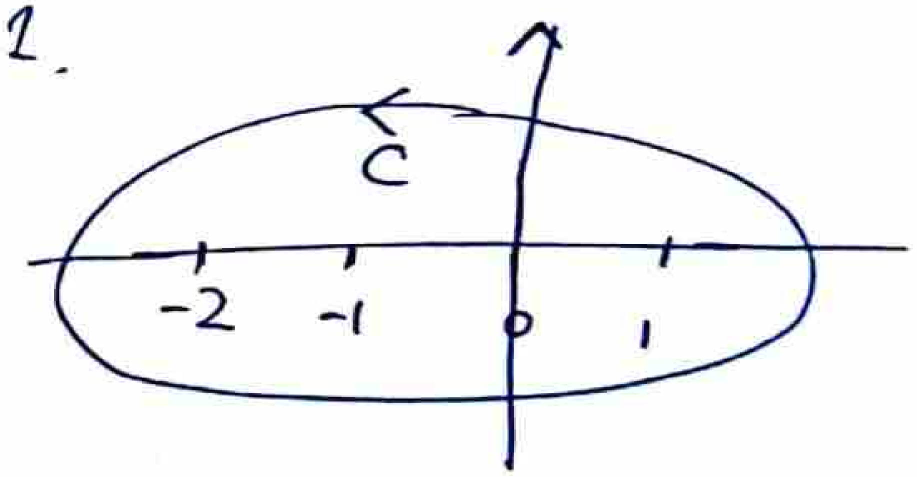
解 ① 支点: $F(z) = 2\,\mathrm{Log}\,z + \mathrm{Log}(z+1) - 3\,\mathrm{Log}(z-1) - \mathrm{Log}(z+2)$

$$\Delta_C F(z) = 2\Delta_C \mathrm{Log}\,z + \Delta_C \mathrm{Log}(z+1) - 3\Delta_C \mathrm{Log}(z-1) - \Delta_C \mathrm{Log}(z+2)$$

$$= i\left[2\Delta_C \mathrm{Arg}\,z + \Delta_C \mathrm{Arg}(z+1) - 3\Delta_C \mathrm{Arg}(z-1) - \Delta_C \mathrm{Arg}(z+2)\right]$$

故支点为 $z = -2, -1, 0, 1$,

考虑∞远点: 设 C 包含 $-2, -1, 0, 1$.



则 $\Delta_C F(z) = i\cdot[2\cdot 2\pi + 2\pi - 3\cdot 2\pi - 2\pi]$

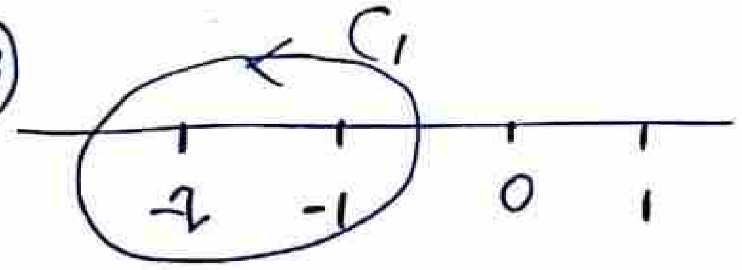
$= -2\pi i \neq 0$. 故∞是支点.

② 回忆：Ω 为 $F(z)$ 的单值域

$\Leftrightarrow$ Ω 中不包含闭曲线 C，使得 $\Delta_C F(z) \neq 0$.

问题：对于哪些 C，有 $\Delta_C F(z) = 0$?

③



若 C_1 仅包含 -1, 1, 则

应当是仅包含-1, -2？

$$\Delta_{C_1}\mathrm{Arg}(z+1)=2\pi$$

$$\Delta_{C_1}\mathrm{Arg}(z+2)=2\pi$$

$$\Delta_{C_1}\mathrm{Arg}\,z=0$$

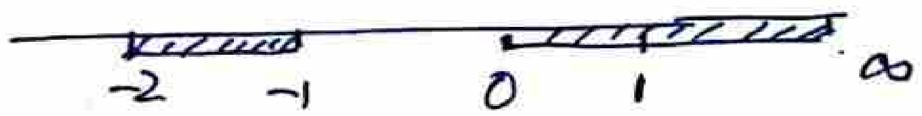
$$\Delta_{C_1}\mathrm{Arg}(z-1)=0.$$

故 $\Delta_{C_1}F(z)=i\cdot\left[2\cdot 0+2\pi-3\cdot 0-2\pi\right]=0.$

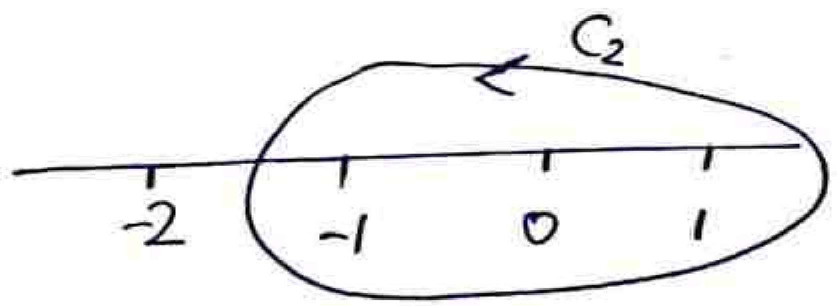
故 $F(z)$ 沿着曲线 C_1 的改变量为0.

从而: $D=\mathbb{C}\setminus\left([-2,-1]\cup[0,\infty)\right)$ 是单值域

图



④ 考虑 C_2:



若 C_2 仅包含 $-1, 0, 1$，不包含点 -2，则

$$\Delta_{C_2} \operatorname{Arg}(z+2) = 0$$

$$\Delta_{C_2} \operatorname{Arg}(z+1) = 2\pi$$

$$\Delta_{C_2} \operatorname{Arg} z = 2\pi$$

$$\Delta_{C_2} \operatorname{Arg}(z-1) = 2\pi$$

故 $\Delta_{C_2} F(z) = i\left[2\cdot 2\pi + 2\pi - 3\cdot 2\pi - 0\right] = 0$

故 $F(z)$ 沿着曲线 C_2 的变量为0.

从而 $D = \mathbb{C} \setminus \left((-\infty, -2] \cup [-1, 1] \right)$

例: $F(z) = \operatorname{Log} R(z)$, $R(z) = \prod_{i=1}^{m} (z-a_i)^{n_i}$, $n_i \in \mathbb{Z}$.

解: $F(z) = \sum_i n_i \operatorname{Log}(z-a_i)$

$$\Delta_C F(z) = \sum_i n_i \Delta_C \operatorname{Log}(z-a_i)$$

$$= \sum_{i\in\Lambda} n_i\, 2\pi i = 2\pi i \sum_{i\in\Lambda} n_i$$

$\Lambda = \{ i \mid a_i$ 在 C 内部 $\}$

$\Delta_C F(z) = 0$

$\Leftrightarrow$ 包含在 C 内部的点 a_i 的指数 n_i 和为 0

∞ 不是支点 $\Leftrightarrow$ 对任意充分大 C, $\Delta_C F(z) = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} n_i = 0$$

幂函数 $w=z^{\alpha}$

① 若 $\alpha=n\in\mathbb{N}$, $(z^n)'=nz^{n-1}$, z^{α}是 $\mathbb{C}$上全纯函数.

② 若 $\alpha=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, 则

$$\mathrm{Log}\,w=\alpha\,\mathrm{Log}\,z \Leftrightarrow e^{\mathrm{Log}\,w}=e^{\alpha\,\mathrm{Log}\,z}$$

$$\Leftrightarrow w=e^{\frac{1}{n}(\log|z|+i\,\mathrm{Arg}\,z)}$$

$$=|z|^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i}{n}(\arg z+2k\pi)}$$

$k=0,1,2,\cdots n-1.$

知 $w=z^{\frac{1}{n}}$ 有n个分支.

③ 若 $\alpha\in\mathbb{C}$，令 $\alpha=a+bi$，$a,b\in\mathbb{R}$.

$$W=e^{\alpha\,\mathrm{Log}\,z}=e^{(a+bi)(\log|z|+i\,\mathrm{Arg}\,z)}$$

$$=e^{a\log|z|-b\,\mathrm{Arg}\,z}\,e^{i(b\log|z|+a\,\mathrm{Arg}\,z)}$$

若 $b=0$，$a=n$，此时 $W=z^{\alpha}=z^{n}$ 单值函数.

若 $b=0$，$a=\frac{p}{q}$，则 $W=e^{\frac{p}{q}\log|z|}\,e^{i\frac{p}{q}\mathrm{Arg}\,z}$

$p,q\in\mathbb{Z}$，$(p,q)=1$

$$=|z|^{\frac{p}{q}}\,e^{i\frac{p}{q}\mathrm{Arg}\,z}$$

故有 q 个分支.

若 $b=0$，$a\in\mathbb{Q}^c$，则 $W=e^{a\log|z|}\,e^{ia(\arg z+2k\pi)}$

$$=|z|^{a}\cdot e^{ia\arg z}\cdot e^{ia2k\pi}$$

a 为无理数，k 为整数 $\Big\}\Rightarrow ka$ 不可能为整数 $\Rightarrow e^{ia2k\pi}$ 有无穷多值.

$\left.\begin{array}{l} a\text{为无理数} \\ k\text{为整数} \end{array}\right\} \Rightarrow ka$ 不可能为整数 $\Rightarrow e^{ia2k\pi}$ 有无穷多值.

此时 $w = z^{\alpha}$ 为无穷多值函数.

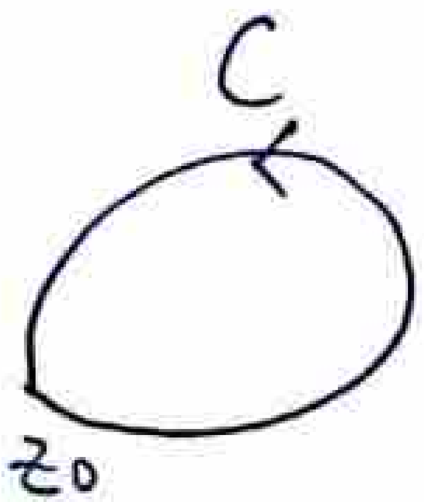
若 $b \neq 0$, 则 $|w| = e^{a\log|z| - b(\arg z + 2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$

故 $|w|$ 为无穷值函数, $\Rightarrow$ w 为无穷值函数.

例：若 $F(z)=\sqrt[n]{R(z)}$，$R(z)$有理函数，求单值域

解：$\Delta_C F(z) = \Delta_C\left(|R(z)|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n}\operatorname{Arg}R(z)}\right)$

$$= |R(z_0)|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n}\left(\operatorname{Arg}R(z_0)+\Delta_C \operatorname{Arg}R(z)\right)}$$



$$- |R(z_0)|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n}\operatorname{Arg}R(z_0)}$$

$$= |R(z_0)|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n}\operatorname{Arg}R(z_0)}\left[e^{\frac{i}{n}\Delta_C\operatorname{Arg}R(z)}-1\right]$$

$$\Delta_C F(z) = 0 \iff e^{\frac{i}{n}\Delta_C \operatorname{Arg} R(z)} = 1$$

$$\iff \frac{i}{n}\Delta_C \operatorname{Arg} R(z) = 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff \Delta_C \operatorname{Arg} R(z) = 2nk\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$$

设 $R(z) = \prod_{j=1}^{m} (z-a_j)^{n_j}$

$$\Delta_C \operatorname{Arg} R(z) = \Delta_C \operatorname{Arg} \prod_{j=1}^{m} (z-a_j)^{n_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} n_j \Delta_C \operatorname{Arg}(z-a_j)$$

$$= \sum_{j \in \Lambda} 2\pi n_j, \quad \Lambda = \{ j \mid a_j \text{在 } C \text{ 内部} \}.$$

而 $\Delta_C F(z) = 0 \iff 2\pi \sum_{j\in\Lambda} n_j$ 是 $2\pi n$ 的整数倍

$\iff \sum_{j\in\Lambda} n_j$ 是 n 的整数倍

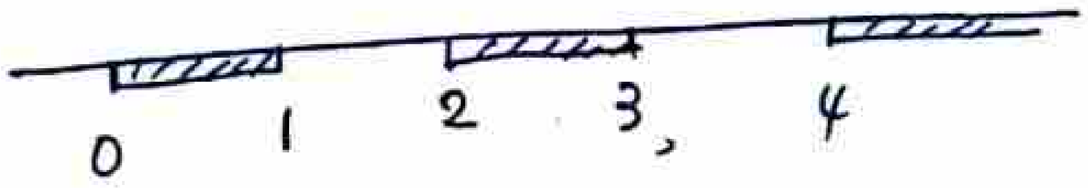
∞ 不是支点 $\iff$ ~~$\sum_{j\in\Lambda} n_j$ 是 n 的~~

$\sum_{j=1}^{m} n_j$ 是 n 的整数倍.

例: $f(z)=\sqrt{z(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)}$

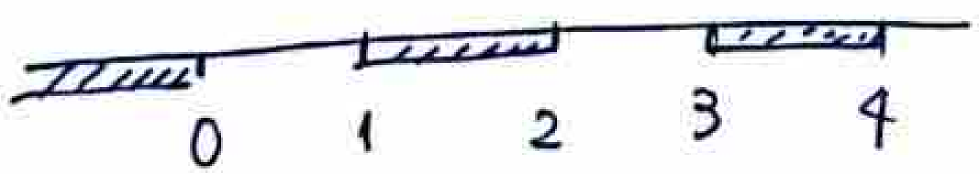
支点 $z=0,1,2,3,4.$

指数 $n_j=1,1,1,1,1$



单值域 $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{[0,1]\cup[2,3]\cup[4,+\infty)\}$

或者



单值域 $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{(-\infty,0]\cup[1,2]\cup[3,4]\}$.

例：已知 $f(z)=\sqrt[3]{z-1}$，求 $f(z)$ 的支点，若单值域 $D=\mathbb{C}\setminus(-\infty,1]$

取点 $z=2$ 取正值的分支在 $z=-1+i$ 的值.

解： $f(z)=|z-1|^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i}{3}\mathrm{Arg}(z-1)}$

当 $z=2$ 时，由题意

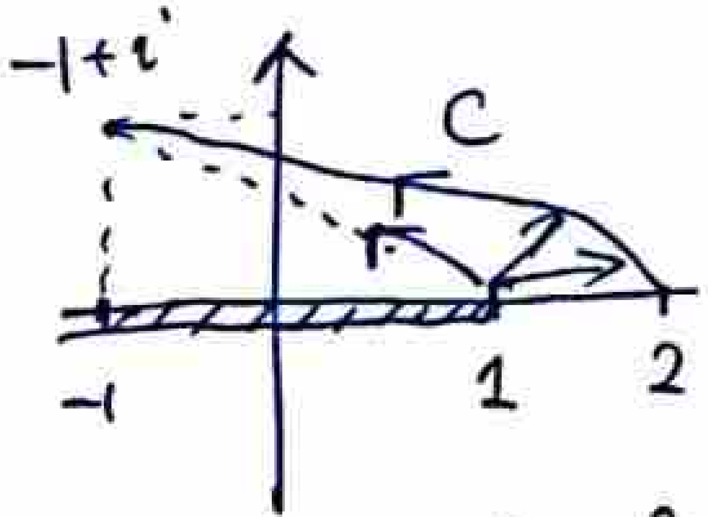
$$e^{\frac{i}{3}\mathrm{Arg}(z-1)}\Big|_{z=2}>0.$$

故可取 $\mathrm{Arg}(z-1)\Big|_{z=2}=0,\ \pm6\pi,\ \pm12\pi,\cdots$

即 $\mathrm{Arg}(z-1)\Big|_{z=2}=6k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$

当 $z=z_0$ 时.

$$f(z_0)=|z_0-1|^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i}{3}\mathrm{Arg}(z-1)}\Big|_{z=z_0}$$
$$=|z_0-1|^{\frac{1}{3}}\ e^{\frac{i}{3}\left(\mathrm{Arg}(z-1)\big|_{z=2}+\Delta_C\mathrm{Arg}(z-1)\right)}.$$



其中 C 为由 2 到 $-1+i$ 的曲线.

注意 $\Delta_C\mathrm{Arg}(z-1)=\pi-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$

$$故\ f(-1+i)=|-2+i|^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i}{3}(6k\pi+\pi-\mathrm{arctg}\frac{1}{2})}$$
$$=5^{\frac{1}{6}}e^{\frac{i}{3}(\pi-\mathrm{arctg}\frac{1}{2})}.$$

例：设 $f(z)=\sqrt{\dfrac{(1-z)^3}{z}}\quad\dfrac{1}{z+1}$

试确定 f 在 $[0,1]$ 上岸取正值的单值全纯分支 $f_0(z)$，并计算 $f_0(-i)$.

解：由于 $\dfrac{1}{z+1}$ 是单值函数，故只需考虑 $\varphi(z)=\sqrt{\dfrac{(1-z)^3}{z}}$.

① 确定 $\varphi(z)$ 的支点、单值域

$\varphi(z)$ 的奇点　$z=$　0，　1，　∞

指数：-1，　3.

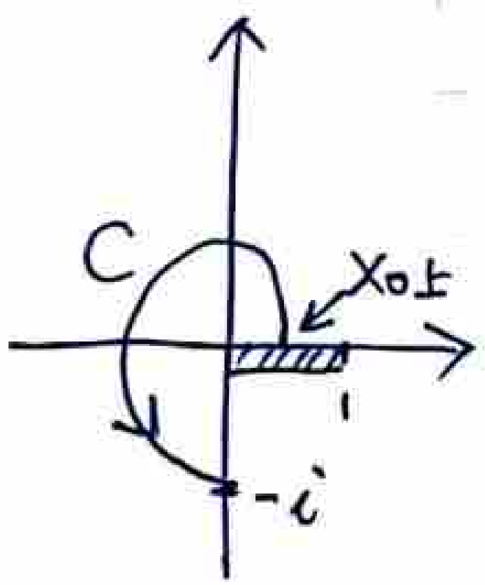
由于 $3-1=2$，故 ∞ 不是支点，故 $D=\mathbb{C}\setminus[0,1]$ 是单值域

②. 注意在 $[0,1]$ 上岸 $\varphi(z)$ 取正值. 设 $x_0 \in [0,1]$, 则 $\varphi(z)\Big|_{z=x_0上} > 0$.

$$\varphi(z) = |\varphi(z)|\, e^{i\,\mathrm{Arg}\,\varphi(z)}.$$

$$\mathrm{Arg}\,\varphi(z)\Big|_{z=-i} = \mathrm{Arg}\,\varphi(z)\Big|_{z=x_0上} + \Delta_C \mathrm{Arg}\,\varphi(z)$$

其中 C 为连接 x_0上 到 z 的在 D 中的任何曲线.



$$\Delta_C \mathrm{Arg}\,\varphi(z) = \frac{1}{2}\left(\Delta_C \mathrm{Arg}\,(1-z)^3 - \Delta_C \mathrm{Arg}\,z\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3\Delta_C \mathrm{Arg}(1-z) - \Delta_C \mathrm{Arg}\,z\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3\Delta_C \mathrm{Arg}(z-1) - \Delta_C \mathrm{Arg}\,z\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$= -\frac{3}{8}\pi$$

取 $\operatorname{Arg} \varphi(z)\Big|_{z=x_0上} = 0$，此时 $\varphi(z)\Big|_{z=x_0上} > 0$.

故 $\varphi(-i) = |\varphi(-i)| \cdot e^{-\frac{3}{8}\pi i} = 2^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{3}{8}\pi i}$

③ $f_0(-i) = \frac{1}{1+i}\varphi(-i) = \frac{1}{1-i} 2^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{3}{8}\pi i}$

说明：下述解法是否正确？

$$\varphi(z)=|\varphi(z)|\,e^{i\,\mathrm{Arg}\,\varphi(z)}$$

$$\mathrm{Arg}\,\varphi(z)=\arg\varphi(z)+2k\pi,\quad \arg\in[0,2\pi)$$

由初值 $z=x_0$ 上 时 φ 取正值，故可算出 k 值.

例如：取 $\arg\varphi(z)\Big|_{z=x_0\text{上}}=0$，和 $k=0$

可知 $\mathrm{Arg}\,\varphi(z)=\arg\varphi(z)\in[0,2\pi)$.

令 $z=-i$，则 $\arg\varphi(-i)=\arg\sqrt{\dfrac{(1+i)^3}{-i}}=\arg e^{\frac{5}{8}\pi i}=\frac{5}{8}\pi i$

从而 $\varphi(-i)=|\varphi(-i)|\,e^{\frac{5}{8}\pi i}$

但 $e^{\frac{5}{8}\pi i}\neq e^{-\frac{3}{8}\pi i}$，哪里有错误？

三角函数：设 $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} e^{iy} = \cos y + i\sin y \\ e^{-iy} = \cos y - i\sin y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos y = \frac{1}{2}\left(e^{iy} + e^{-iy}\right) \\ \sin y = \frac{1}{2i}\left(e^{iy} - e^{-iy}\right) \end{cases}$$

定义.

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right), \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

性质：① $\cos z$, $\sin z$ 都以 2π 为周期

② $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

③ $|\sin z|$, $|\cos z|$ 无界函数.

证③：令 $z = iy$，则

$$\cos iy = \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y}) \to +\infty, \quad (y \to \pm\infty)$$

说明：关于三角函数，在实数范围内成立的恒等式在复数范围内也成立，但不等式一般没有类似结论。

反三角函数. $w=\mathrm{Arcsin}\,z$ 为 $z=\sin w$ 所定义的反函数.

由 $z=\sin w=\frac{1}{2i}\left(e^{iw}-e^{-iw}\right)$ 知

$$e^{2iw}-2ize^{iw}-1=0$$ 解出

$$w=\frac{1}{i}\mathrm{Log}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$$

多值函数, 支点为 $z=\pm1,\infty$.

类似的，$\mathrm{Arc}\cos z = \frac{1}{i}\,\mathrm{Log}\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right)$，支点 $z = \pm 1, \infty$

$\mathrm{Arc}\tan z = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Log}\frac{i-z}{i+z}$ 支点为 $z = \pm i$

∞ 不是支点.

分式线性变换

定义： $w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$，$\Delta = ad-bc \neq 0$

若 $ad-bc=0$，则 $f(z)$ 为常数或无意义.

特殊情形：

① 平移，$w = z + a$，$(a \in \mathbb{C})$

② 旋转：$w = e^{i\theta} \cdot z$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

③ 伸缩：$w = r \cdot z$，$(r > 0)$

④ 反演：$w = \frac{1}{z}$，

定理：任一分式线性变换为上述四种变换的复合.

证：① 若 $c=0$，则：$\Delta = ad \neq 0 \Rightarrow a \neq 0, d \neq 0$.

$$f(z) = \frac{az+b}{d} = a'z+b', \quad a' = \frac{a}{d}, \quad b' = \frac{b}{d}$$

设 $a' = r_0 e^{i\theta_0}$，则

$$z \xrightarrow{z_1 = e^{i\theta_0} z} z_1 \xrightarrow{z_2 = r_0 z_1} z_2 \xrightarrow{w = z_2 + b'} w$$

旋转　　　伸缩　　　平移

$$w = a'z + b'$$

② 若 $c \neq 0$, 则

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + b - \frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2 z + cd}$$

$$z \xrightarrow{z_1 = c^2 z + cd} z_1 \xrightarrow{z_2 = \frac{1}{z_1}} z_2 \xrightarrow{z_3 = (bc-ad)z_2} z_3 \xrightarrow{w = z_3 + \frac{a}{c}} w = \frac{az+b}{cz+d}.$$

引理：$f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ 是 $\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ 的双射.

证：$f^{-1}: w\to\dfrac{dw-b}{-cw+a}$，$ad-bc\neq 0$.

则 f^{-1} 也是分式线性映射.

$f\circ f^{-1}=id$，$f^{-1}\circ f=id$.

故 f 为 $\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ 的双射.

引理：若分式线性映射有3个不动点，则必为恒等映射.

证：$\dfrac{az+b}{cz+d}=z \Rightarrow cz^2+(d-a)z+b=0$

有3个不同解 $\Rightarrow c=0,\ a=d,\ b=0$. 故为恒等映射

定理：在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上给定互异的三点 z_1, z_2, z_3 及 w_1, w_2, w_3，则存在唯一的分式线性映射 $w=f(z)$，使 $f(z_i)=w_i$，$(i=1,2,3)$

证：唯一性：$w=f_1(z)$，$w=f_2(z)$ 使得 $f_1(z_i)=w_i$，$f_2(z_i)=w_i$，$i=1,2,3$.

则 $z=f_2^{-1}f_1(z)$ 有3个不动点.

$\Rightarrow f_2^{-1}f_1=\mathrm{id}$

$\Rightarrow f_1$ 与 f_2 恒等.

存在性：① 构造 $g: (z_1, z_2, z_3) \to (1, 0, \infty)$

$$g(z) = \frac{z-z_2}{z-z_3} : \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

则 $g(z_1)=1$, $g(z_2)=0$, $g(z_3)=\infty$.

② 构造 $h: (w_1, w_2, w_3) \to (1, 0, \infty)$

$$h(w) = \frac{w-w_2}{w-w_3} : \frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}$$

③ 令 $w = h^{-1} \circ g$, $z \to h^{-1}(g(z))$

则 $w(z_i) = w_i$

定义：交比：$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \dfrac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$

则上述构造的映射为 $w = h^{-1}(g(z))$

$$\Leftrightarrow \quad h(w) = g(z)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{w - w_2}{w - w_3} : \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} = \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

$$\Leftrightarrow \quad (w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3)$$

引理：在任何分式线性变换下交比不变.

$$(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

证明：设 $w_2=f(z_2)$，$w_3=f(z_3)$，$w_4=f(z_4)$，

则 $g: z_i \to w_i \ (i=2,3,4)$ 的映射为

$$(w, w_2, w_3, w_4) = (z, z_2, z_3, z_4) \quad (*)$$

即 $g(z_i) = w_i$，$(i=2,3,4)$

依定义 $f(z_i) = w_i$，$(i=2,3,4)$

故 $g \equiv f$ 从而 $(*)$ 等价于

$$(g(z), w_2, w_3, w_4) = (z, z_2, z_3, z_4)$$

$$\Rightarrow (f(z), w_2, w_3, w_4) = (z, z_2, z_3, z_4) \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

例：求将 $(2,\ i,\ -2) \to (-1,\ i,\ 1)$ 的分式线性变换.

解： $(w,\ -1,\ i,\ 1) \to (z,\ 2,\ i,\ -2)$

$$\frac{w-i}{w-1} : \frac{-1-i}{-1-1} = \frac{z-i}{z+2} : \frac{2-i}{2+2}$$

几何性质：

引理：$\mathbb{C}$上直线与圆周可写为：

$$A z\bar{z} + \bar{B} z + B\bar{z} + C = 0, \quad A, C \in \mathbb{R}, \quad |B|^2 - AC > 0.$$

统称为圆周.

性质：分式线性变换将圆周变为圆周.

证：只要验证两种：$\begin{cases} w = az+b, \ (a \neq 0) \\ w = \frac{1}{z} \end{cases}$

性质：分式线性变换将圆周变为圆周.

证：只要验证两种：$\begin{cases} w = az+b, \ (a \neq 0) \\ w = \dfrac{1}{z} \end{cases}$

① 在 $w=\frac{1}{z}$ 下的像：

由于 $Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$，令 $w = \frac{1}{z}$

则：$A\frac{1}{w}\frac{1}{\bar{w}} + \bar{B}\frac{1}{w} + B\frac{1}{\bar{w}} + C = 0$

$\Leftrightarrow \quad C|w|^2 + \bar{B}\bar{w} + Bw + A = 0, \quad |B|^2 - AC > 0.$

也为圆周

② 在 $w=az+b$ 下的像. 由于 $z=\frac{w-b}{a}$

代入 $Az\bar{z}+\bar{B}z+B\bar{z}+C=0$.

$$A\frac{\bar{w}-\bar{b}}{\bar{a}}\cdot\frac{w-b}{a}+\bar{B}\cdot\frac{w-b}{a}+B\frac{\bar{w}-\bar{b}}{\bar{a}}+C=0.$$

整理: $A|w|^2+(\bar{B}\bar{a}-A\bar{b})w+(Ba-Ab)\bar{w}$

$+(A|b|^2+C|a|^2-\bar{B}\bar{a}b-Ba\bar{b})=0.$

注意 $|B'|^2-A'C'$

$=|Ba-Ab|^2-A(A|b|^2+C|a|^2-\bar{B}\bar{a}b-Ba\bar{b})$.

$=(|B|^2-AC)|a|^2>0$

故像为圆周.

定理：四点 z_1, z_2, z_3, z_4 共圆 $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z_1, z_2, z_3, z_4)=0$.

证：① 令 $f(z)=(z, z_2, z_3, z_4)$，则 $f(z_2)=1$, $f(z_3)=0$, $f(z_4)=\infty$.

引理：过 $1, 0, \infty$ 的圆周为实轴.

故 f 将经过 z_2, z_3, z_4 的圆周映为过 $1, 0, \infty$ 的圆周.

引理证明： $A|z|^2+\bar{B}z+B\bar{z}+C=0$

过 0： $C=0$

过 1： $A+2\mathrm{Re}\,B=0$.

过 ∞： 即令 $z=\frac{1}{w}$，则

$$A\frac{1}{|w|^2}+\bar{B}\frac{1}{w}+B\frac{1}{\bar{w}}=0$$ 过 $w=0$ 点…

$$A+\bar{B}\bar{w}+Bw=0$$ 过 $w=0$ 点…

从而令 $w=0$，得 $A=0$，故 $\mathrm{Re}\,B=0$.

令 $B=ib$，$b\in\mathbb{R}$，$b\neq 0$ 故由 $\bar{B}z+B\bar{z}=0$ 得

$$-ibz+ib\bar{z}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\bar{z}$$ （实轴）.

② 定理证明：

若 $\operatorname{Im}(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$，则 $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$

令 $t = (z_1, z_2, z_3, z_4)$，则

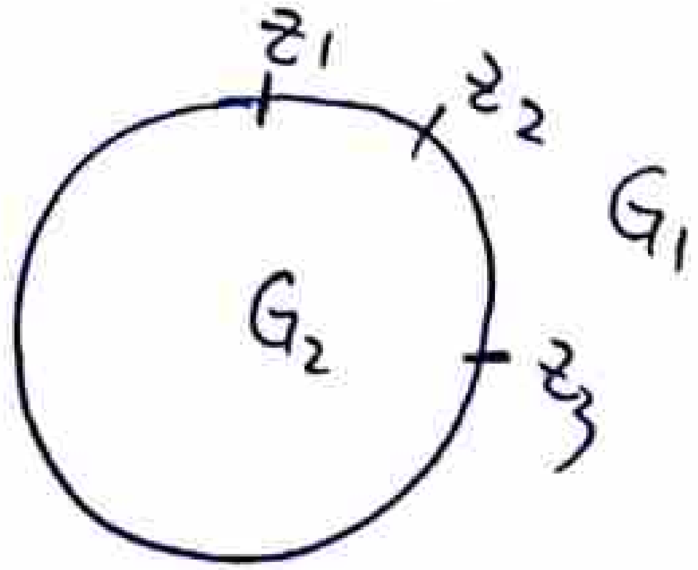
f^{-1}：实轴 $\longrightarrow$ 由 z_2, z_3, z_4 所确定的圆周

$t \longrightarrow z_1 = f^{-1}(t)$ 在圆 z_2, z_3, z_4 上.

故 $f(z_1) = t \in \mathbb{R}$. 可导出 z_1, z_2, z_3, z_4 四点共圆.

若 z_1, z_2, z_3, z_4 共圆，则 f 将该圆映为过 $1, 0, \infty$ 的圆周，故 $f(z_1) \in \mathbb{R}$，即 $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

问题：如何确定 $f(z)=(z,z_2,z_3,z_4)$ 在圆内外的符号？



若 $z_1\to z_2\to z_3$，则称 G_1 为左边，G_2 右边

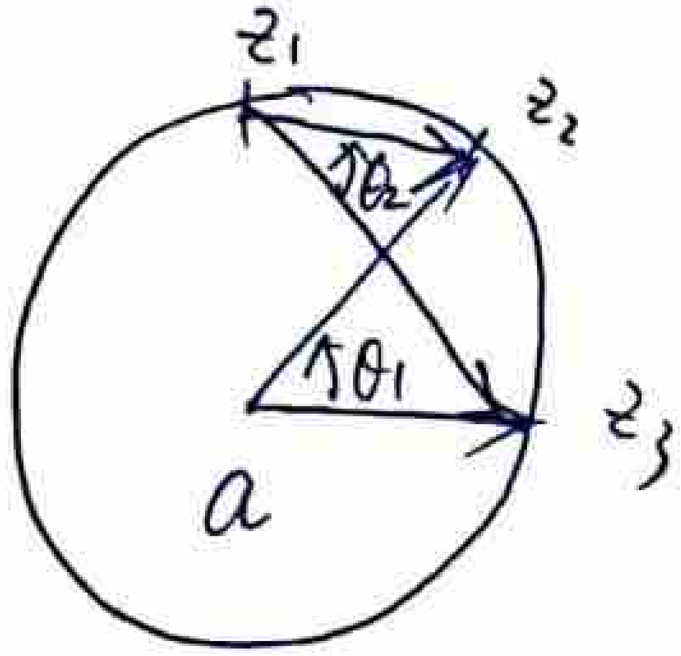
若 $z_3\to z_2\to z_1$，则称 G_2 左边，G_1 右边.

定理：设 z_1,z_2,z_3 为 $\overline{\mathbb{C}}$ 上圆周 γ 的有序三点，则关于

$z_1\to z_2\to z_3$ 右边的点有 $\operatorname{Im}(z,z_1,z_2,z_3)>0$

$z_1\to z_2\to z_3$ 左边的点有 $\operatorname{Im}(z,z_1,z_2,z_3)<0$.

证: $\operatorname{Arg}\frac{z}{w} = \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} w$ 表示向量 $\vec{Ow}$ 转动到 $\vec{Oz}$ 的角度.



$$\operatorname{Arg}\big((a, z_1, z_2, z_3)\big)$$

$$= \operatorname{Arg}\left(\frac{a-z_2}{a-z_3} : \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}\right)$$

$$= \operatorname{Arg}\frac{a-z_2}{a-z_3} - \operatorname{Arg}\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

$$= \operatorname{Arg}\frac{z_2-a}{z_3-a} - \operatorname{Arg}\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$$

注意 $\theta_1 \in (0, 2\pi)$.

$$= \theta_1 - \theta_2 = \theta_1 - \frac{\theta_1}{2} = \frac{\theta_1}{2} \in (0, \pi)$$

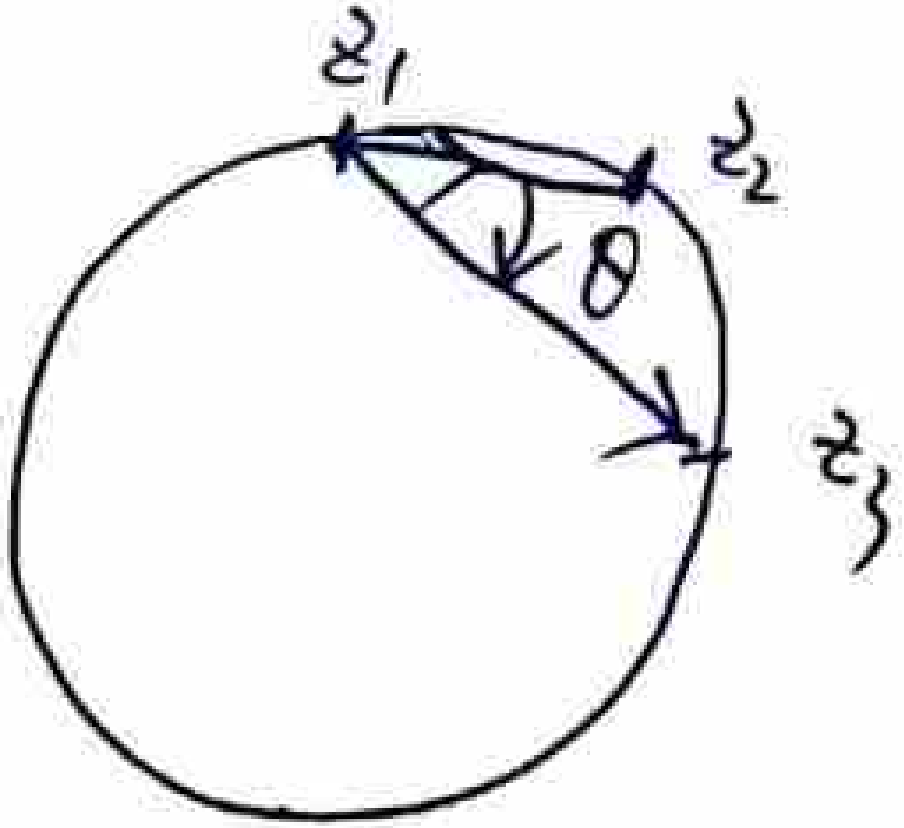
$$\Rightarrow \operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0$$

考虑左边: $(\infty, z_1, z_2, z_3) = \dfrac{\infty - z_2}{\infty - z_3} : \dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$

$$= \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$$

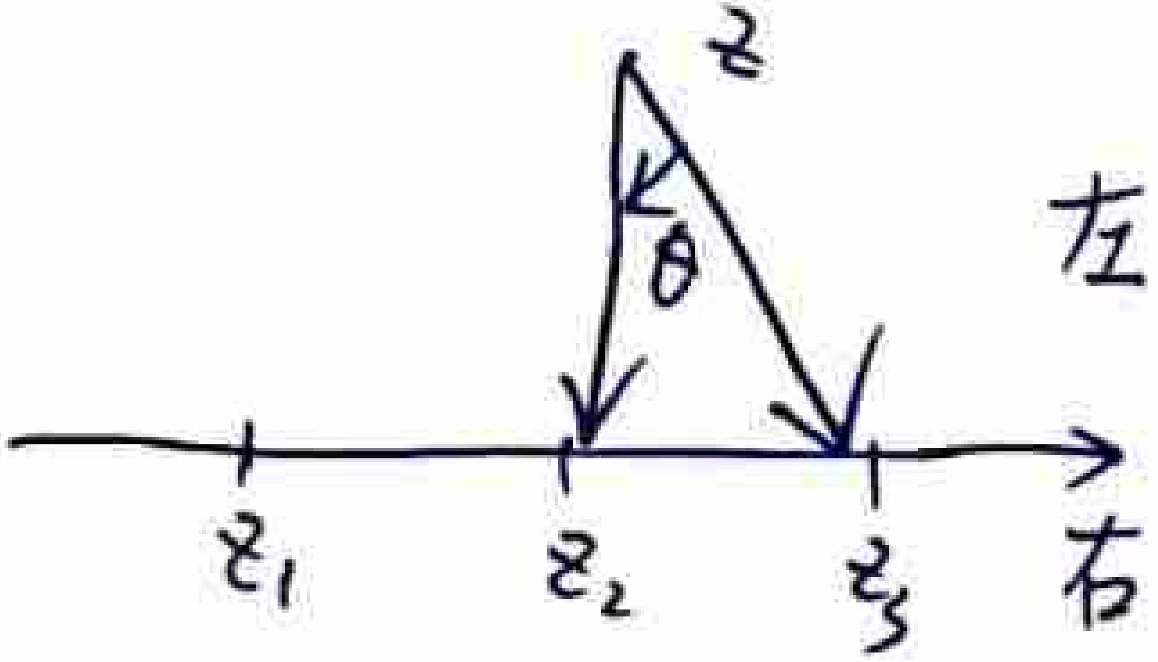
$$= \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$= \theta \in (-\pi, 0).$$



故 $\operatorname{Im}(\infty, z_1, z_2, z_3) < 0$.

若 z_1, z_2, z_3 在一条直线上.



$$\operatorname{Arg}(z, z_1, z_2, z_3) = \operatorname{Arg}\frac{z_2 - z}{z_3 - z} - \operatorname{Arg}\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$$

$$= \operatorname{Arg}\frac{z_2 - z}{z_3 - z} - 0 = \theta \in (-\pi, 0)$$

而 $\operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3) < 0$.

推论：若 $f: z_i \to w_i$ $(i=1,2,3)$，则 f 将走向 $z_1 \to z_2 \to z_3$ 左(右)侧分别映为 $w_1 \to w_2 \to w_3$ 的左(右)侧.

保对称点

定义：称 z_1, z_2 关于圆 $|z-a|=R$ 对称，若 $z_2-a=\dfrac{R^2}{\bar{z}_1-\bar{a}}$

定理：① z_1, z_2 关于圆 $Az\bar{z}+B\bar{z}+\bar{B}z+C=0$ 对称

$\Leftrightarrow A z_1\bar{z}_2+B\bar{z}_2+\bar{B}z_1+C=0$

② 若分式线性变换将圆 γ_1 映为 γ_2，则该变换将 γ_1 的对称点映为 γ_2 的对称点。

证明：① 设 $A\neq 0$，则 z_1, z_2 关于圆对称

$\Leftrightarrow (z_2-a)(\bar{z_1}-\bar{a})=R^2$

$\Leftrightarrow z_2\bar{z_1}-z_2\bar{a}-a\bar{z_1}+|a|^2-R^2=0.$

下证：

命题：设直线 L 的方程为 $\bar{B}z+B\bar{z}+C=0$ $(B\neq 0, C\in\mathbb{R})$，

则 z_1, z_2 关于 L 对称 $\Leftrightarrow \bar{B}z_1+B\bar{z_2}+C=0.$

下证：

命题：设直线 L 的方程为 $\overline{B}z+B\overline{z}+C=0$ $(B\neq 0,\ C\in\mathbb{R})$，

则 z_1, z_2 关于 L 对称 $\Leftrightarrow \overline{B}z_1+B\overline{z_2}+C=0$.

注意：①若 $z_1=r_1e^{i\theta_1}=x_1+iy_1$

$z_2=r_2e^{i\theta_2}=x_2+iy_2$

则：$\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=\mathrm{Re}(z_2\overline{z_1})=x_1x_2+y_1y_2$

$=r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)$.

故 $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$ 表示 $\overrightarrow{Oz_1}, \overrightarrow{Oz_2}$ 两向量的内积.

② 若直线方程为 $\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+C=0\ (\beta\neq 0)$，则 $\overrightarrow{O\beta}$ 为直线的法向量.

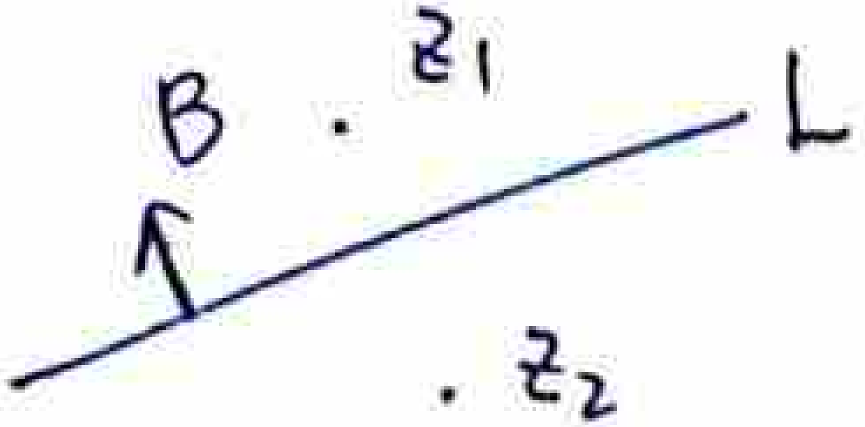
由 $ax+by+c=0$，$(a,b)\neq(0,0)$

知 $\frac{a}{2}(z+\bar{z})+\frac{b}{2i}(z-\bar{z})+c=0$.

故 $\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+C=0$，$\beta=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}i$

故 $\overrightarrow{O\beta}\parallel(a,b)$，$(a,b)$ 为 $ax+by+c=0$ 的法向量.

命题证明： z_1, z_2 关于直线 L 对称



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{z_1 z_2} \perp \text{直线 } L & ① \\ z_1, z_2 \text{ 的中点落在 } L \text{ 上.} & ② \end{cases}$$

① $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{z_1 z_2}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 平行 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{z_1 z_2}$ 与 iB 正交.

故 $\mathrm{Re}\left(iB(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)\right) = 0$.

即 $iB(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - i\bar{B}(z_2 - z_1) = 0$.

故 $B\bar{z}_2 + \bar{B} z_1 = B\bar{z}_1 + \bar{B} z_2$.

② $\Leftrightarrow \quad \bar{B}\,\dfrac{z_1+z_2}{2} + B\,\dfrac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{2} + C = 0.$

$$\bar{B} z_1 + B\bar{z}_2 + B\bar{z}_1 + B\bar{z}_2 + 2C = 0.$$

$\Rightarrow$ 有 $\quad \bar{B} z_1 + B\bar{z}_2 + C = 0.$

反之，若 z_1, z_2 满足 $\bar{B} z_1 + B\bar{z}_2 + C = 0$，则

$$B\bar{z}_1 + \bar{B} z_2 + C = 0.$$

两式相加得 ②

两式相减：$\bar{B} z_1 + B\bar{z}_2 = B\bar{z}_1 + \bar{B} z_2$.

得 ①.

故 z_1, z_2 关于直线 L 对称.

定理证明② 设分式线性变换为 $w=\frac{1}{z}$,

则 z_1,z_2 关于 γ_1: $Az\bar{z}+B\bar{z}+\bar{B}z+C=0$ 对称.

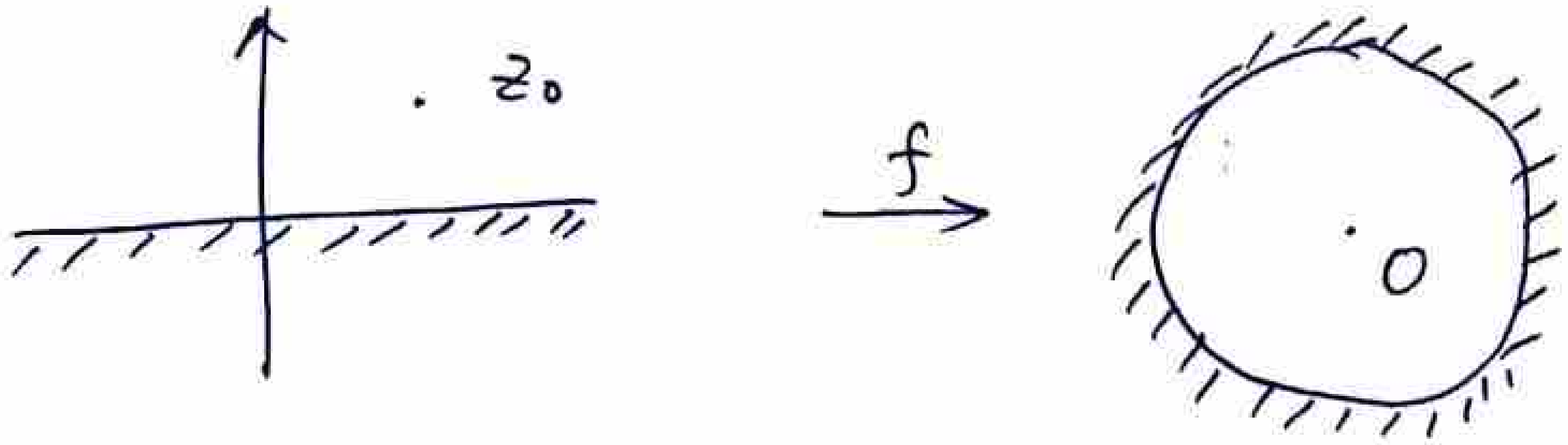
$$\Leftrightarrow A z_1\bar{z_2}+B\bar{z_2}+\bar{B}z_1+C=0.$$

$$\Leftrightarrow A\frac{1}{w_1}\cdot\frac{1}{\bar{w_2}}+B\frac{1}{\bar{w_2}}+\bar{B}\frac{1}{w_1}+C=0.$$

$$\Leftrightarrow A+Bw_1+\bar{B}\bar{w_2}+Cw_1\bar{w_2}=0.$$

$\Leftrightarrow$ w_1,w_2 关于 γ_2: $Cw\bar{w}+Bw+\bar{B}\bar{w}+A=0$ 对称.

例：求将上半平面 $\mathbb{H}$ 映为单位圆 $\mathbb{D}$ 的分式线性映射.



解：存在 z_0，使 $f(z_0)=0$

$f(\overline{z_0})=\infty$.　　令 $f(a)=b$.

则将 $(a, z_0, \overline{z_0}) \to (b, 0, \infty)$ 的分式为：

$$(z, a, z_0, \overline{z_0}) = (w, b, 0, \infty)$$

$$\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}} : \frac{a-z_0}{a-\overline{z_0}} = \frac{w-0}{w-\infty} : \frac{b-0}{b-\infty} = \frac{w}{b}.$$

故 $w = k \cdot \dfrac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$

由于 f 将实轴映为单位圆，故令 $z=x\in\mathbb{R}$，则

$$\left|k\cdot\frac{x-z_0}{x-\bar{z}_0}\right|=1 \quad\Rightarrow\quad |k|=1 \quad\Rightarrow\quad k=e^{i\theta},\ (\theta\in\mathbb{R})$$

故 $w=e^{i\theta}\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}\ (\theta\in\mathbb{R},\ z_0\in\mathbb{H})$.

例：求将单位圆映为单位圆的分式.

解：令 $f(z_0)=0$, $f\left(\frac{1}{\bar{z}_0}\right)=\infty$, $f(a)=b$

故将 $\left(a, z_0, \frac{1}{\bar{z}_0}\right) \to (b, 0, \infty)$ 的分式为：

$$\left(z, a, z_0, \frac{1}{\bar{z}_0}\right) = (w, b, 0, \infty)$$

$$\frac{z-z_0}{z-\frac{1}{\bar{z}_0}} : \frac{a-z_0}{a-\frac{1}{\bar{z}_0}} = \frac{w-0}{w-\infty} : \frac{b-0}{b-\infty} = \frac{w}{b}$$

$$\Rightarrow w = K \cdot \frac{z-z_0}{z-\frac{1}{\bar{z}_0}} = K' \cdot \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$$

当 $|z|$ 时 $|w|=1$，故

$$1 = |k'| \cdot \left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right| = |k'| \cdot \frac{|z-z_0|}{|z\bar{z}-\bar{z}_0 z|}$$

$$= |k'| \frac{|z-z_0|}{|z| \cdot |\bar{z}-\bar{z}_0|} = |k'| \quad \text{故 } k' = e^{i\theta} \ (\theta \in \mathbb{R}).$$

故 $w = e^{i\theta} \dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z} \quad (|z_0|<1,\ \theta \in \mathbb{R}).$

共形映射总结

1. 分式线性映射 $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$

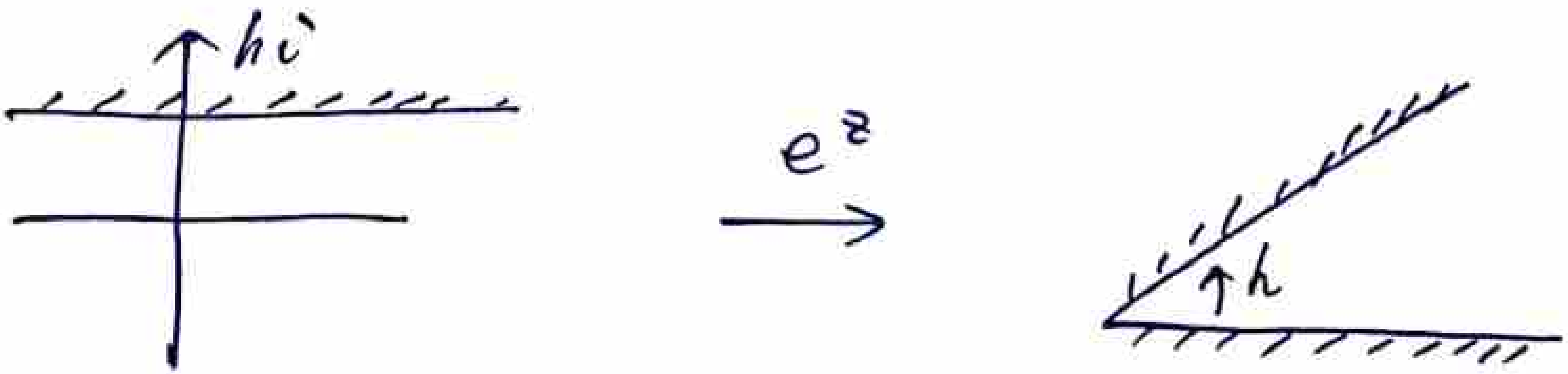
将 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的圆周映为圆周.

2. 指数函数. $w=e^z$

令 $z=x+iy$, $w=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}$, $\begin{cases} r=e^x \\ \theta=y. \end{cases}$

$$\{(x,y)\mid 0<y<h\}\ (0<h\le 2\pi) \longrightarrow \{(r,\theta)\mid r>0,\ 0<\theta<h\}.$$

直角坐标   极坐标.



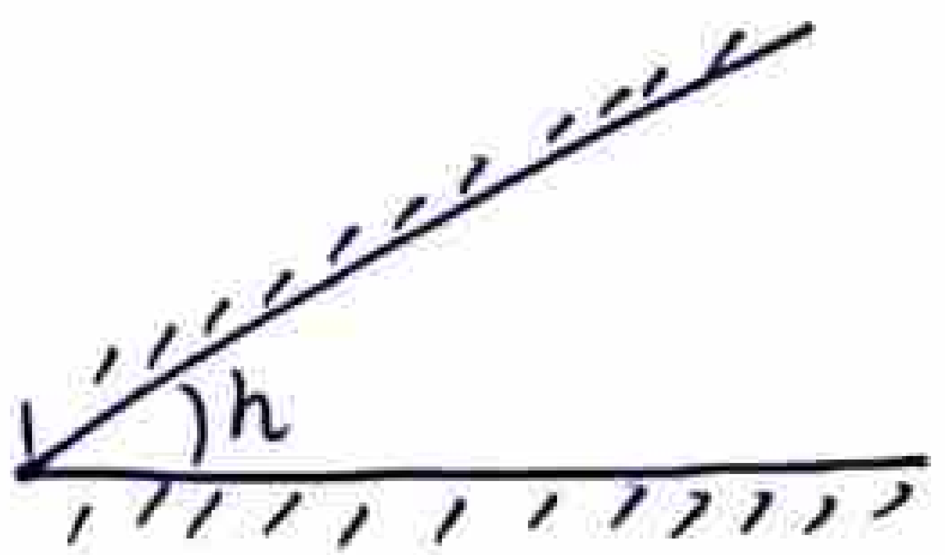
若 $h>2\pi$, 则 $w=f(z)$ 不是单射, 故不是共形映射.

3. 对数函数 $\quad w = \mathrm{Log}\, z$

令 $z=(r,\theta)$, $\quad w = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$

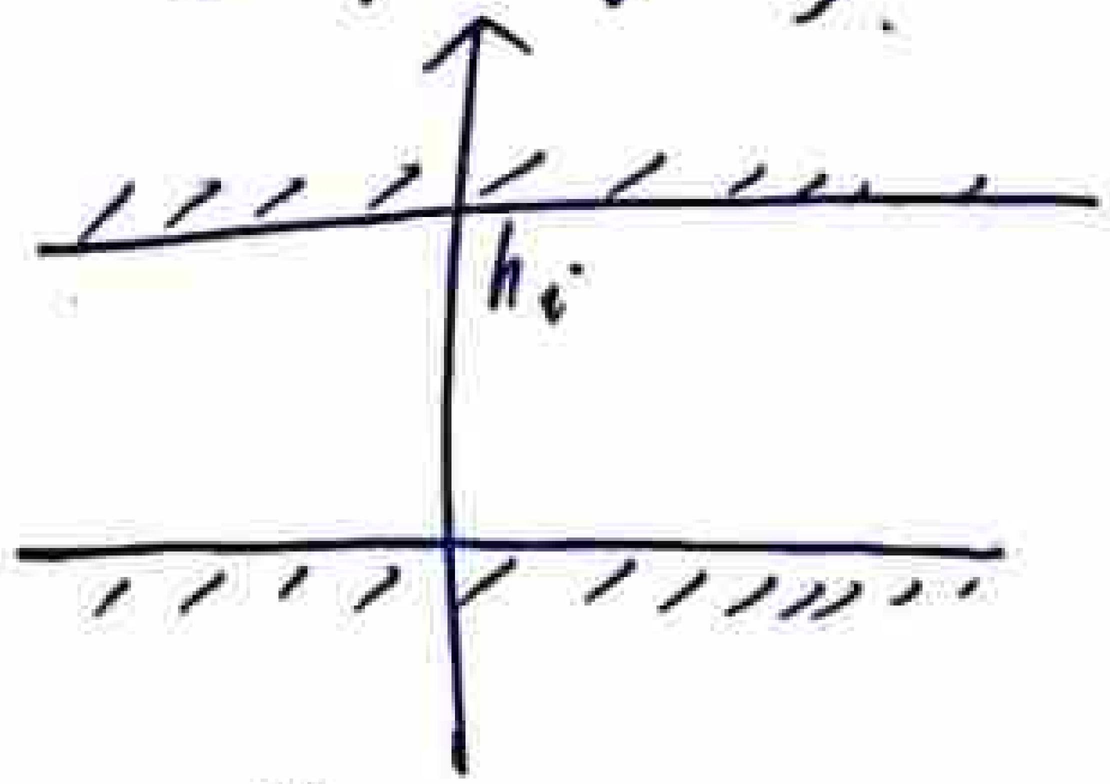
$$= \log|z| + i\arg z, \quad 0 \le \arg z < 2\pi.$$

$$\{(r,\theta) \mid 0<\theta<h\} \ (0<h\le 2\pi) \longrightarrow \{(x,y) \mid 0<y<h\}.$$



扇形

$\xrightarrow{\mathrm{Log}\, z}$



带状

4. 幂函数 $w=z^n$, $n\geq 2$.

令 $z=re^{i\theta}$, $w=r^n e^{in\theta}$

$$\Omega=\{(r,\theta)\mid 0<\theta<\alpha\}\xrightarrow{z^n}\{(\rho,\tilde{\theta})\mid 0<\tilde{\theta}<n\alpha\},\ (n\alpha\leq 2\pi)$$

扇形　　　　扇形(角度扩大n倍).

单叶域: $z_1^n=z_2^n \iff e^{in\theta_1}=e^{in\theta_2}$

$$\iff e^{in(\theta_1-\theta_2)}=1$$

$$\iff \theta_1-\theta_2=\frac{2k\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z}.$$

故若设 $0<\alpha<\frac{2\pi}{n}$, 则 Ω 中不存在两点 z_1, z_2, 使得

$$|\theta_1-\theta_2|=\frac{2k\pi}{n}.$$

5 根式函数 $w = z^{\frac{1}{n}}$ $(n \in \mathbb{N})$ $n \geq 2$.

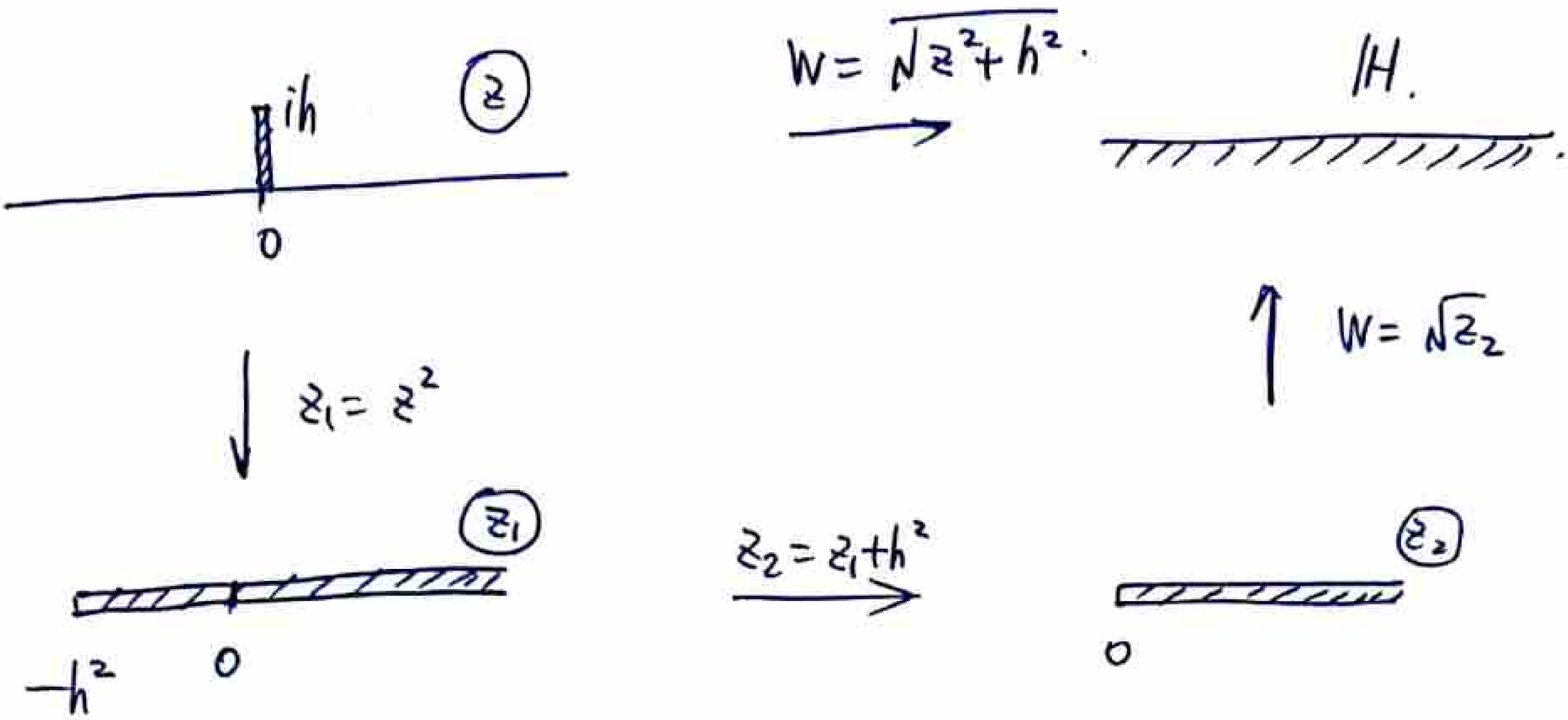
令 $z = re^{i\theta}$, $w = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$.

$$\{(r,\theta) \mid 0 < \theta < \alpha\} \xrightarrow{w = z^{\frac{1}{n}}} \{(\rho, \tilde{\theta}) \mid 0 < \tilde{\theta} < \frac{\alpha}{n}\} \quad (0 < \alpha \leq 2\pi)$$

扇形 扇形.

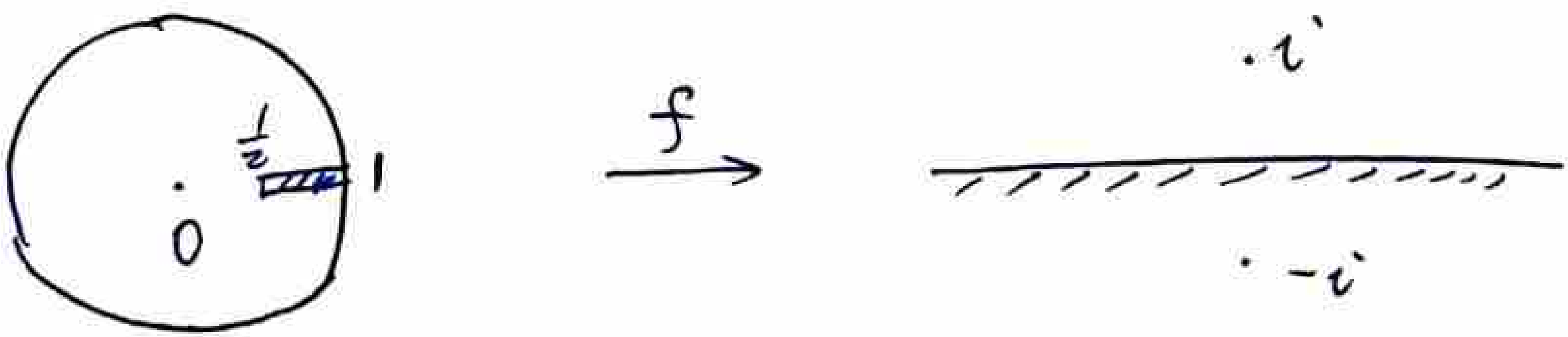
例：设 $\mathbb{H}$ 表示上半平面，$D = \mathbb{H} \setminus [ih, 0]$ $(h>0)$.

求将 D 映为 $\mathbb{H}$ 的共形变换.



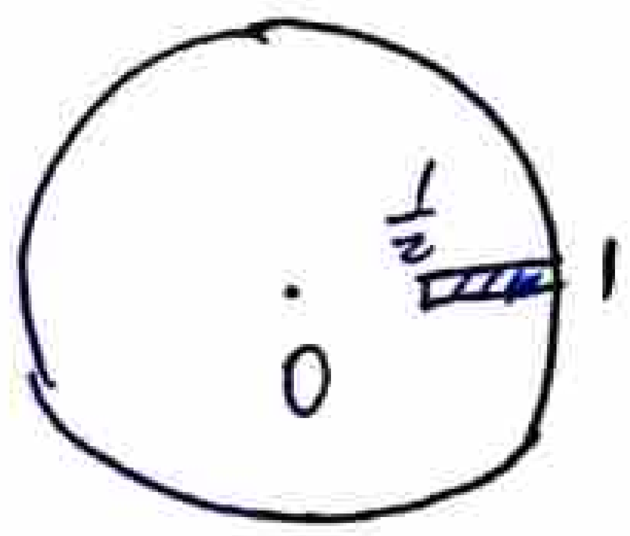
例：求将 $|z|<1$ 去掉 $[\frac{1}{2},1]$ 的区域映为上半平面的共形变换。

解：

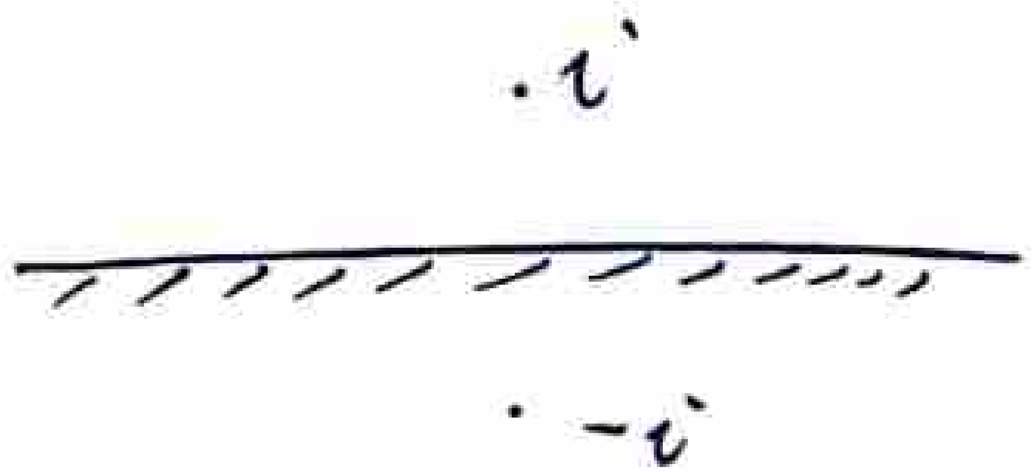


例：求将 $|z|<1$ 去掉 $[\frac{1}{2},1]$ 的区域映为上半平面的共形变换

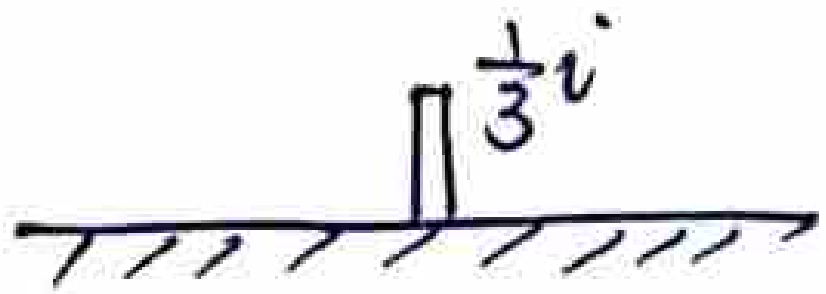
解：



$\xrightarrow{f}$



$$z_1 = i\,\frac{1-z}{1+z}$$



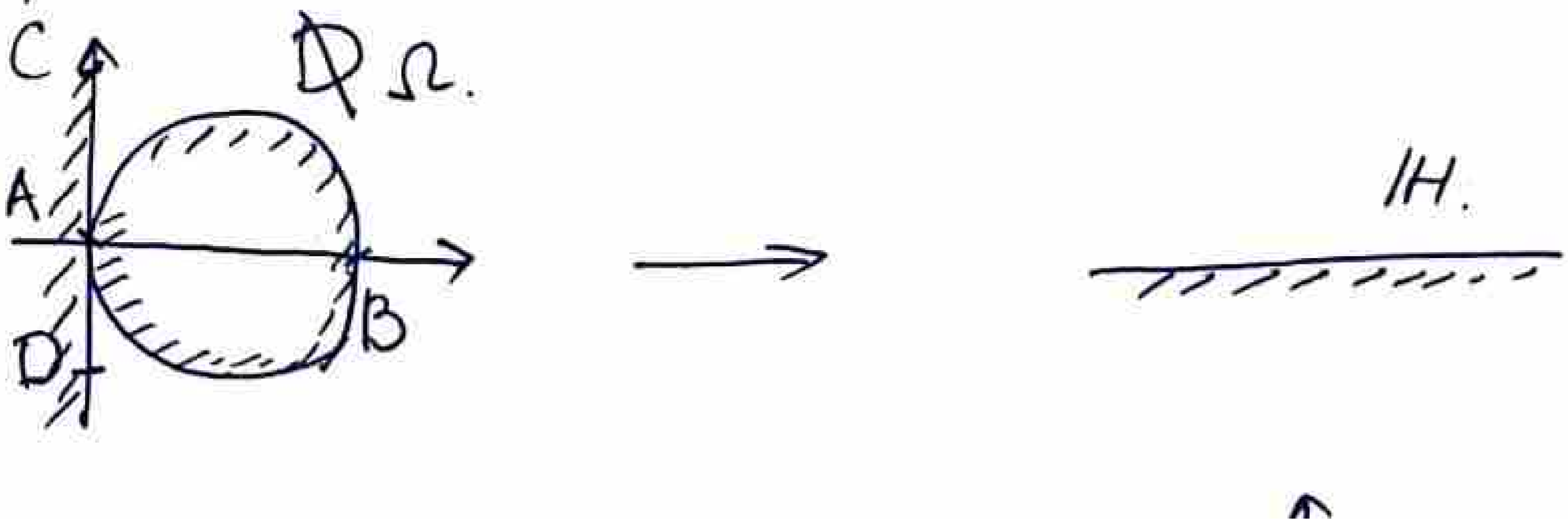
$$W = \sqrt{z_1^2 + \frac{1}{9}}$$

$0 \to i$

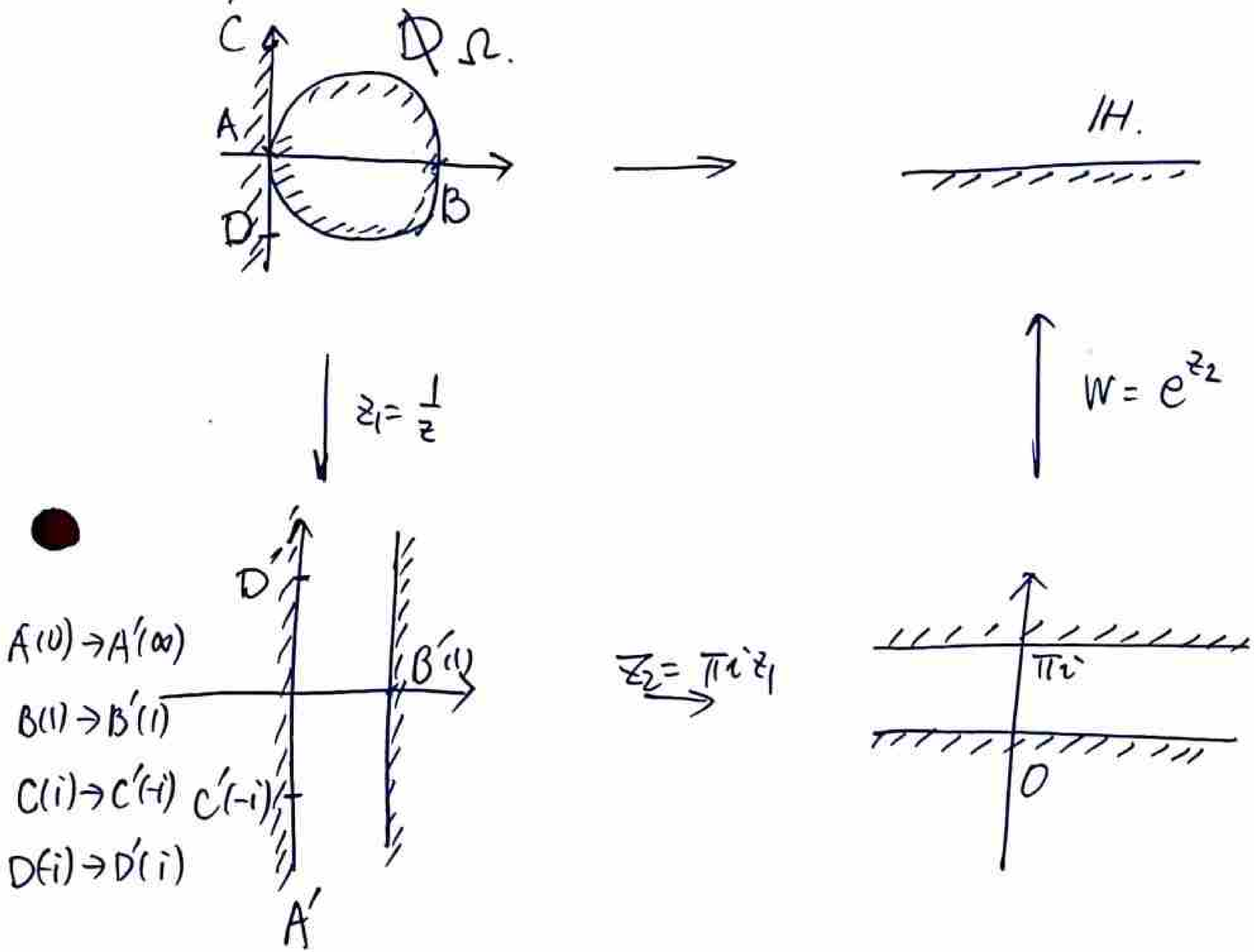
$1 \to 0$

$\infty \to -i$

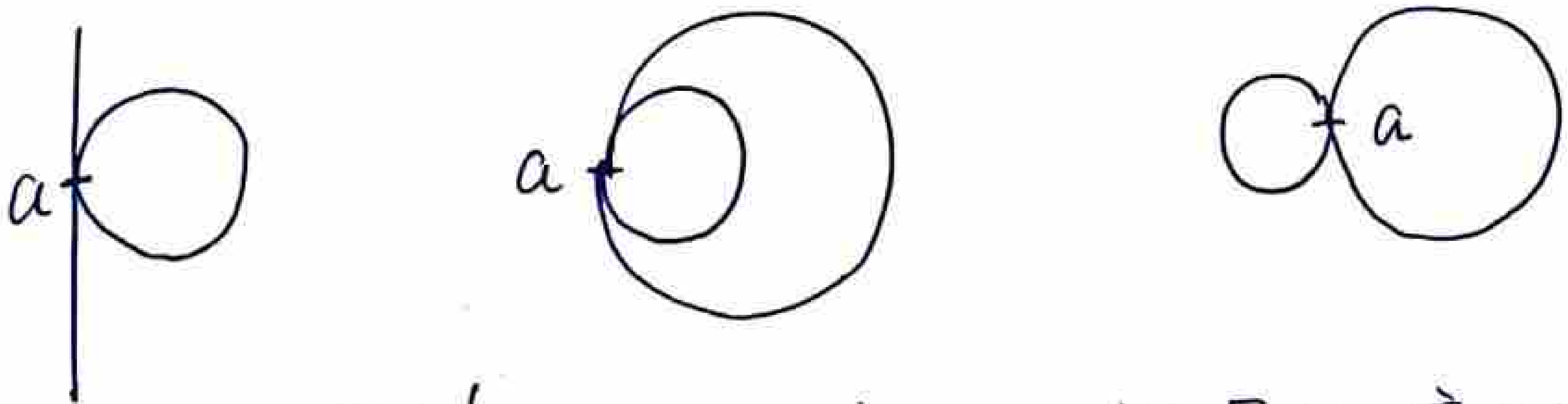
例：设 Ω 是 $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ 与虚轴围成的无界区域，求 $\Omega \to \mathbb{H}$ 的共形映射.



例：设 Ω 是 $|z-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$ 与虚轴围成的无界区域，求 $\Omega \to \mathbb{H}$ 的共形映射.

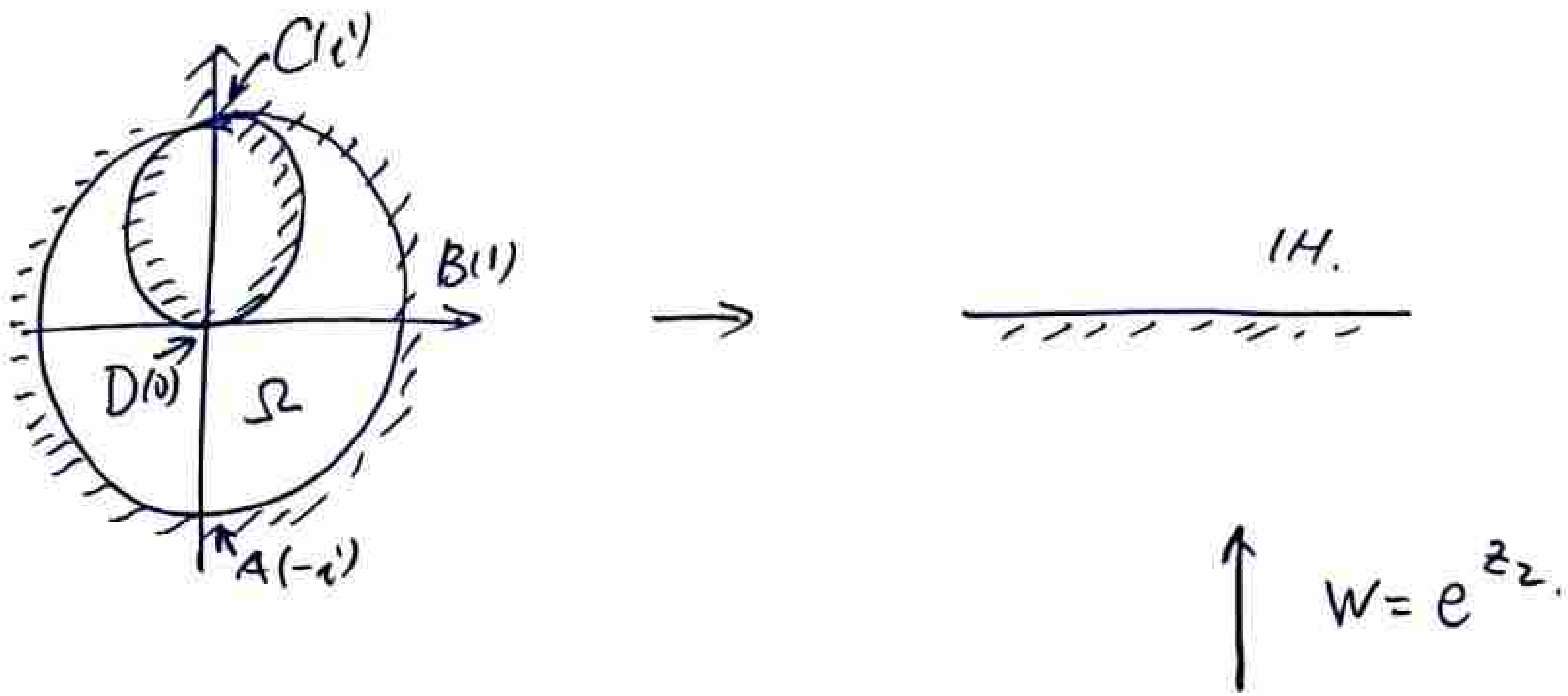


说明：若两圆相切，如：

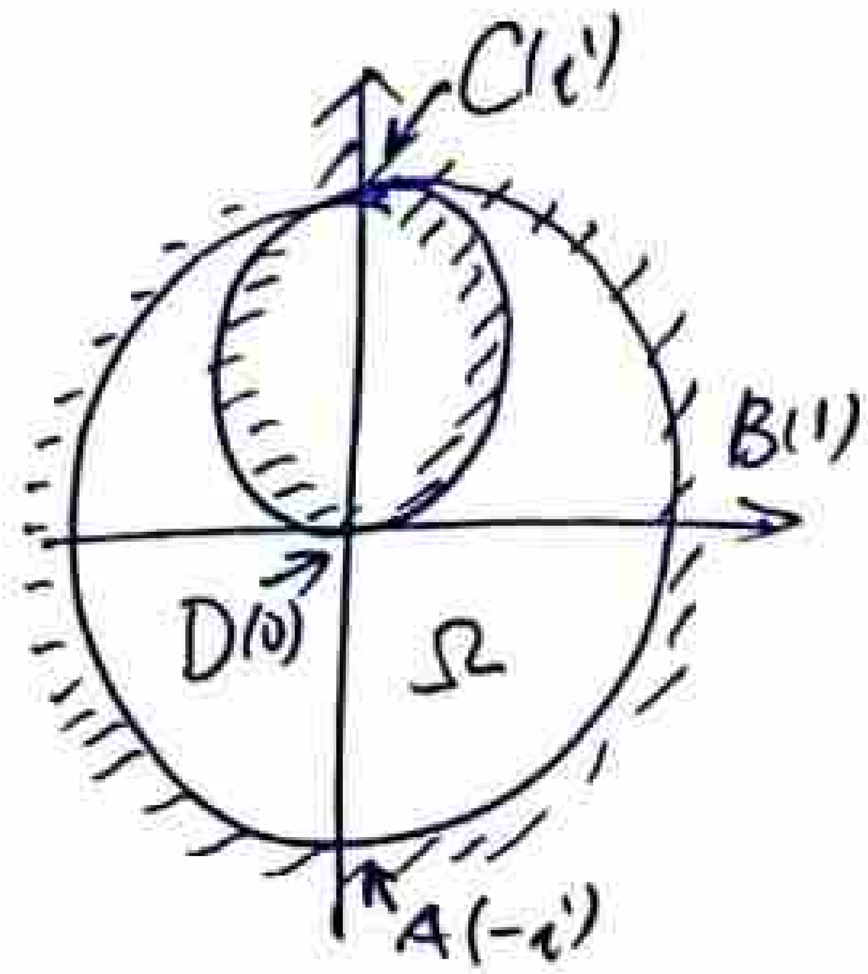


令 $w=\dfrac{cz+d}{z-a}$，将 a 变为 ∞，则两圆相切变为两平行直线。

例:

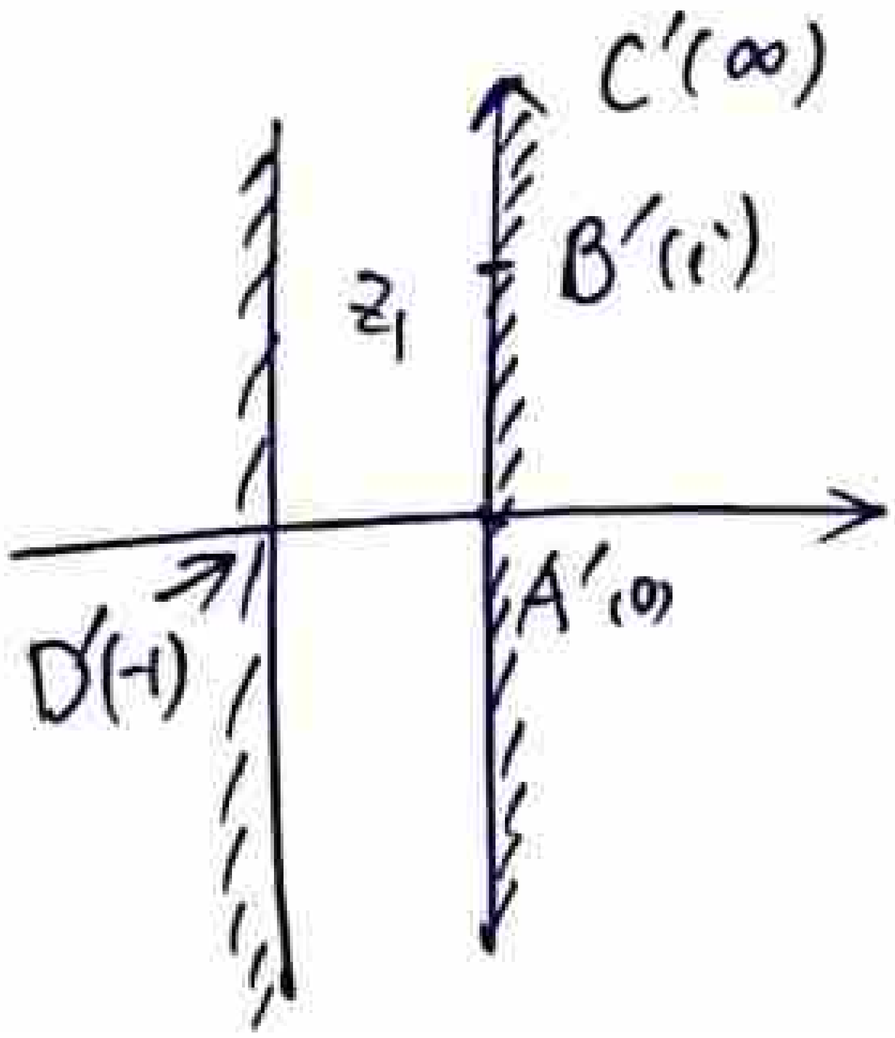


例:

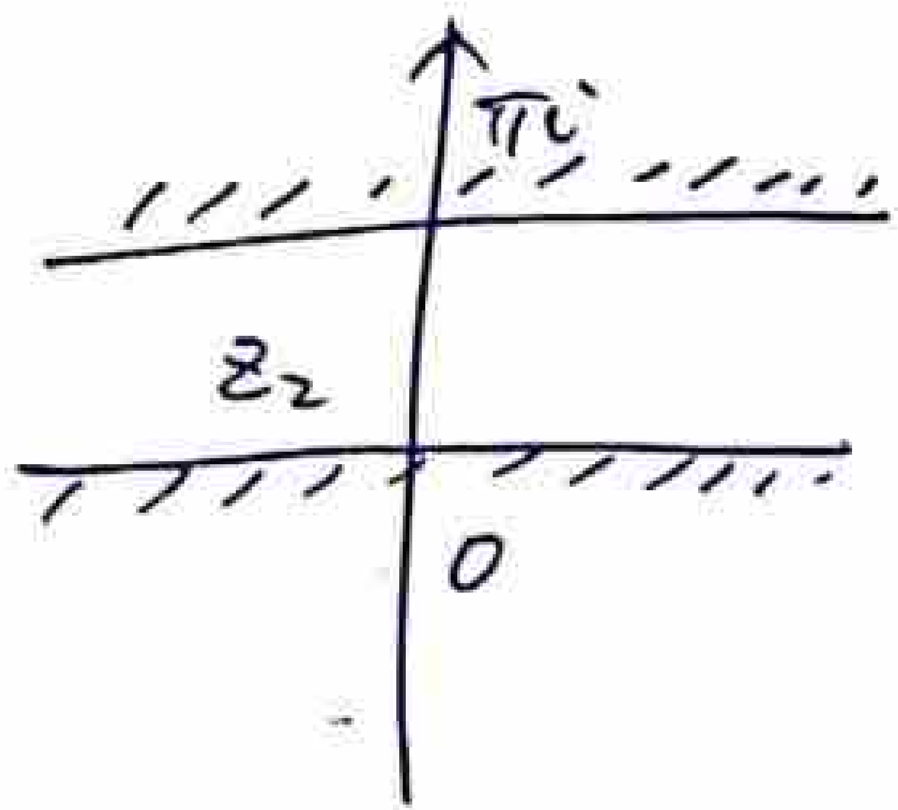


$\longrightarrow$

$\downarrow$ $z_1 = \dfrac{z+i}{z-i}$ 虚轴 → 实轴.

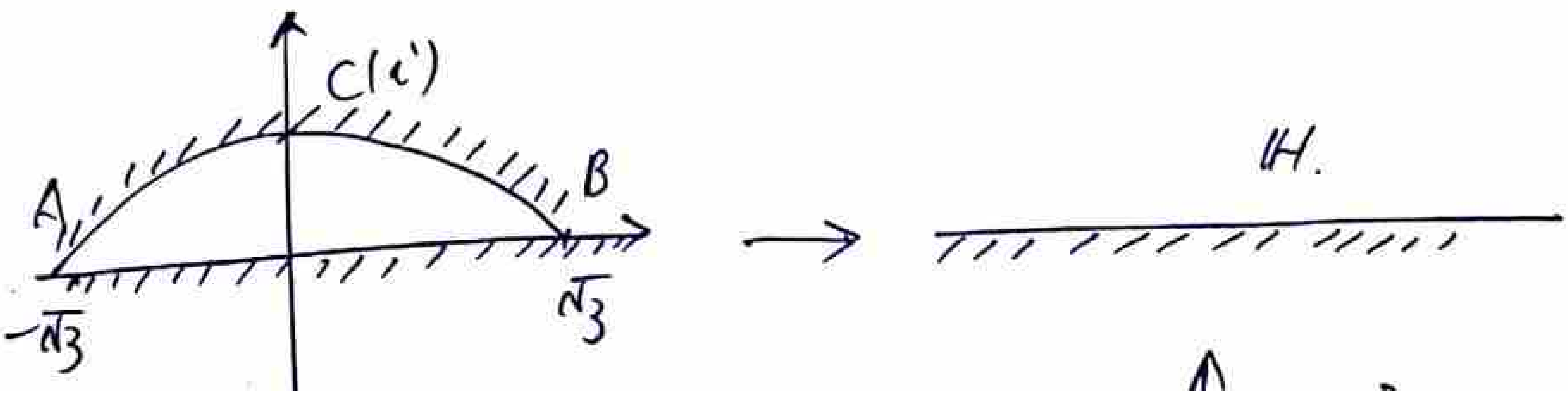


$\longrightarrow$ $z_2 = -i\pi z_1$

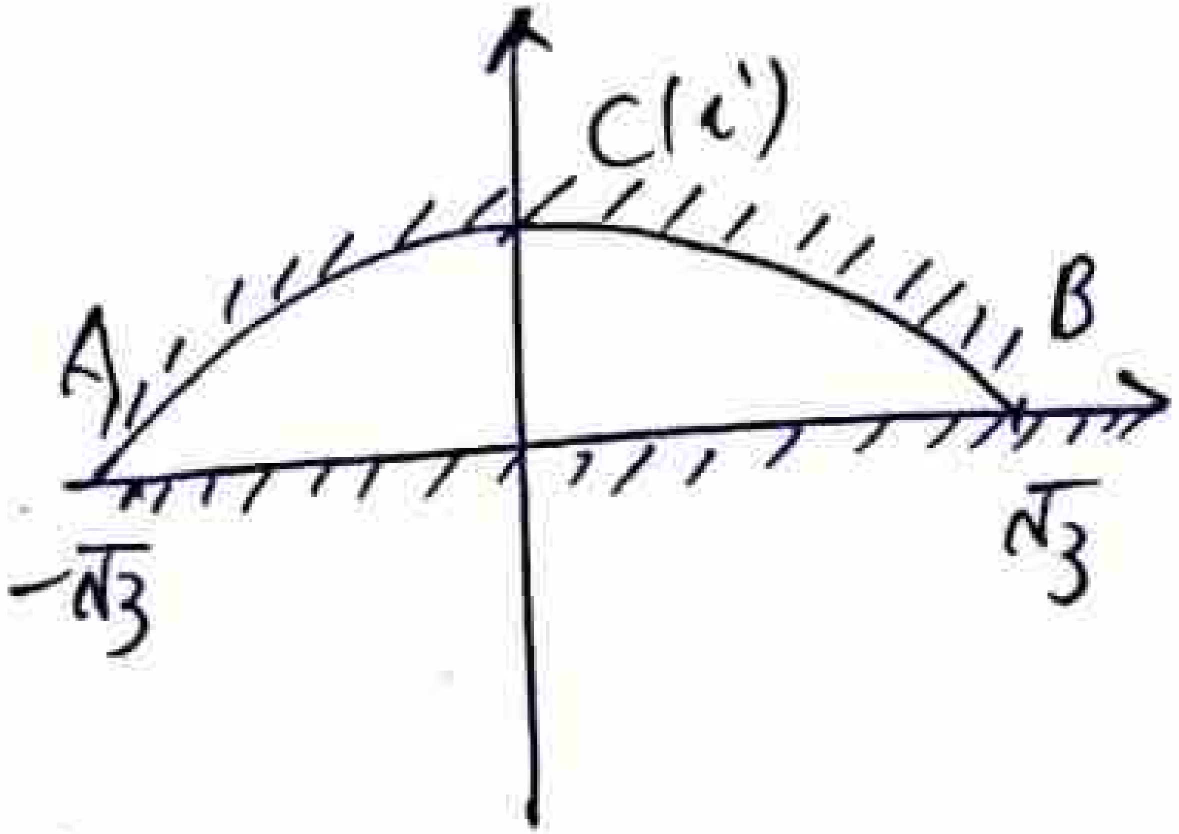


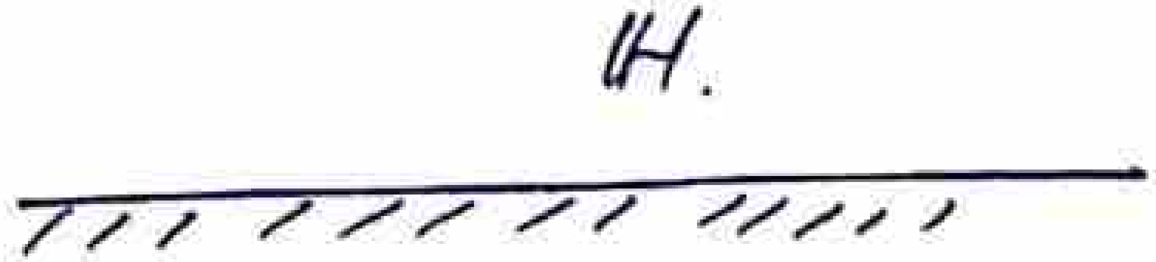
$\uparrow$ $w = e^{z_2}$.

例:



例:





$z_3 = z_2^3$.

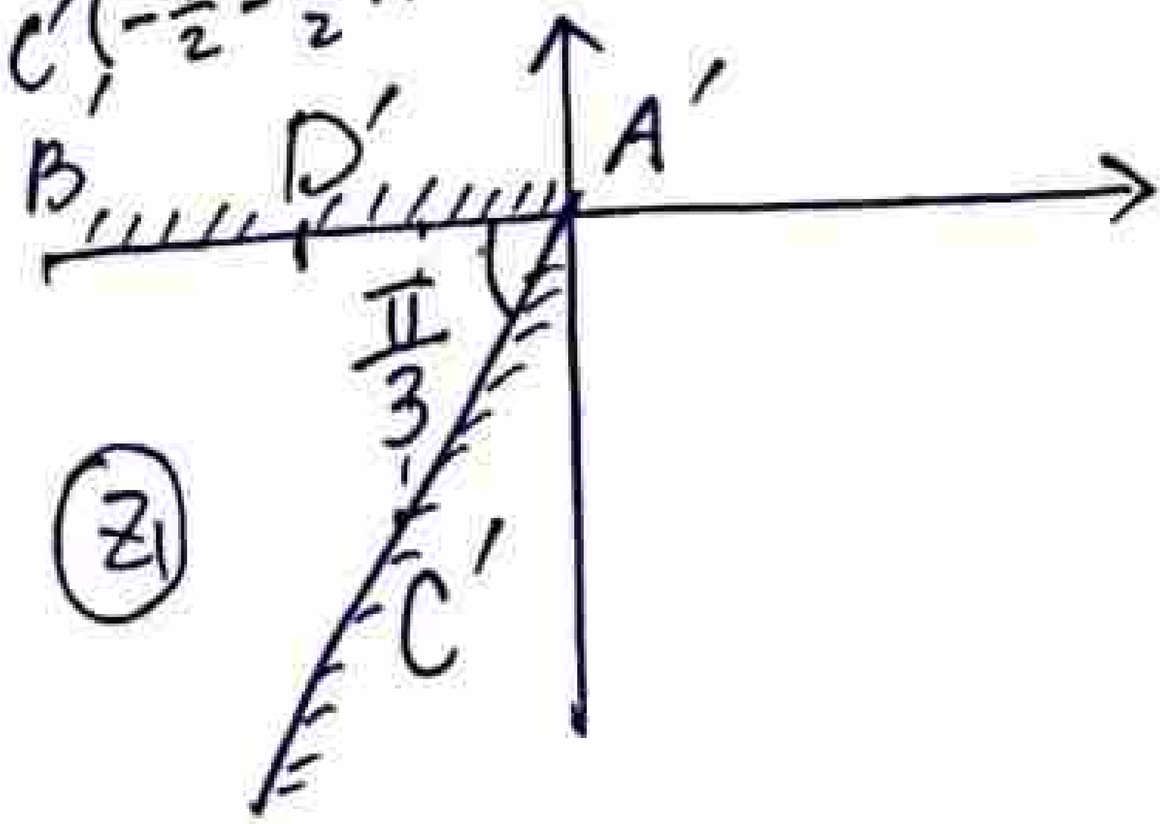
$A(-\sqrt{3}) \to A'(0)$

$B(\sqrt{3}) \to B'(\infty)$

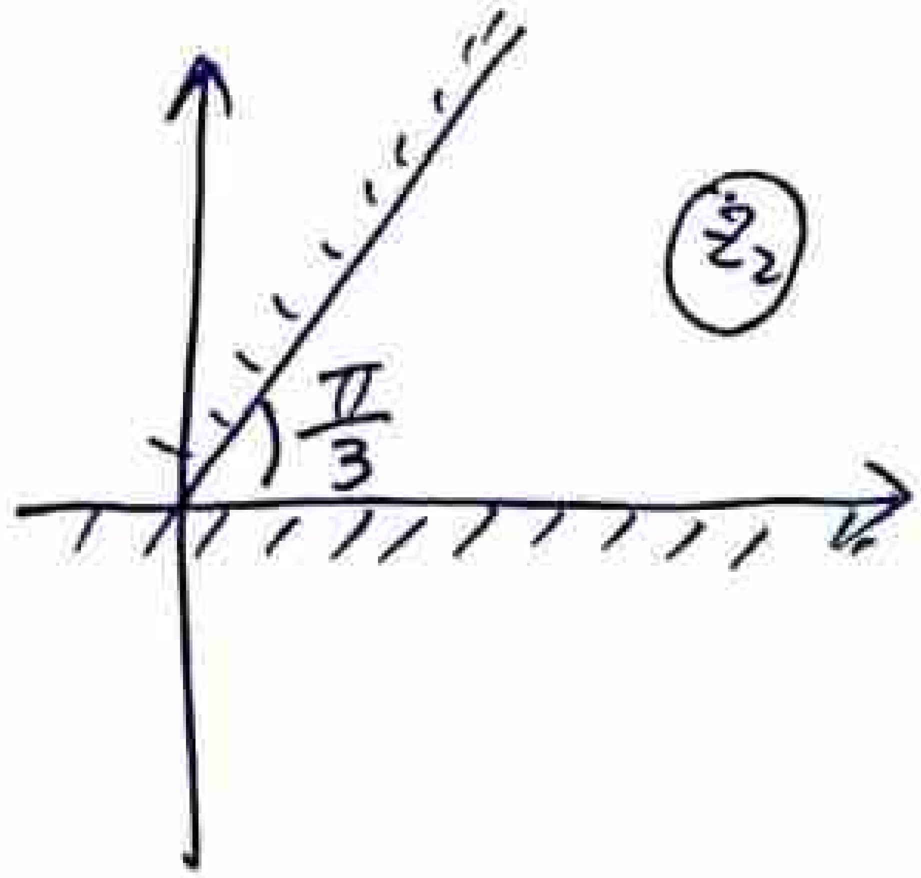
$$z_1 = \frac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}$$

$D(0) \to D'(-1)$

$C(i) \to C'\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$



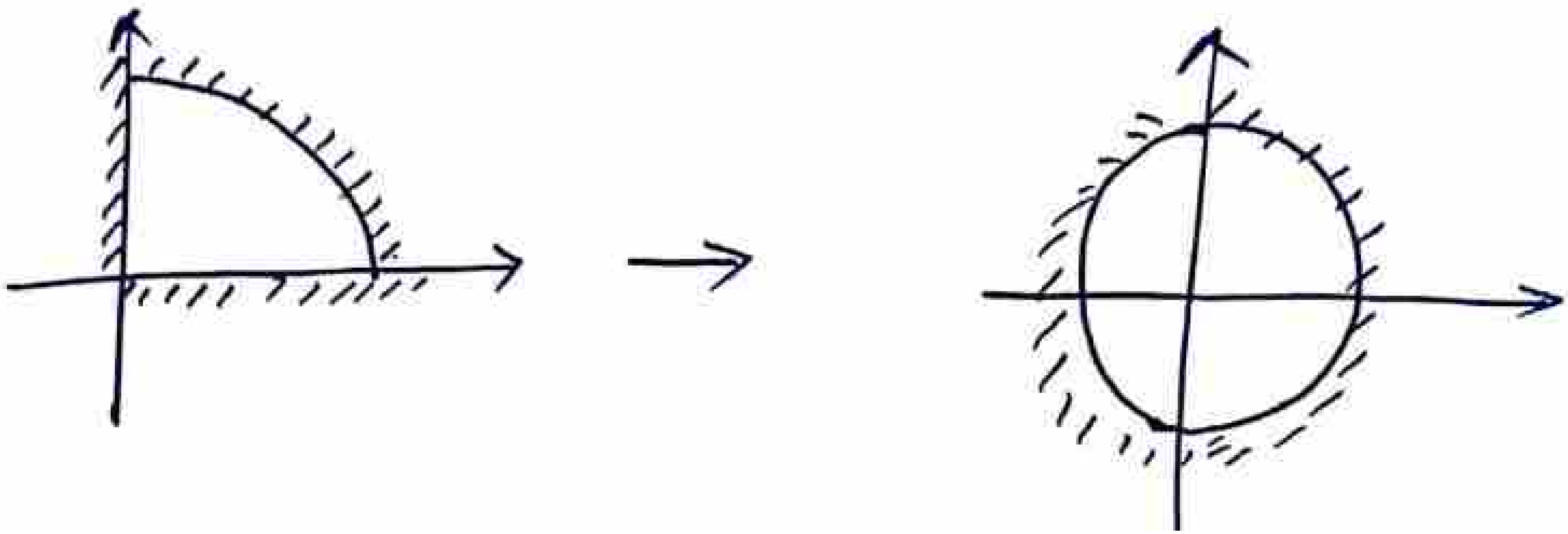
$z_2 = z_1 e^{\pi i}$



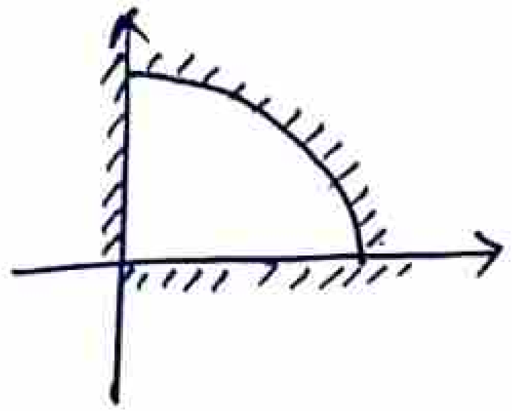
说明：若两圆相交，则令 $a \to 0$
$b \to \infty$

即令 $w = c \cdot \dfrac{z-a}{z-b}$

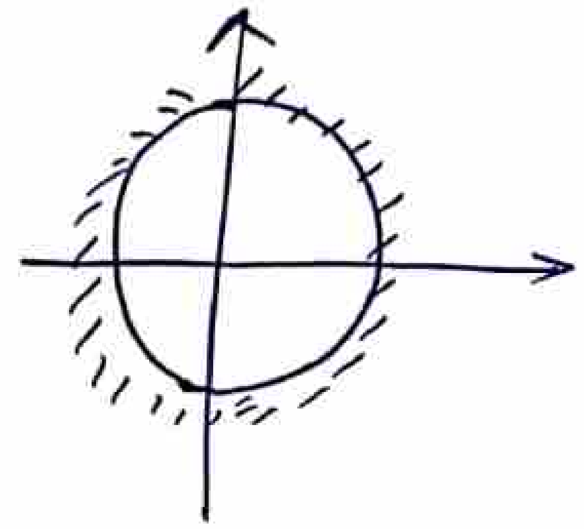
例：将



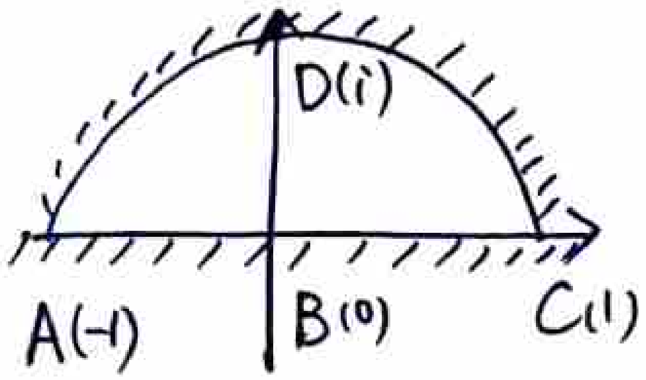
例：将



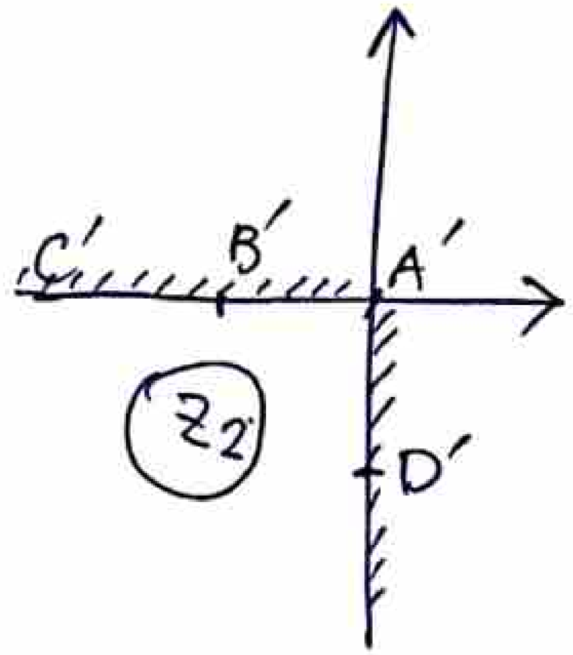
$\longrightarrow$



$\downarrow z_1 = z^2$



$z_2 = \dfrac{z_1+1}{z_1-1}$ $\longrightarrow$



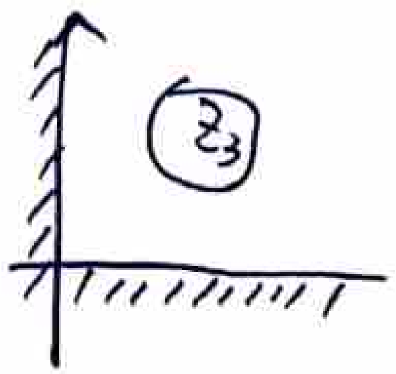
$A(-1) \to A'(0)$

$B(0) \to B'(-1)$

$C(1) \to C'(\infty)$

$D(i) \to D'(-i)$

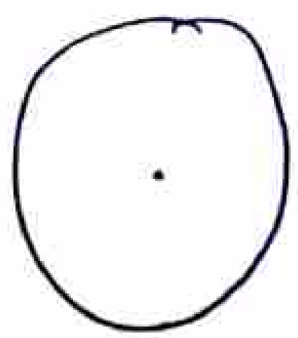
$\downarrow z_3 = -z_2.$



$z_4 = z_3^2.$ $\longleftarrow$

$\mathbb{H}.$ $z_4.$

$\downarrow W = \dfrac{z_4 - i}{z_4 + i}$



例：求将 $|z|=1$ 与 $|z-1|=\frac{5}{2}$ 所围区域 Ω 共形映为同心圆环 $1<|w|<R$.

解：两圆的公共对称点一定在实轴上（原因？），设为 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 1 \\ (x_1-1)(x_2-1) = \dfrac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{4} \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

作 $w_1 = \dfrac{z+\frac{1}{4}}{z+4}$

当 $z=1$ 时，$w_1 = \dfrac{1}{4}$

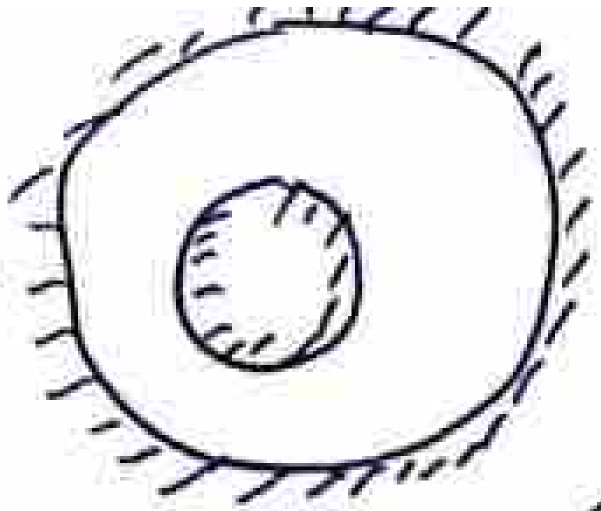
当 $z=\dfrac{7}{2}$ 时，$w_1 = \dfrac{1}{2}$.

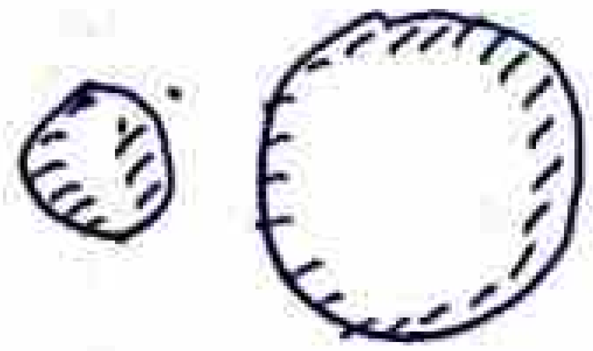
故 $w_1 = w_1(z)$ 将 Ω 映为 $\{\frac{1}{4} < |w_1| < \frac{1}{2}\}$.

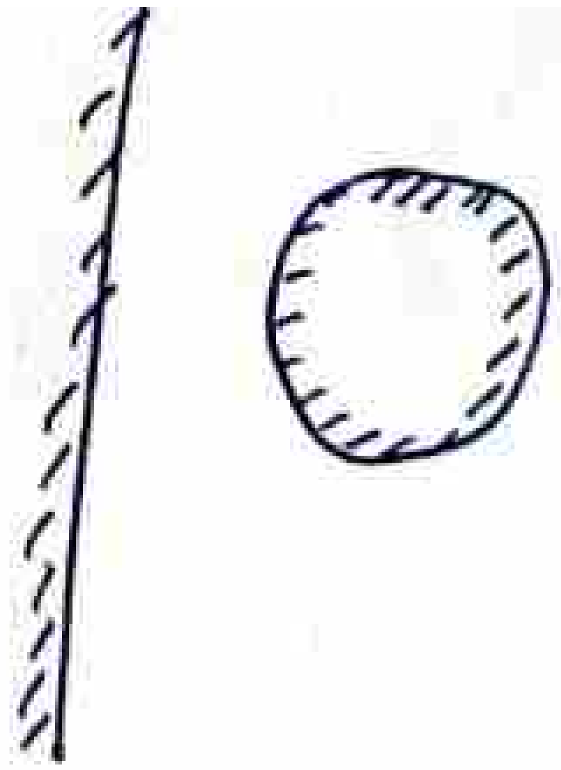
令 $w = 4w_1 = 4 \cdot \dfrac{z+\frac{1}{4}}{z+4}$

则 $w = w(z)$ 将 Ω 映为 $\{1 < |w| < 2\}$，$R=2$.

注意，若两圆相离.







则求公共对称点 z_1, z_2，作：$w = \dfrac{z-z_1}{z-z_2}$.

将区域映为同心圆环.

例: Rokovsky 函数. $W = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

① 单叶域: $\frac{1}{2}(z_1 + \frac{1}{z_1}) = \frac{1}{2}(z_2 + \frac{1}{z_2})$

$\Leftrightarrow \quad (z_1 - z_2)(1 - \frac{1}{z_1 z_2}) = 0.$

故 Ω 为单叶域 $\Leftrightarrow$ Ω 中不含有 $z_1 z_2 = 1$ 的两点 z_1, z_2.

例: $\mathbb{D}$, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$,

$\mathbb{H}$ 为单叶域: 若 $z \in \mathbb{H}$, $z = re^{i\theta}$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \notin \mathbb{H}$.

$\mathbb{C} \setminus \mathbb{H} = \{ z \mid \operatorname{Im} z < 0 \}$ 下半平面. 也为单叶域.

② 映射性质：设 $z=re^{i\theta}$，$w=u+iv$，则：

$$u+iv=\frac{1}{2}\left(re^{i\theta}+\frac{1}{r}e^{-i\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\,\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

故 $\begin{cases} u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta \\ v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta \end{cases}$ $\theta\in[0,2\pi)$.

③ 圆周 $|z|=r$ 的像：当 $r\neq 1$ 时，消去 θ：

$$\frac{u^2}{\left(\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})\right)^2}+\frac{v^2}{\left(\frac{1}{2}(r-\frac{1}{r})\right)^2}=1$$

故 $|z|=r$ 的像为椭圆，长半轴 $a=\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})$

短半轴 $b=\frac{1}{2}\left|r-\frac{1}{r}\right|$

当 r：$0\to 1$ 时 或 r：$+\infty\to 1$ 时.

a：$+\infty\to 1$

b：$+\infty\to 0$.

故 $|z|=r$ 的像从长短半轴为 $+\infty$ 的椭圆退化到二重线段.

若 $0<r<1$，且 $0<\theta<\pi$，则 $v=\frac{1}{2}(r-\frac{1}{r})\sin\theta<0$

故 $|z|=r$ 上半圆周映为下半椭圆.

同理：$|z|=r$ 下半圆周的像为上半椭圆..

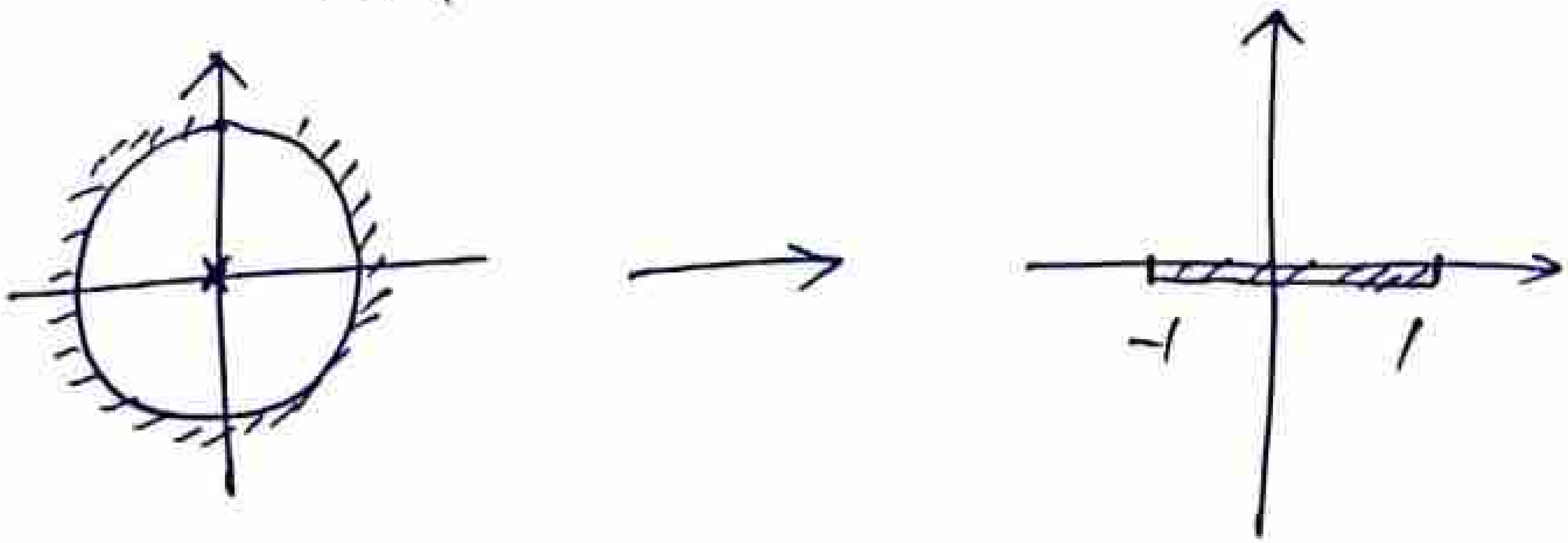
若 $r>1$，且 $0<\theta<\pi$，则. $v=\frac{1}{2}(r-\frac{1}{r})\sin\theta<0$

故 $|z|=r$ 上半圆周映为上半椭圆.

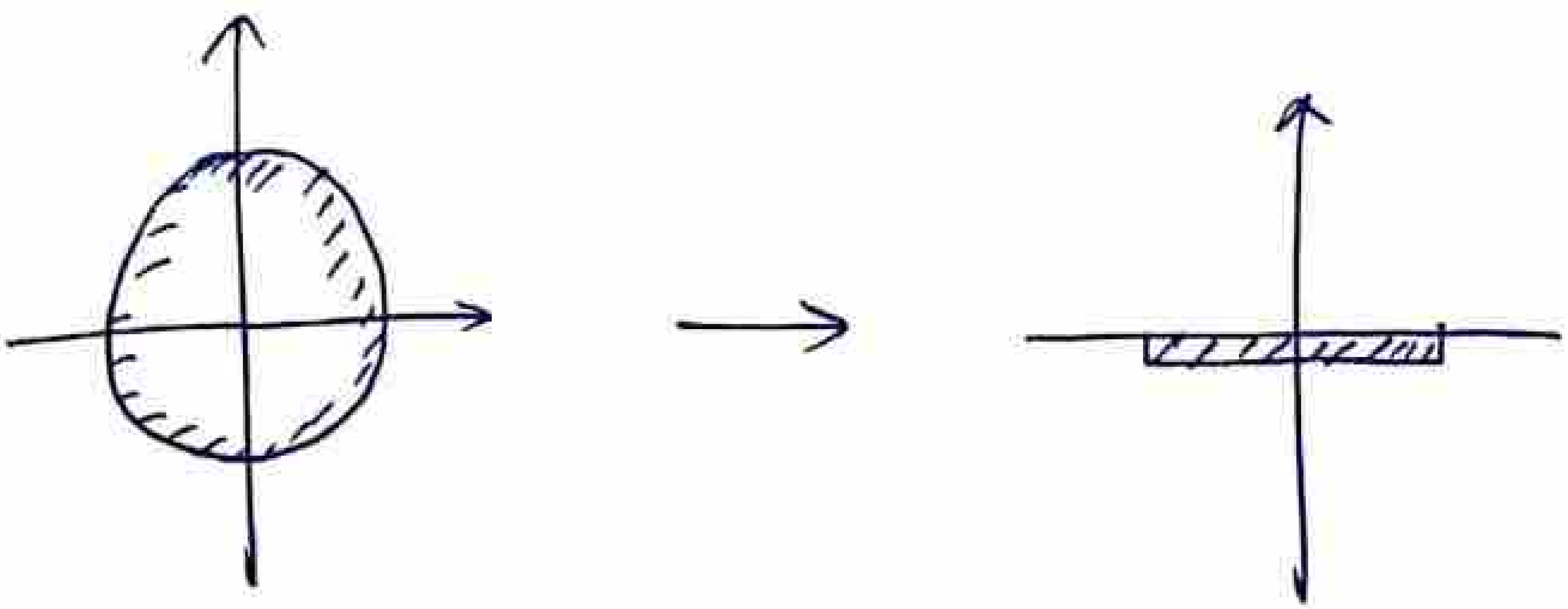
同理 $|z|=r$ 下半圆周映为下半椭圆.

综上: ① $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 将 $\{0<|z|<1\}$ 映为 $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$

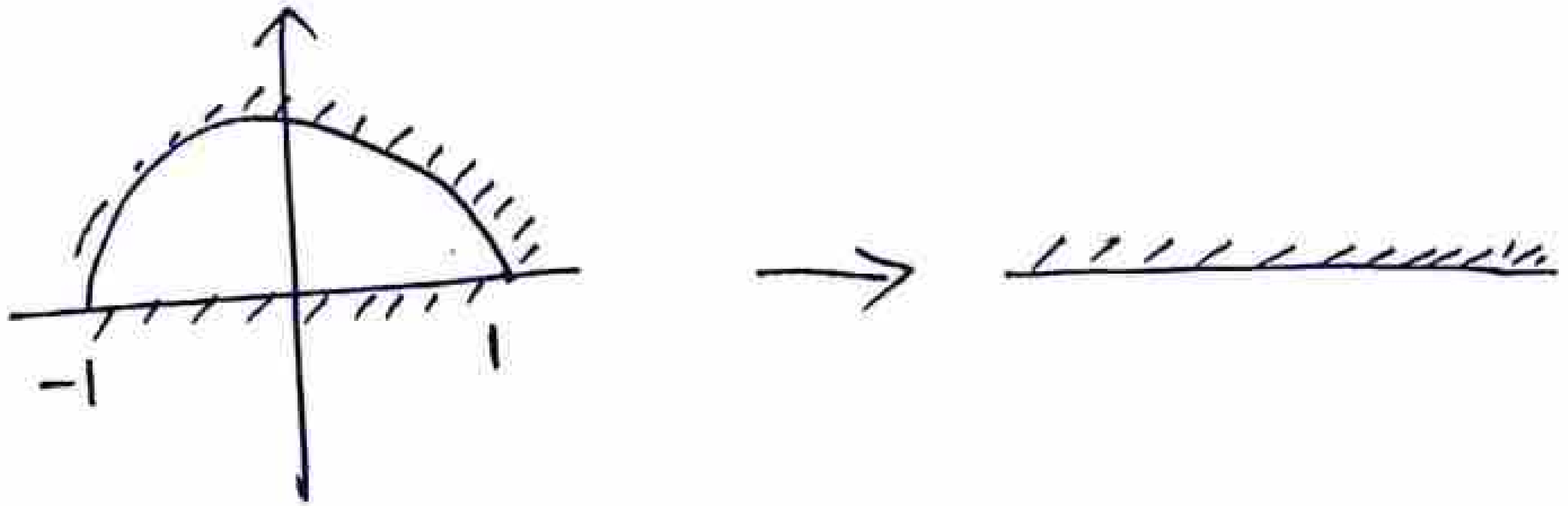
将 $\{|z|<1\}$ 映为 $\overline{\mathbb{C}}\setminus[-1,1]$.



② $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 将 $\{|z|>1\}$ 映为 $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$.

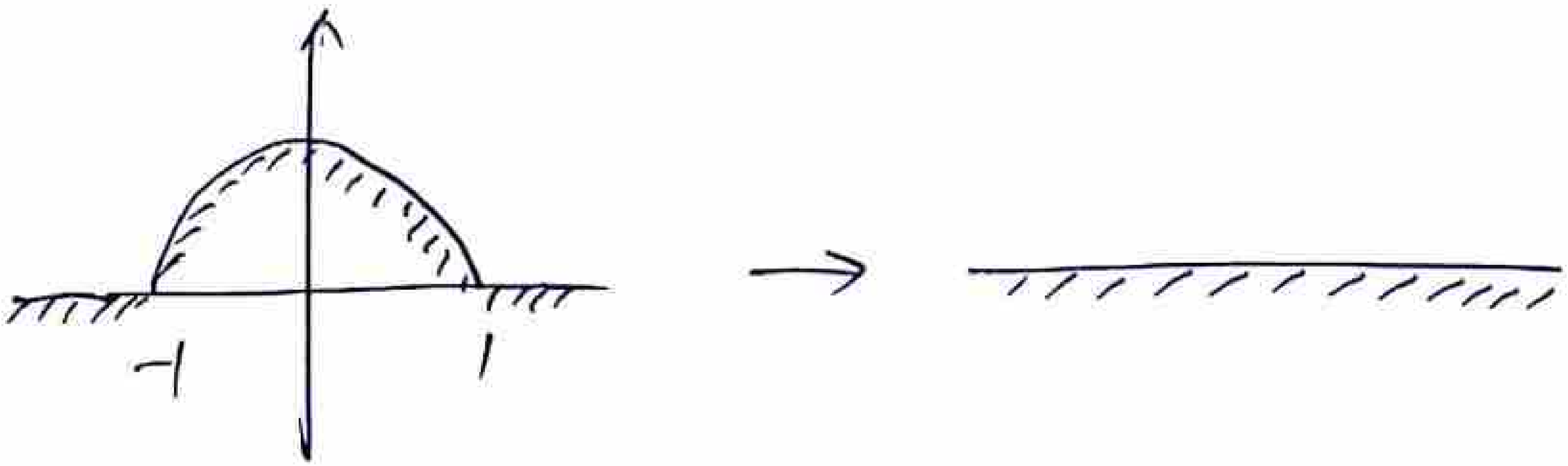


③ $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 将上半圆盘映为下半平面.



$\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1,\ \mathrm{Im}\,z>0\} \to \{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,z<0\}$.

④ $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 将 $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|>1,\ \mathrm{Im}\,z>0\}$ 映为 $\{w\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,w>0\}$.



④ 射线 $\arg z=\theta$ 的像.

若 $\theta \notin \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi\}$，则 $\cos\theta \neq 0$, $\sin\theta \neq 0$.

$$\frac{u}{\cos\theta} = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right), \qquad \frac{u^2}{\cos^2\theta} = \frac{1}{4}\left(r^2+\frac{1}{r^2}+2\right)$$

$$\frac{v}{\sin\theta} = \frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right), \qquad \frac{v^2}{\sin^2\theta} = \frac{1}{4}\left(r^2+\frac{1}{r^2}-2\right)$$

故 $\frac{u^2}{\cos^2\theta} - \frac{v^2}{\sin^2\theta} = 1$.

若 $\theta=0$，则 $v=0$, $u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$,

当 $r: 0 \to 1 \to +\infty$ 时，$\begin{cases} u: +\infty \to 1 \to +\infty \\ v=0 \end{cases}$.

故 $\arg z=0$ 的像为实轴上射线 $u \geq 1$ 两次.

若 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，$u>0$，$\arg z=\theta$ 的像为双曲线右半枝.

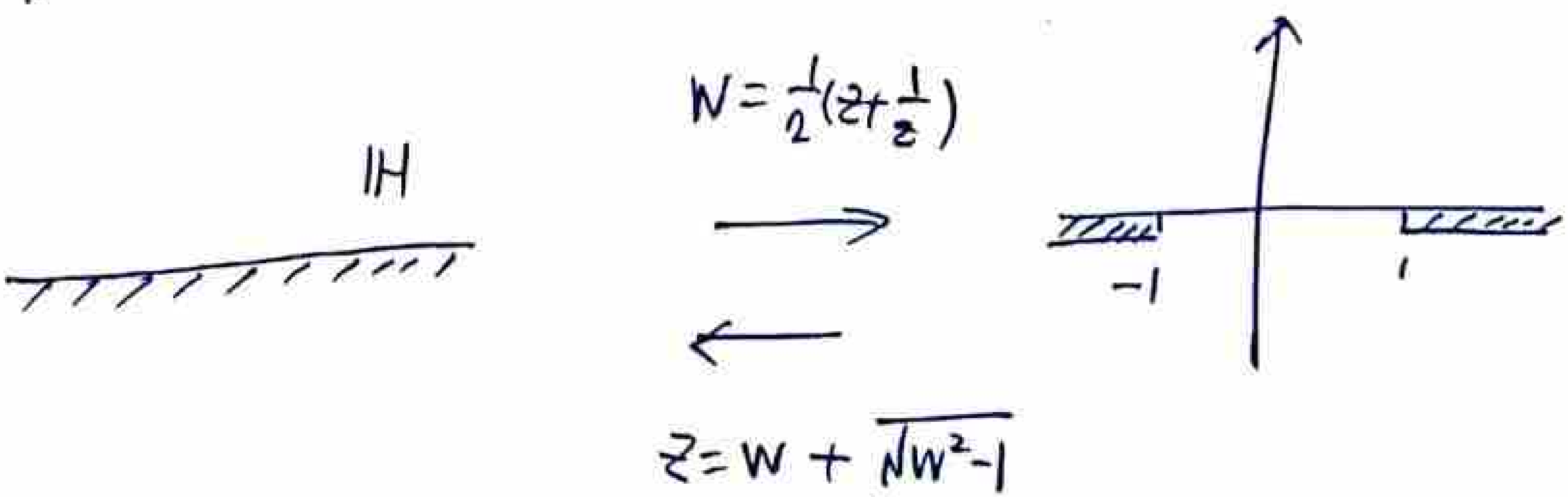
当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$u=0$，$\arg z=\theta$ 的像为虚轴.

当 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 时，$u<0$，$\arg z=\theta$ 的像为双曲线左半枝.

当 $\theta=\pi$ 时，$u=-\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})$，$v=0$.

$\arg z=\pi$ 映为实轴 $u\le -1$ 两次.

故映射将 $\mathbb{H}$ 映为 $\mathbb{C}\setminus\{(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\}$



例. 余弦映照. $w=\cos z$.

①单叶域: $w=\cos z$ $\qquad \cos z_1=\cos z_2$

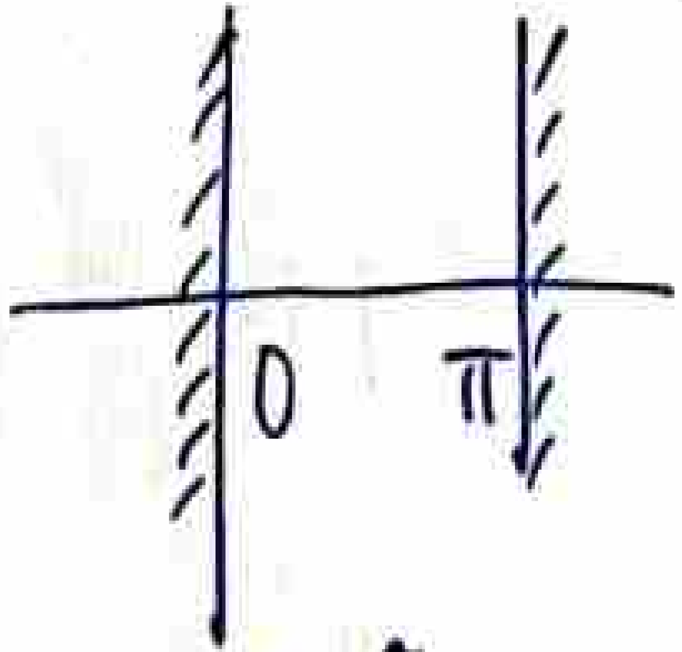
$$2\sin\frac{z_1+z_2}{2}\sin\frac{z_1-z_2}{2}=0$$

构 $z_1-z_2=2k\pi$ 或 $z_1+z_2=2k\pi$.

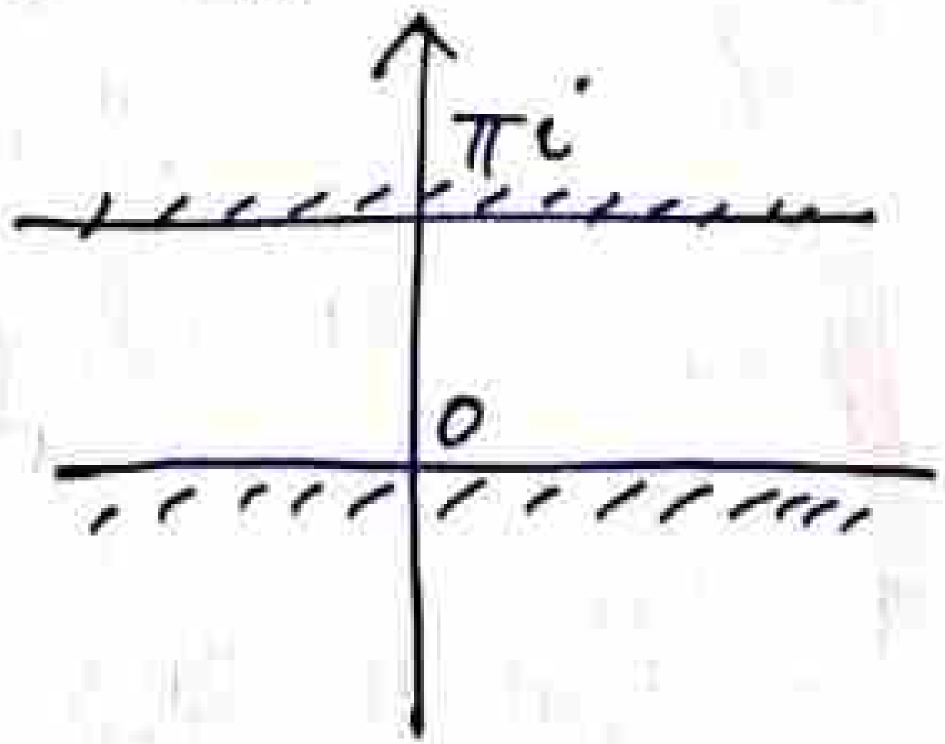
$\{0<\operatorname{Re} z<\pi\}$ 为单叶域.

② $w = \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$

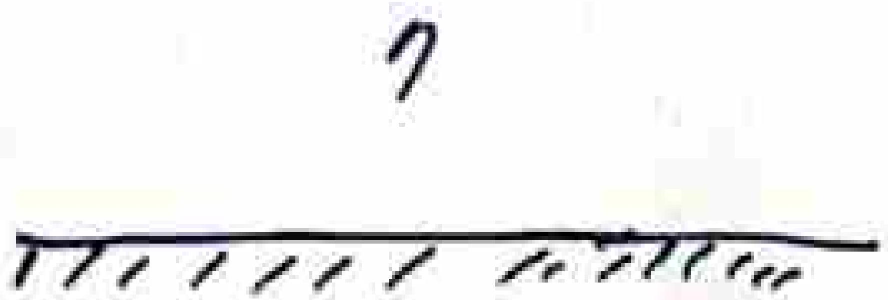
$$z \xrightarrow{\xi = iz} \xi \xrightarrow{\eta = e^{\xi}} \eta \xrightarrow{w = \frac{1}{2}\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right)} w$$



$\xrightarrow{\xi = iz}$

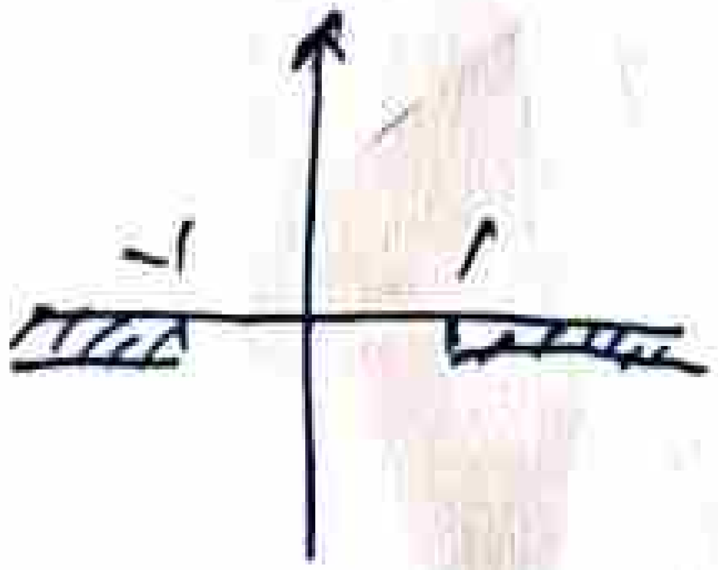


$\downarrow \eta = e^{\xi}$



$\xleftarrow{w = \frac{1}{2}\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right)}$

$z = \mathrm{Arccos}\, w \uparrow \downarrow w = \cos z.$



积分

闭曲线：$\mathbb{C}$上连续曲线 $\gamma(t): [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = x(t) + i y(t)$$

其中 $x(t), y(t)$ 为实值连续函数，$\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$

反向曲线：$\gamma^{-}(t) = \gamma(-t)$，$t \in [-\beta, -\alpha]$

光滑曲线：若 $\gamma'(t) = x'(t) + i y'(t)$ 存在且连续（在 $t=\alpha,\beta$ 处存在右、左导数），则称 γ 为光滑曲线

分段光滑：若 $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n = \beta$，且 $\gamma(t)$ 在 $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ 上都光滑，在 α_k 处可能左导数 $\neq$ 右导数.

可求长曲线：给定连续曲线 $\gamma(t)$：$\alpha \leq t \leq \beta$，对区间 $[\alpha, \beta]$ 作分割：

$$\Delta: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

$$L = \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^{n} \left| \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \right|$$

则 L 为长度.

连续

定义：复积分 设 $f(t) = x(t) + iy(t)$ 为 $[\alpha, \beta]$ 上的复值函数，定义

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta x(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta y(t)\,dt.$$

则有性质：①：

$$\mathrm{Re}\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta x(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\,f(t)\,dt$$

$$\mathrm{Im}\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta y(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \mathrm{Im}\,f(t)\,dt.$$

② $\forall c \in \mathbb{C}$, $c\cdot\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta c\cdot f(t)\,dt$

③ $\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |f(t)|\,dt.$

证③：设 $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ 辐角主值为 θ，则 $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt\right| e^{i\theta}$

故 $\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt\right| = e^{-i\theta}\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta e^{-i\theta} f(t)\,dt$.

两边取实部：

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt\right| = Re\int_\alpha^\beta e^{-i\theta} f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta Re\left(e^{-i\theta} f(t)\right)dt$$

$$\leq \int_\alpha^\beta \left|e^{-i\theta} f(t)\right| dt = \int_\alpha^\beta |f(t)|\,dt.$$

定义：设 $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ 为光滑曲线，f 在 γ 上连续，则定义

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

若 γ 为分段光滑，则 $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz=\sum_{k=0}^{n}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$

对于一般的可求长曲线，可通过~~定义来~~极限来定义积分.

说明：若 $f(z) = u + iv$，则有

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \big(u(\gamma(t)) + i\,v(\gamma(t))\big)\big(x'(t) + i\,y'(t)\big)\,dt.$$

$$= \int_\alpha^\beta (ux' - vy')\,dt + i(vx' + uy')\,dt$$

$$= \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\,(v\,dx + u\,dy)$$

$$= \int_\gamma (u + iv)(dx + i\,dy)$$

例：设 $\gamma(t)$ $(t\in[a,b])$ 为分段光滑，求 $\int_\gamma dz$，$\int_\gamma z\,dz$.

解：

$$\int_\gamma dz = \int_a^b \gamma'(t)\,dt = \gamma(b)-\gamma(a)$$

$$\int_\gamma z\,dz = \int_a^b \gamma(t)\gamma'(t)\,dt = \frac{1}{2}\gamma(t)^2\Big|_a^b = \frac{1}{2}\left(\gamma^2(b)-\gamma^2(a)\right)$$

相若 $\gamma(t)$ 为分段光滑时，上式仍成立.

若 $\gamma(t)$ 为分段光滑而闭曲线，则 $\int_\gamma dz = \int_\gamma z\,dz = 0$.

例：计算 $\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$，其中 $\gamma(t) = a + Re^{it}$，$t \in [0, 2\pi)$.

解：$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{Ri e^{it}\, dt}{Re^{it}} = 2\pi i$

积分性质:

① $\displaystyle\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_{\gamma} f(z)\,dz$

② $\displaystyle\int_{\gamma} (f(z)+g(z))\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz + \int_{\gamma} g(z)\,dz$

③ $\displaystyle\left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right| \leq \sup_{z\in\gamma} |f(z)|\ \mathrm{length}(\gamma)$

证③: $\displaystyle\left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\right|$

$\displaystyle\leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\cdot|\gamma'(t)|\cdot dt.$

$\displaystyle\leq \sup_{\gamma} |f| \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \sup_{\gamma}|f|\cdot \mathrm{length}(\gamma).$

引理：若Ω为有界区域，$P(x,y)$，$Q(x,y)$在区域Ω中连续，且有一阶连续的偏导数，则：

$$\iint_{\Omega'}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{\partial\Omega'}Pdx+Qdy \quad (\Omega'\subset\Omega)$$

$$\text{故}\ \int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma} (u+iv)(dx+i\,dy)$$

$$= \int_{\gamma} (u\,dx - v\,dy) + i(v\,dx + u\,dy)$$

$$= \int_{\Omega'} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\,dy + i \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$= 0 \quad (\text{Cauchy-Riemann 方程})$$

问题：如何去掉“$f'(z)$连续”？

问题：如何去掉"$f'(z)$连续"？

（Cauchy定理）设f在区域D中全纯，且$\gamma \subset D$是包含在D中的闭曲线，

分段光滑简单

则 $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

证明：分为三步：

① 若 $T \subset D$ 是内部包含在 D 中三角形，则 $\int_T f(z)dz = 0$

② 设 $P \subset D$ 是内部包含在 D 中闭多边形，则 $\int_T f(z)dz = 0$

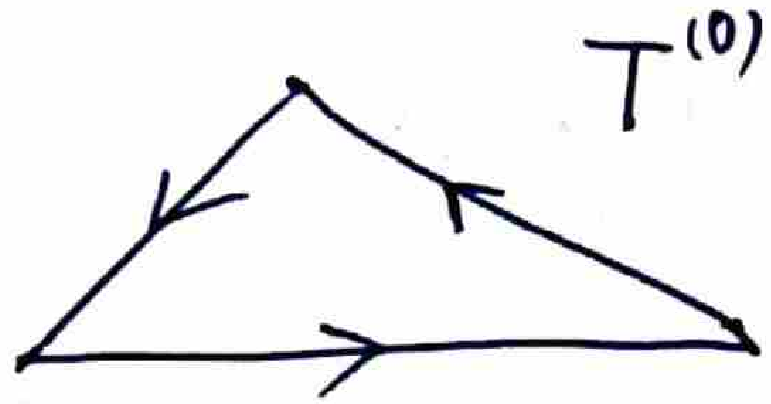
③ 对于曲线 $\gamma \subset D$，$\forall \varepsilon > 0$，存在折线 $P \subset D$，使得

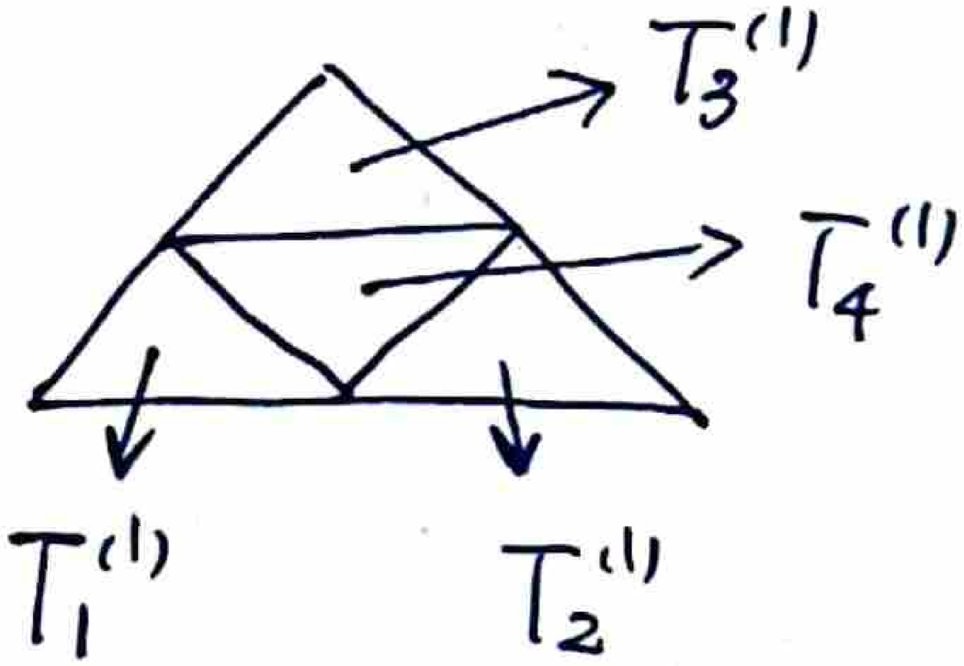
a) P 与 γ 有相同的起点与终点，且 P 的顶点在 γ 上

b) $$\left| \int_\gamma f(z)dz - \int_P f(z)dz \right| < \varepsilon.$$

综合①-③，则定理成立.

证①:





$$\int_{T^{(0)}} f(z)dz = \left(\int_{T_1^{(1)}} + \int_{T_2^{(1)}} + \int_{T_3^{(1)}} + \int_{T_4^{(1)}}\right) f(z)dz$$

故存在j，使得:

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)dz\right| \le 4\cdot\left|\int_{T_j^{(1)}} f(z)dz\right|.$$

$T_j^{(1)}$ 的直径：$d^{(1)} = \frac{1}{2} d^{(0)}$

周长：$p^{(1)} = \frac{1}{2} p^{(0)}$

将 $T_j^{(1)}$ 继续分，记 $T^{(1)} = T_j^{(1)}$，则存在 $T^{(2)}$，使得

$$\left| \int_{T^{(1)}} f(z)\,dz \right| \le 4 \cdot \left| \int_{T^{(2)}} f(z)\,dz \right|.$$

对 $T^{(2)}$ 继续分，存在 $T^{(1)}, T^{(2)}, T^{(3)}, \cdots T^{(n)}, \cdots$

使得 $$\left| \int_{T^{(0)}} f(z)\,dz \right| \le 4^n \cdot \left| \int_{T^{(n)}} f(z)\,dz \right|.$$

$$d^{(n)} = \frac{1}{2^n} d^{(0)}, \qquad p^{(n)} = \frac{1}{2^n} p^{(0)}$$

设 $F^{(n)}$ 为 $T^{(n)}$ 所围的闭集，则

$$F^{(0)} \supset F^{(1)} \supset F^{(2)} \supset \cdots \supset F^{(n)} \supset \cdots$$

故存在点 $z_0 \in F^{(n)}$，$\forall n \in \mathbb{N}$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z)(z - z_0), \quad \eta(z) \to 0 \ (z \to z_0). \quad \underline{\forall z \in U}$$

由前面的例题知这部分为0

则 $\displaystyle\int_{T^{(n)}} f(z)\,dz = \int_{T^{(n)}} [f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)]\,dz + \int_{T^{(n)}} \gamma(z)(z-z_0)\,dz$

$\displaystyle = \int_{T^{(n)}} \gamma(z)(z-z_0)\,dz$, 若 n 充分大, $T^{(n)} \subset U$.

若 $z \in T^{(n)}$, 则 $|z-z_0| \le d^{(n)}$, $\varepsilon_n = \sup\limits_{T^{(n)}} |\gamma(z)| \to 0$.

$$\left|\int_{T^{(n)}} f(z)\,dz\right| \leq \varepsilon_n \cdot d^{(n)} \cdot p^{(n)}$$

$$\leq \varepsilon_n \cdot \frac{1}{2^n} d^{(0)} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot p^{(0)}$$

$$\leq \varepsilon_n \cdot \frac{1}{4^n} \cdot d^{(0)} p^{(0)}$$

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)\,dz\right| \leq 4^n \cdot \left|\int_{T^{(n)}} f(z)\,dz\right|$$

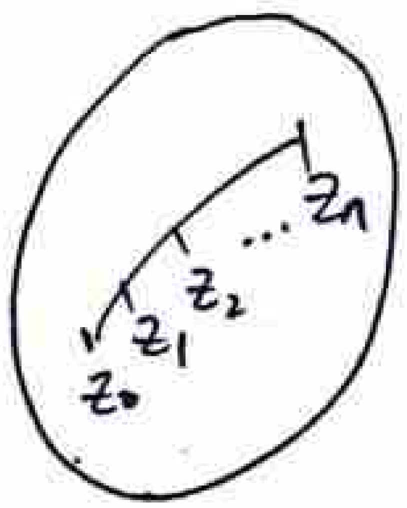
$$\leq 4^n \cdot \varepsilon_n \cdot \frac{1}{4^n} d^{(0)} p^{(0)} = \varepsilon_n \cdot d^{(0)} p^{(0)} \to 0 \ (n \to +\infty).$$

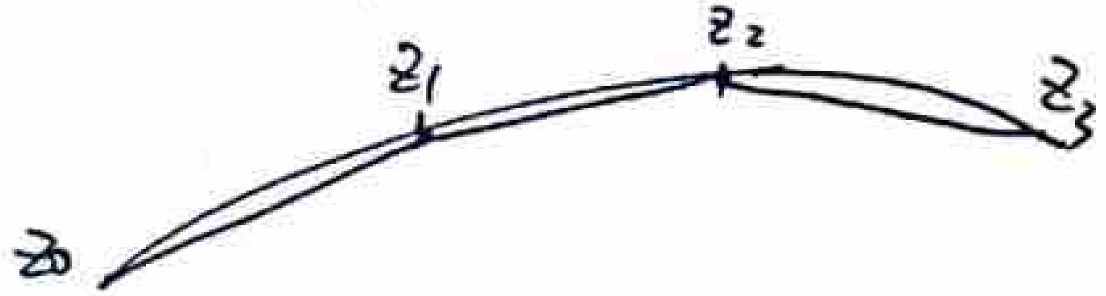
故 $\int_{T^{(0)}} f(z)\,dz = 0$.

第②条：注意任何凸多边形可分割成若干三角形之并

任何闭多边形可分割成若干凸多边形之并，

第③步：取分点 $z_0, z_1, z_2, \cdots z_n$，$|z_i - z_{i-1}| < \delta$.





$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz - \int_P f(z)\,dz\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k} f(z)\,dz - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{[z_k, z_{k+1}]} f(z)\,dz\right|$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k} (f(z) - f(z_k))\,dz - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{[z_k, z_{k+1}]} (f(z) - f(z_k))\,dz\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k} |f(z) - f(z_k)|\,dz + \sum_{k=0}^{n-1}\int_{[z_k, z_{k+1}]} |f(z) - f(z_k)|\,dz.$$

$$\leq 2\varepsilon L \to 0 \quad (\varepsilon \to 0.$$

探讨：

定理：若 D 是简单闭曲线 γ 内部，若 f 在 D 上全纯，在 $\bar{D}$ 上连续，则 $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

证明想法：在 D 上构造简单闭曲线 γ_ε，使 $\gamma_\varepsilon \to \gamma$ $(\varepsilon \to 0)$

则由 $\int_{\gamma_\varepsilon} f(z) = 0$ （Cauchy 定理）

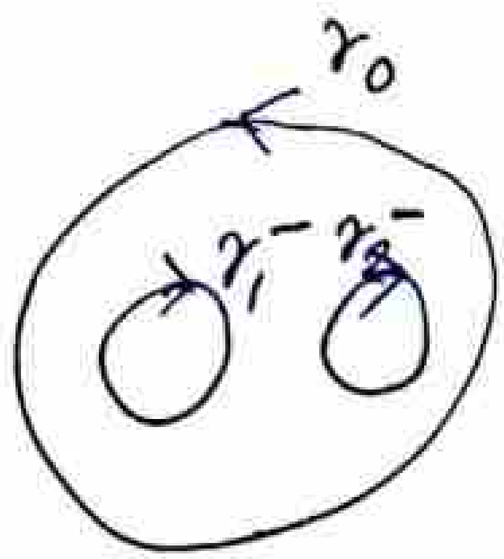
和 $\left| \int_\gamma f(z)\,dz - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz \right| < \varepsilon$

知 $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

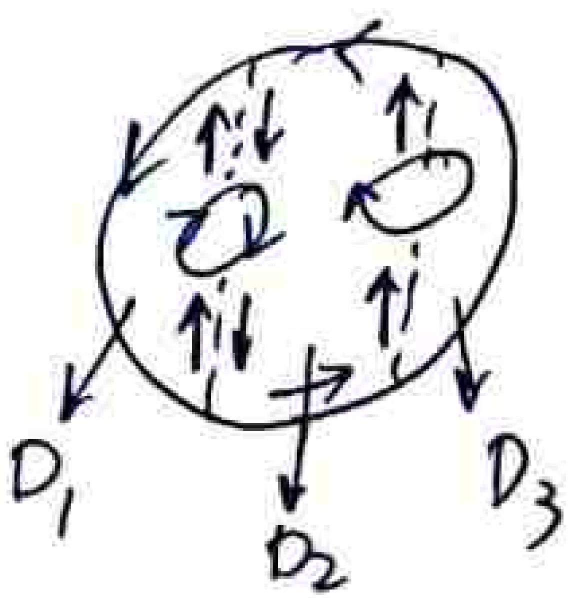
多连通域的 Cauchy 定理：设 D 为 n+1 条简单闭曲线 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots \gamma_n$ 围成的区域，若 f 在 D 上全纯，在 $\bar{D}$ 上连续，则 $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$，其中

$\partial D = \gamma_0 \cup \gamma_1^- \cup \cdots \cup \gamma_n^-$ （$\gamma_1^-, \cdots \gamma_n^-$ 为 γ_i 的反方向）.

证：

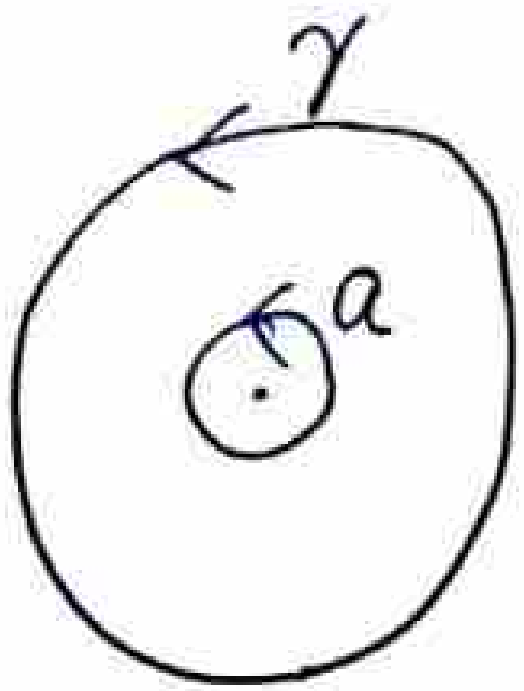


由 $\int_{\partial D_1} f(z)\,dz = 0$，$\int_{\partial D_2} f(z)dz = 0$，$\int_{\partial D_3} f(z)dz = 0$



相加：$\int_{\gamma_0 \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^-} f(z)dz = 0$.

例：设 $a \notin \gamma$，求 $\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$



解：设 a 在 γ 内部，则

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_{\partial B(a,\varepsilon)} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

若 a 在 γ 外部，则 $\frac{1}{z-a}$ 在 γ 内部是全纯函数，

故积分为0.

原函数：给定区域 Ω 上函数 $f(z)$，若 $F(z)$ 为 Ω 上全纯函数，且 $F'(z)=f(z)$，$\forall z\in\Omega$，则称 $F(z)$ 为 f 的原函数。

定理：若在区域 Ω 上连续函数 $f(z)$ 有原函数 $F(z)$，且 $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ 分段光滑，则

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

证：
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma F'(z)dz = \int_a^b F'(z(t))\, z'(t)\, dt$$
$$= \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t)) = F(z(b)) - F(z(a)).$$

推论：若 γ 为简单闭曲线，f 连续，且在区域 Ω 上有原函数，则 $\int_{\gamma} f(z)dz=0$.

反之，若 $\gamma\subset\Omega$，连续函数 $f(z)$ ~~在 Ω 上~~ 有 $\int_{\gamma} f(z)dz\neq 0$，则 $f(z)$ 在 Ω 上无原函数.

例：$f(z)=\frac{1}{z}$，$D^*=\{0<|z|<1\}$. 则 $\int_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz=2\pi i$

故 $\frac{1}{z}$ 在 D^* 上无原函数.

推论：若 f 在区域 Ω 上全纯，且 $f'=0$，则 f 为常数.

证明：取定 $w_0 \in D$，对任何 $w \in D$，有

$$f(w)-f(w_0)=\int_\gamma f'(z)\,dz=0,\quad \text{故 } f(w)=f(w_0),\ (\forall w\in D)$$

定理：设 D 为单连通区域，$f(z)$ 在 D 中全纯，则 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$ 为 $f(z)$ 的原函数，即 $F'(z)=f(z)$.

证：由 Cauchy 定理，对任何简单闭曲线 $\int_\gamma f(z)\,dz=0$，故 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$ 是 D 中单值函数

可导：$F(z)-F(z_1)=\int_{z_0}^{z} f(w)\,dw-\int_{z_0}^{z_1} f(w)\,dw=\int_{z_1}^{z} f(w)\,dw$

故 $$\left| \frac{F(z)-F(z_1)}{z-z_1} - f(z_1) \right|$$

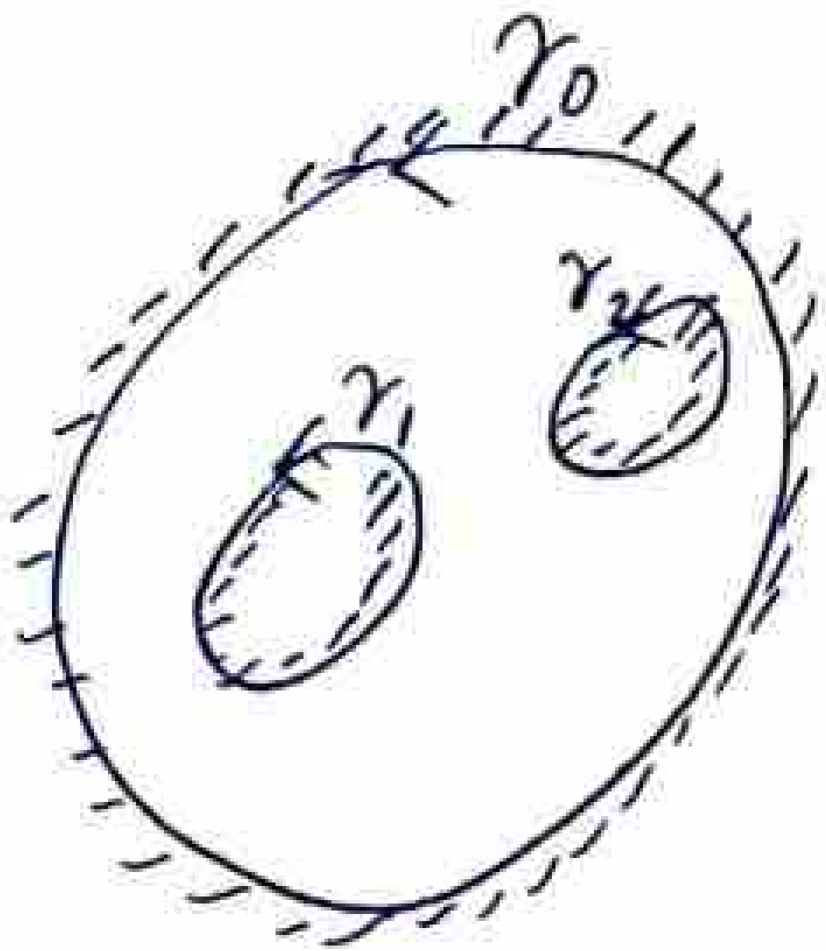
$$= \left| \frac{1}{z-z_1} \int_{z_1}^{z} f(w)\,dw - \frac{1}{z-z_1} \int_{z_1}^{z} f(z_1)\,dw \right|$$

$$= \left| \frac{1}{z-z_1} \int_{z_1}^{z} (f(w)-f(z_1))\,dw \right|$$

$$\le \max_{w\in[z_1, z]} |f(w)-f(z_1)| \to 0 \quad (z \to z_1).$$

故 F 解析 且 $F'(z)=f(z)$.

多连通域情形. 设 $f(z)$ 在 D 中全纯, 在 $\bar{D}$ 上连续,



定义 $K_1 = \int_{\gamma_1} f(z)dz$, $K_2 = \int_{\gamma_2} f(z)dz$

$\cdots$ $K_i = \int_{\gamma_i} f(z)dz$.

定理：设 $f(z)$ 在 D 中全纯，$\overline{D}$ 上连续，则 $f(z)$ 有原函数 $F(z)$

$\Leftrightarrow \forall j=1,2,\cdots n, \quad K_j=0.$

证：$\Rightarrow$：若有原函数 $F(z)$，则对任何曲线 $\gamma(t)$：$[\alpha,\beta]\to\overline{D}$

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha))$$

若 γ 闭，则有 $\int_{\gamma_{\text{f}}} f(z)dz = 0.$

$\Leftarrow$：若 $\forall j$：$k_j=0$，则对任何简单闭 γ，有

$$\int_\gamma f(z)dz=\sum_{j=1}^{n} n_j \int_{\gamma_j} f(z)dz=0.$$

其中 $n_j=0$ 或 1.

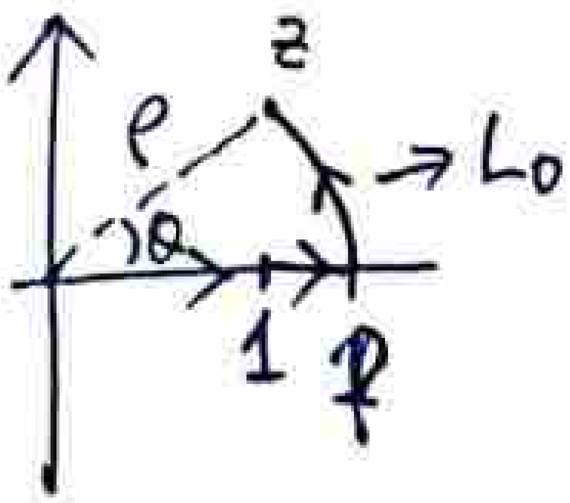
故 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(w)dw$ 积分与路径无关，是 D 中单值函数，且 $F'(z)=f(z)$. 故 $F(z)$ 为 $f(z)$ 的原函数.

原函数:

例: 设 $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\frac{1}{z}$ 在 D 中全纯, 求 $F(z)=\int_1^z \frac{1}{w}\,dw$

解: $\forall z\in D$, $\rho=|z|$, $\arg z=\theta$.

①



$$\int_{L_0}\frac{1}{w}\,dw=\int_1^{\rho}\frac{dx}{x}+\int_0^{\theta}\frac{i\rho e^{i\theta}\,d\theta}{\rho e^{i\theta}}$$

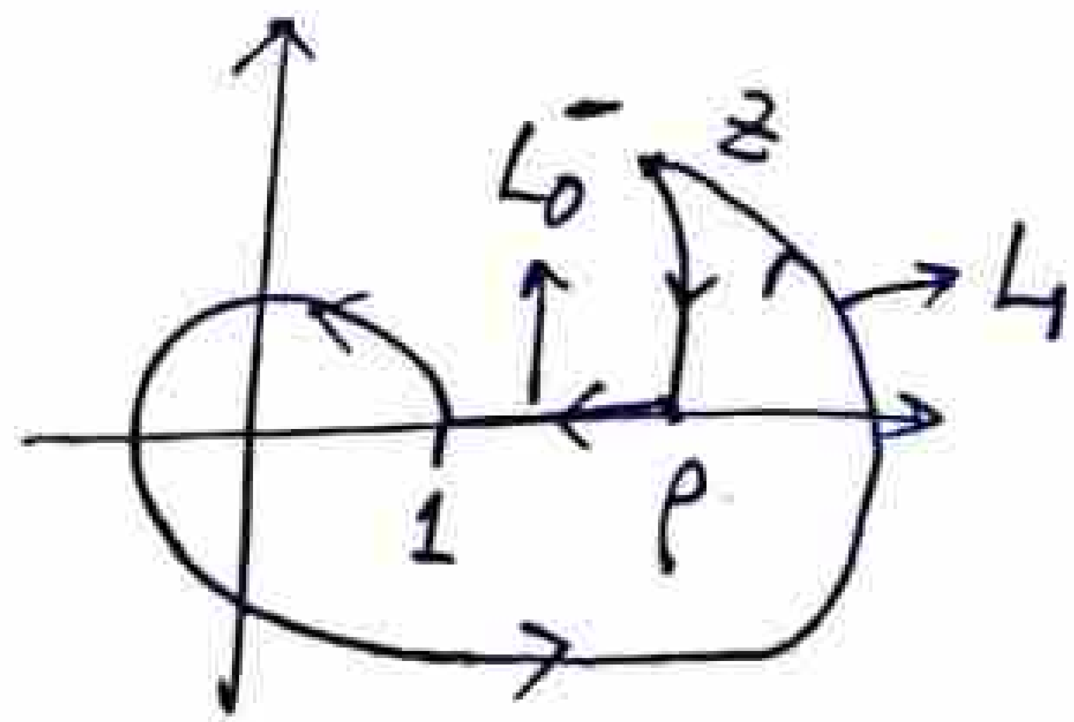
$$=\log\rho+i\theta$$

设 $L_0=[1,\rho]$ 与 $\rho\to z$ 的圆弧.

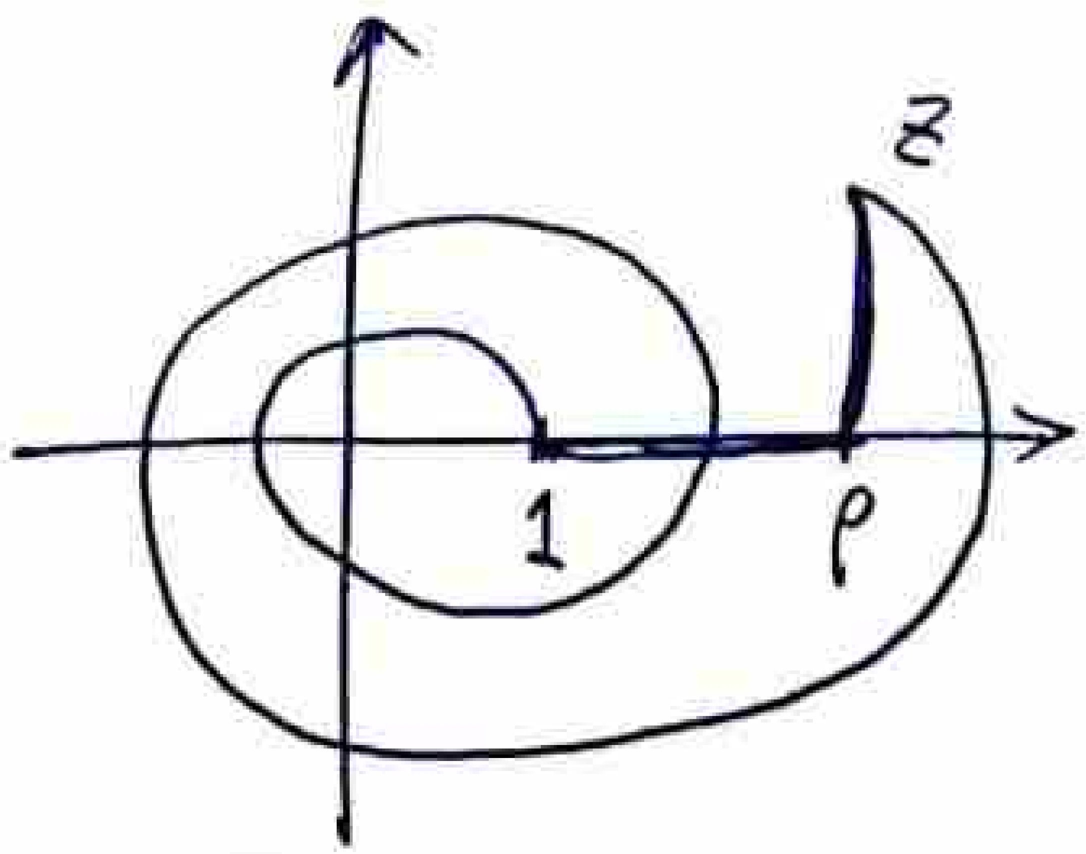
② 设 L_1 是从 1 起绕原点逆时针转一圈, $L_1 \cup L_0^-$ 绕原点逆时针一圈而闭曲线, 从而

$$\int_{L_1} \frac{1}{w}\,dw = \int_{L_0} \frac{dw}{w} + \int_{L_1+L_0^-} \frac{dw}{w}$$

$$= \log \rho + i\theta + 2\pi i$$



③ $L_2 \cup L_0^-$ 可分解为两简单闭曲线

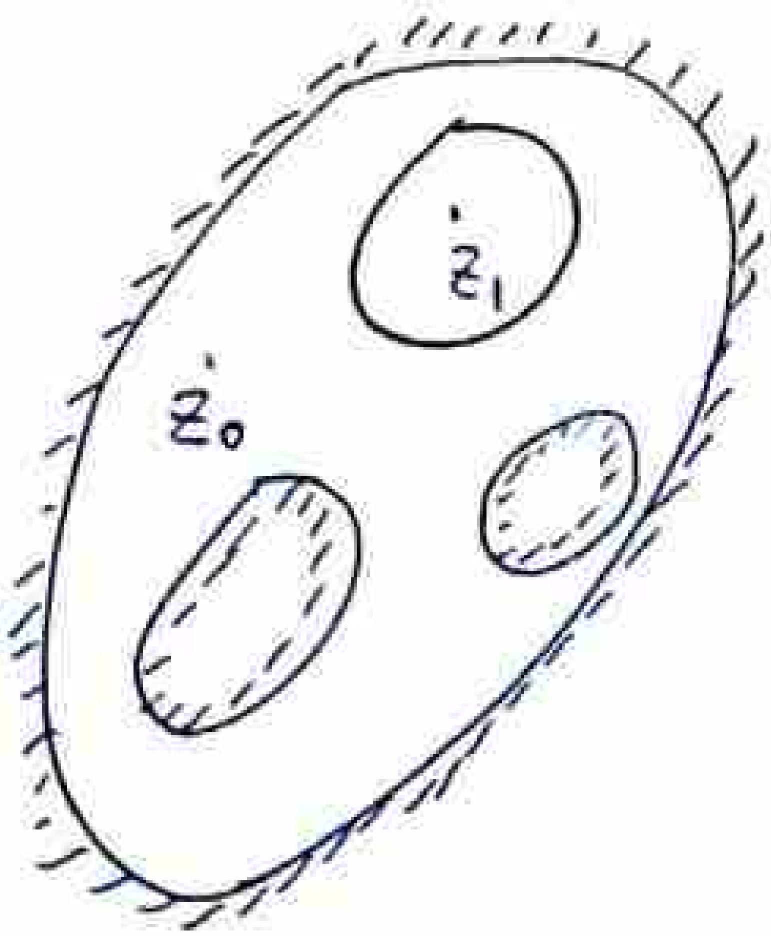


$$\int_{L_2 \cup L_0^-} \frac{1}{w}\,dw = 4\pi i$$

$$\Rightarrow \int_{L_2} \frac{1}{w}\,dw = \int_{L_0} \frac{1}{w}\,dw + 4\pi i$$

$$= \log \rho + i\theta + 4\pi i$$

说明：若有一周期 $K_j \neq 0$，则 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$ 为多值函数.



依赖于 $z_0 \to z$ 的路径选取.

设 $D_1 \subset D$，D_1 单连通，则 $F(z)$ 在 D_1 上有一单值分支，记为 $F_1(z)$. 设 $F_2(z)$ 为 $F(z)$ 在 D_1 上另一单值分支，

则 $F_2'(z) - F_1'(z) = 0$

$\Rightarrow F_2(z) - F_1(z)$ 在 D_1 上为常数.

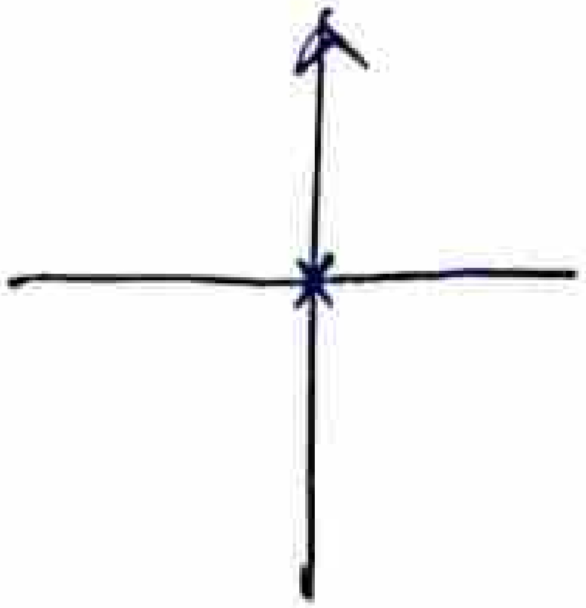
$$F_1(z_1)=\int_{\gamma_0} f(z)\,dz, \qquad F_2(z)=\int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

则 $$F_2(z)-F_1(z)=\int_{\gamma_1\cup\gamma_0^-} f(z)\,dz=\sum n_j K_j$$

从而 $$F_2(z)=F_1(z)+\sum n_j K_j$$

即：若 $F_1(z)$ 为 $F(z)$ 在 D_1 中的一单值分支，则 $F(z)$ 在 D_1 中所有单值分支为 $F_1(z)+\sum n_j K_j$，$(n_j\in\mathbb{Z})$

例1:



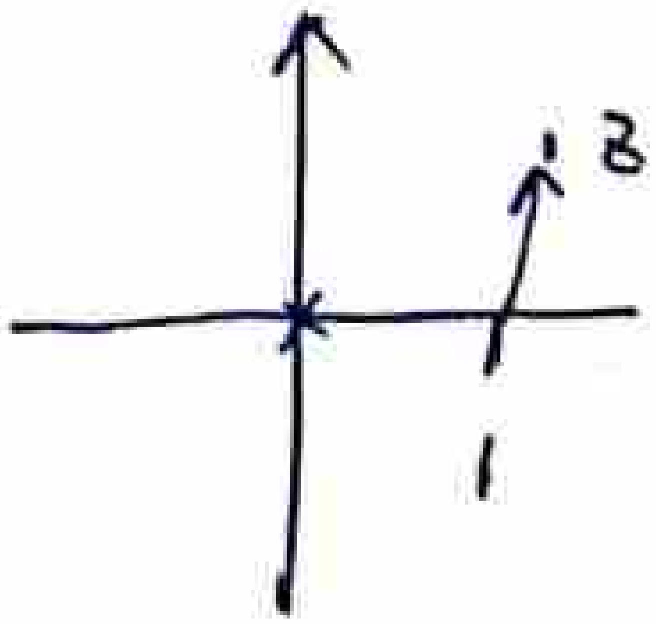
$$D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$F(z) = \int_1^z \frac{dw}{w}$$

$K = 2\pi i$, 故 $F(z) = \log z + 2\pi i k$

$$= \log|z| + i \arg z + 2\pi i k$$

例: $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $F(z)=\int_1^z \frac{1}{w^2}\,dw$



$$k=\int_{|z|=1}\frac{1}{w^2}\,dw=\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{2i\theta}}\,ie^{i\theta}\,d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}\,d\theta=0.$$

故 $F(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 为单值函数, 且

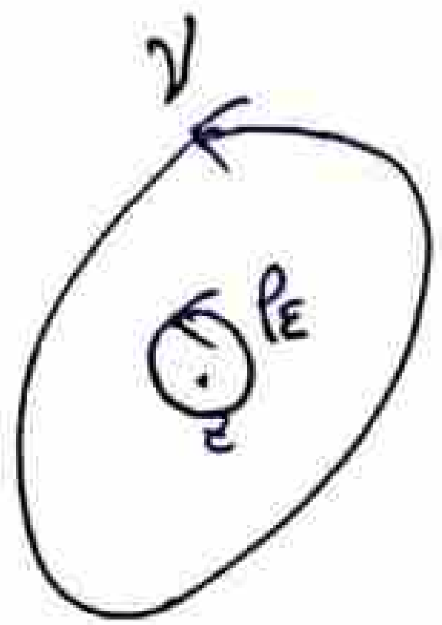
$$F(z)=-\frac{1}{z}+C,$$

注意 $F(1)=0$, 故 $F(z)=1-\frac{1}{z}$.

Cauchy 公式:

定理: 设D为简单闭曲线γ所围成的区域, $f(z)$在D上全纯, $\bar{D}$上连续, 则 $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$ 注意不要遗漏2πi

证明: $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho_\varepsilon}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$



$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon i\, e^{i\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta$$

$$\to f(z),\quad \varepsilon\to 0.$$

说明: 全纯函数在D中的值完全由边界上的值确定。

积分计算：

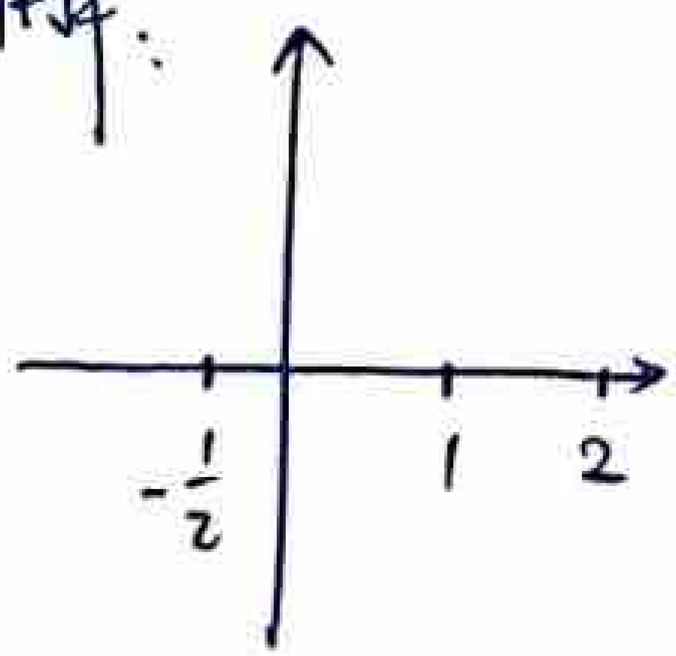
例： $I = \int_L \frac{z\,dz}{(2z+1)(z-2)}$，其中 ① L: $|z|=1$

② $|z-2|=1$

③ $|z-1| = \frac{1}{2}$

④ $|z|=3$.

解：



① $I = \int_{|z|=1} \frac{\frac{z}{2z-4}}{z+\frac{1}{2}}\,dz = 2\pi i \left.\frac{z}{2z-4}\right|_{z=-\frac{1}{2}}$

$= \frac{\pi i}{5}$

2

$$I = \int_{|z-2|=1} \frac{\frac{z}{2z+1}}{z-2} = 2\pi i \left.\frac{z}{2z+1}\right|_{z=2} = \frac{4}{5}\pi i$$

3

$$I = \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{z}{(2z+1)(z-2)} = 0$$

4

$$I = \int_{|z|=3} \frac{z\,dz}{(2z+1)(z-2)} = \int_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(2z+1)(z-2)} + \int_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{z\,dz}{(2z+1)(z-2)}$$

$$= \frac{\pi i}{5} + \frac{4\pi i}{5} = \pi i.$$

导数：

定理：设 $\gamma \subset \mathbb{C}$ 是一条曲线（不一定闭），$\varphi(\xi)$ 在 γ 上连续，则

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{\xi - z}.$$

在 $\mathbb{C} \setminus \gamma$ 上全纯，且 $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$，有

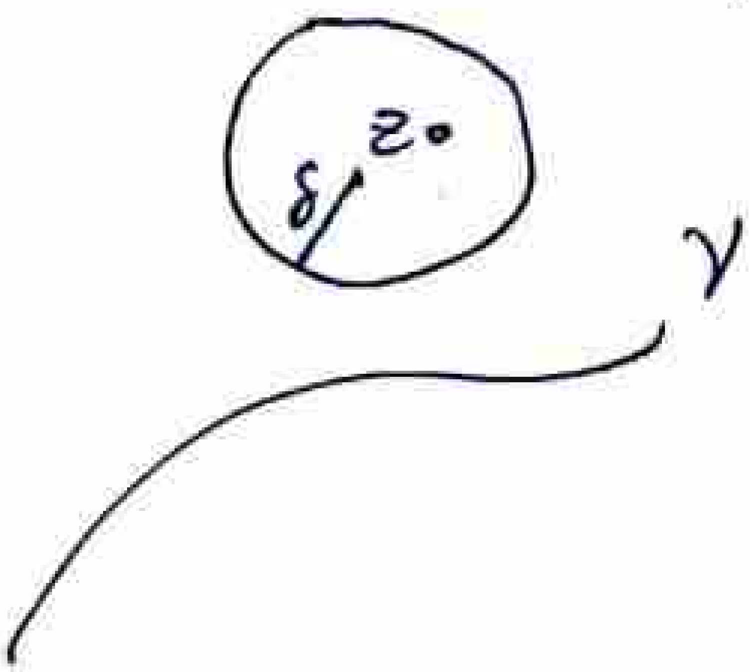
$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{(2\pi i)} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

γ

证：① 首先证明 $F(z)$ 在 $z \in \mathbb{C}\setminus\gamma$ 连续，取邻域 $B(z_0, \delta) \subset \mathbb{C}\setminus\gamma$，

则 $\forall z \in B(z_0, \frac{\delta}{2})$，有

$$|\xi - z| \geq \frac{\delta}{2}, \quad \forall \xi \in \gamma$$



$$F(z)-F(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi-z_0}.$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(\xi)\cdot\left(\frac{1}{\xi-z}-\frac{1}{\xi-z_0}\right)d\xi$$

$$=\frac{z-z_0}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(\xi)\frac{d\xi}{(\xi-z)(\xi-z_0)}$$

故 $$|F(z)-F(z_0)|\leq |z-z_0|\cdot\frac{1}{2\pi}\int_\gamma |\varphi(\xi)|\cdot\frac{|d\xi|}{|\xi-z|\cdot|\xi-z_0|}$$

$$\leq |z-z_0|\cdot\frac{1}{2\pi}\int_\gamma |\varphi(\xi)|\frac{|d\xi|}{\frac{\delta}{2}\cdot\frac{\delta}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{4}{\delta^2}\cdot|z-z_0|\cdot\int_\gamma |\varphi(\xi)|\cdot|d\xi|$$

故 F 连续.

② $F'(z)$ 存在，$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi$

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z_0)}d\xi$$

$$\to \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z_0)^2}d\xi$$

注意：上式用到

$$\lim_{z\to z_0}\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z_0)}d\xi = \int_\gamma \lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z_0)}d\xi$$

原因：$\int_\gamma \left|\frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z_0)}\right| d\xi \leq \frac{4}{\delta^2}\int_\gamma |\varphi(\xi)|\, d\xi < +\infty$.

定理：设D为简单闭曲线γ所围区域，f在D上全纯，在$\bar{D}$上连续，则f(z)在D中有各阶导数，且

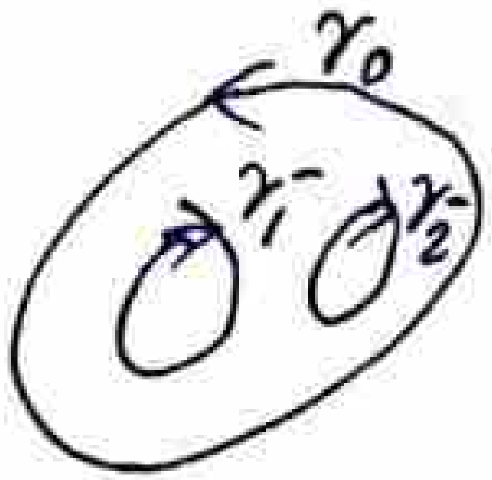
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\, d\xi$$

证：由Cauchy公式：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \quad (\forall z \in D)$$

注意上式右边关于z无穷次可导，故左边也关于z无穷次可导，从而f(z)在D中有无穷阶导数。

说明：对多连通域，只要将γ换成$\partial D = \gamma_0 \cup \gamma_1^- \cup \cdots \cup \gamma_n^-$即可.



Cauchy 不等式：若 $f(z)$ 在 $\overline{B(a,R)}$ 上全纯，且 $|f(z)| \le M$，则

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{n!\,M}{R^n}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

证明：$\forall\ 0<r<R$，

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{n!}{|2\pi i|} \int_\gamma \frac{|f(\xi)|}{|\xi-a|^{n+1}}\,|d\xi|$$

$$= \frac{n!}{2\pi} \int_{|z-a|=r} \frac{|f(\xi)|}{|\xi-a|^{n+1}}\,|d\xi| \le \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{1}{r^{n+1}}\cdot M\cdot 2\pi r$$

$$= \frac{M\,n!}{r^n}$$

令 $r \to R$ 即可.

Liouville 定理：若 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯，且有界，则 $f(z)$ 为常数。

证明：$\forall z_0 \in \mathbb{C}$，

$$|f'(z_0)| \le \frac{1}{R} \cdot \sup_{|z-z_0| \le R} |f(z)| \le \frac{M}{R}, \quad \text{令 } R \to +\infty,$$

则有 $f'(z_0) = 0$。

代数基本定理：$\mathbb{C}$ 上任何复系数非常数多项式至少有一个根.

证：设

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad (a_n \neq 0)$$

若 $p(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上无根，则 $\frac{1}{P_n(z)}$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯且 $\frac{1}{P_n(z)}$ 有界.

$$\left|\frac{P_n(z)}{z^n}\right| = \left| a_n + \frac{a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_0}{z^n} \right|$$

$$\geq |a_n| - \frac{C}{|z|}, \geq \frac{1}{2}|a_n|, \quad \text{当 } |z| \text{ 大时.}$$

故

$$\left|\frac{z^n}{P_n(z)}\right| \leq \frac{2}{|a_n|}$$

$$\left|\frac{1}{P_n(z)}\right| \leq \frac{2}{|a_n| \cdot |z|^n} \leq C, \quad \text{当 } |z| \text{ 大时.}$$

由 Liouville 定理知 $\frac{1}{P_n(z)}$ 为常数，矛盾.

推论：多项式 $P_n(z) = a_n z^n + \cdots + a_0\ (a_n \neq 0)$ 在 $\mathbb{C}$ 上恰有 n 个根（包含重根）

证：若 $P_n(z)$ 有一根为 w_1，则令 $z = z - w_1 + w_1$ 代入 $P_n(z)$ 中

$$P_n(z) = b_n (z-w_1)^n + \cdots + b_1 (z-w) + b_0$$

故由 $P_n(w_1) = 0$ 知 $b_0 = 0$. 故

$$P_n(z) = (z-w_1)\Big(\underbrace{b_n (z-w_1)^{n-1} + \cdots + b_1}_{Q(z)}\Big)$$

$Q(z)$ 为 $n-1$ 次多项式，可继续分解. 故

$$P_n(z) = a_n (z-w_1)(z-w_2)\cdots(z-w_n).$$

(Morera定理) 设$f(z)$是区域D中上连续函数，若对D中任何简单闭曲线(或者D中任何三角形)，有$\int_\gamma f(z)dz=0$，则$f(z)$全纯.

证明：固定$z_0\in D$，令$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$. 则$F(z)$积分与路径无关，且$F'(z)=f(z)$. 故F全纯，而F无穷次可导，从而f全纯.

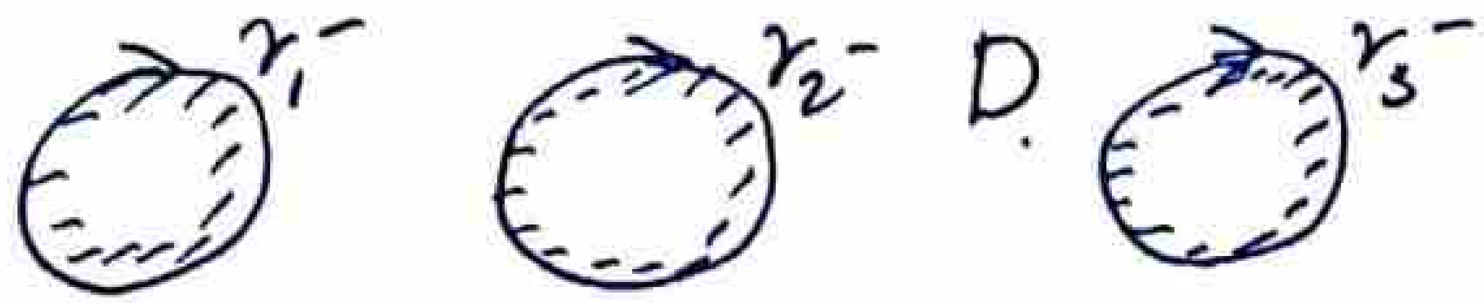
说明：两种方法证明全纯.

① 定义

② Morera定理.

无界区域情形:

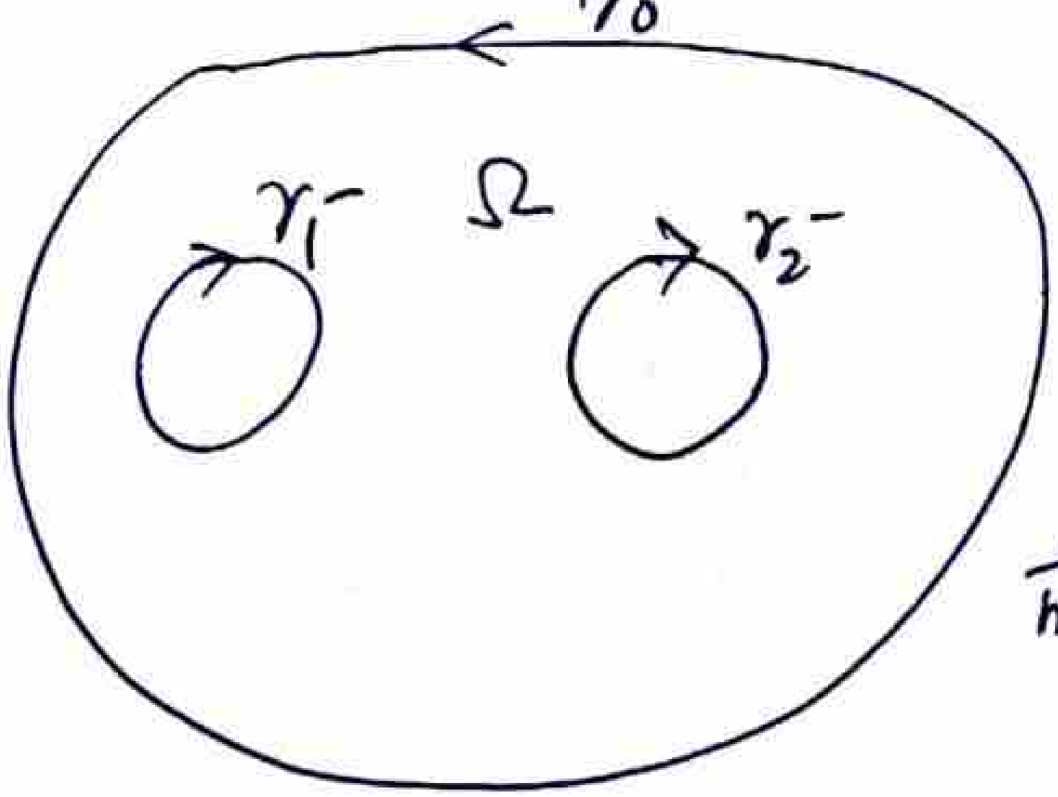
定义: 简单闭曲线族 $\gamma=\gamma_1^-\cup\gamma_2^-\cdots\cup\gamma_n^-$, 若 γ_i 均为简单闭曲线取负定向, 任意一条在其它各条外部, 则称 γ 所围无界区域 D.



定理: 设简单闭曲线族 $\gamma=\gamma_1^-\cup\gamma_2^-\cdots\cup\gamma_n^-$ 围成无界区域D, $f(z)$ 在 $D\setminus\{\infty\}$ 上全纯, 满足 $\lim\limits_{z\to\infty} z^2 f(z)=a$, $(a\in\mathbb{C})$, 且 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上连续. 则

$$\int_\gamma f(z)\,dz=0.$$

证：作充分大圆 γ_0: $|z|=R$ 包含 γ_i，则 $f(z)$ 在区域 Ω 中全纯



$$\int_{\partial\Omega} f(z) = 0.$$

$$\partial\Omega = \gamma_0 \cup \gamma_1^- \cup \cdots \cup \gamma_n^-$$

故 $$\left(\int_{\gamma_0} - \int_{\gamma_1} - \cdots - \int_{\gamma_n}\right) f(z)dz = 0$$

故 $$\int_{\gamma} f(z)dz = \left(-\int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} \cdots - \int_{\gamma_n}\right) f(z)dz$$

$$= -\int_{\gamma_0} f(z)dz$$

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \le \left|\int_{|z|=R} f(z)dz\right| \le \max_{|z|=R} |z^2 f(z)| \int_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z|^2}$$

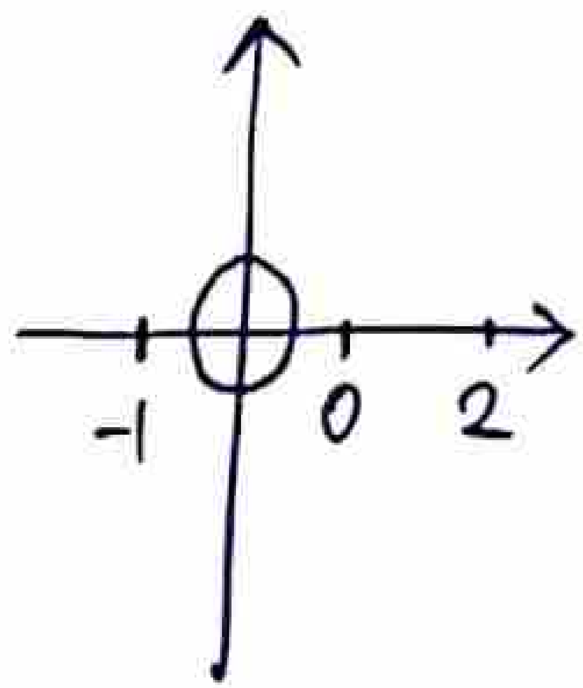
$$\le \max_{|z|=R} |z^2 f(z)| \cdot \frac{1}{R^2} \cdot 2\pi R \to 0.$$

例：求积分： $I=\int_C \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}$

其中 C 为圆周，$|z|=r$，$r\neq 1,2$.

解：① 当 $0<r<1$ 时

令 $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-2)}$，在 C_r 内部全纯.



$$I=\int_C \frac{f(z)}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}f''(0) = -\frac{3}{4}\pi i$$

回顾： $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$

② 当 $1<r<2$ 时.

$\dfrac{1}{z^3(z+1)(z-2)}$ 在C中有两个奇点 $z=0,-1$

再作 C_1: $|z+1|<\varepsilon$

C_2: $|z|<\varepsilon$

则由多连通域中的 Cauchy 公式.

$$\oint_C \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)} + \oint_{C_2} \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}$$

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)} = \oint_{C_1} \frac{\frac{1}{z^3(z-2)}}{z+1}\,dz = 2\pi i \left(\frac{1}{z^3(z-2)}\right)\Bigg|_{z=-1}$$

$$= \frac{2}{3}\pi i$$

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)} = \int_{C_2} \frac{\frac{1}{(z+1)(z-2)}}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{1}{(z+1)(z-2)}\right)''\Bigg|_{z=2}$$

$$= -\frac{3}{4}\pi i$$

故 $I = \frac{2}{3}\pi i - \frac{3}{4}\pi i = -\frac{1}{12}\pi i$

③当 $r>2$ 时.

方法一: $\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$, $C_3: |z-2| = \varepsilon$

方法二：令 $F(z)=\dfrac{1}{z^3(z+1)(z-2)}$

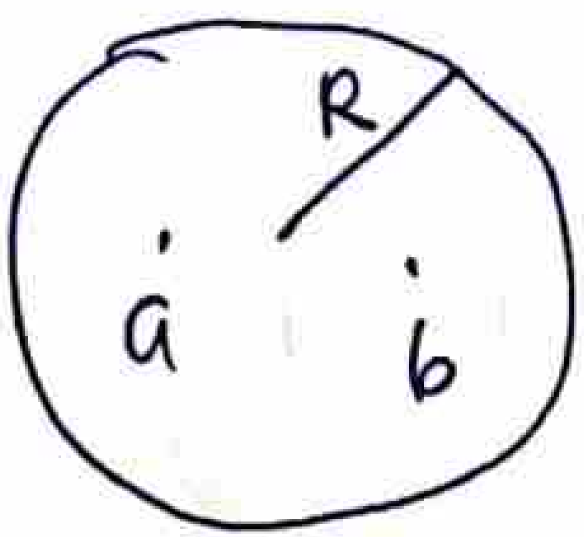
则 $\lim\limits_{z\to\infty} z^2F(z)=0\in\mathbb{C}$

由无界区域而Cauchy公式知积分为0.

Liouville定理：$\mathbb{C}$上有界全纯函数为常数.

证法一：Cauchy不等式

证法二：Cauchy公式：$\forall a, b \in \mathbb{C}$ 当R充分大时



$$f(a)-f(b)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z-a}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z-b}\,dz.$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}f(z)\cdot\frac{a-b}{(z-a)(z-b)}\,dz$$

$f(z)$在$\mathbb{C}$上有界，故 $|f(z)| \le M$，$\forall z \in \mathbb{C}$，从而

$$|f(a)-f(b)| \le \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{|z|=R} |f(z)| \cdot |a-b| \cdot \frac{1}{|z-a| \cdot |z-b|} |dz|$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot |a-b| \cdot \frac{1}{(R-|a|)(R-|b|)} \cdot 2\pi R \to 0 \quad (R \to +\infty).$$

故 $f(a)=f(b)$.

无界区域的 Cauchy 公式:

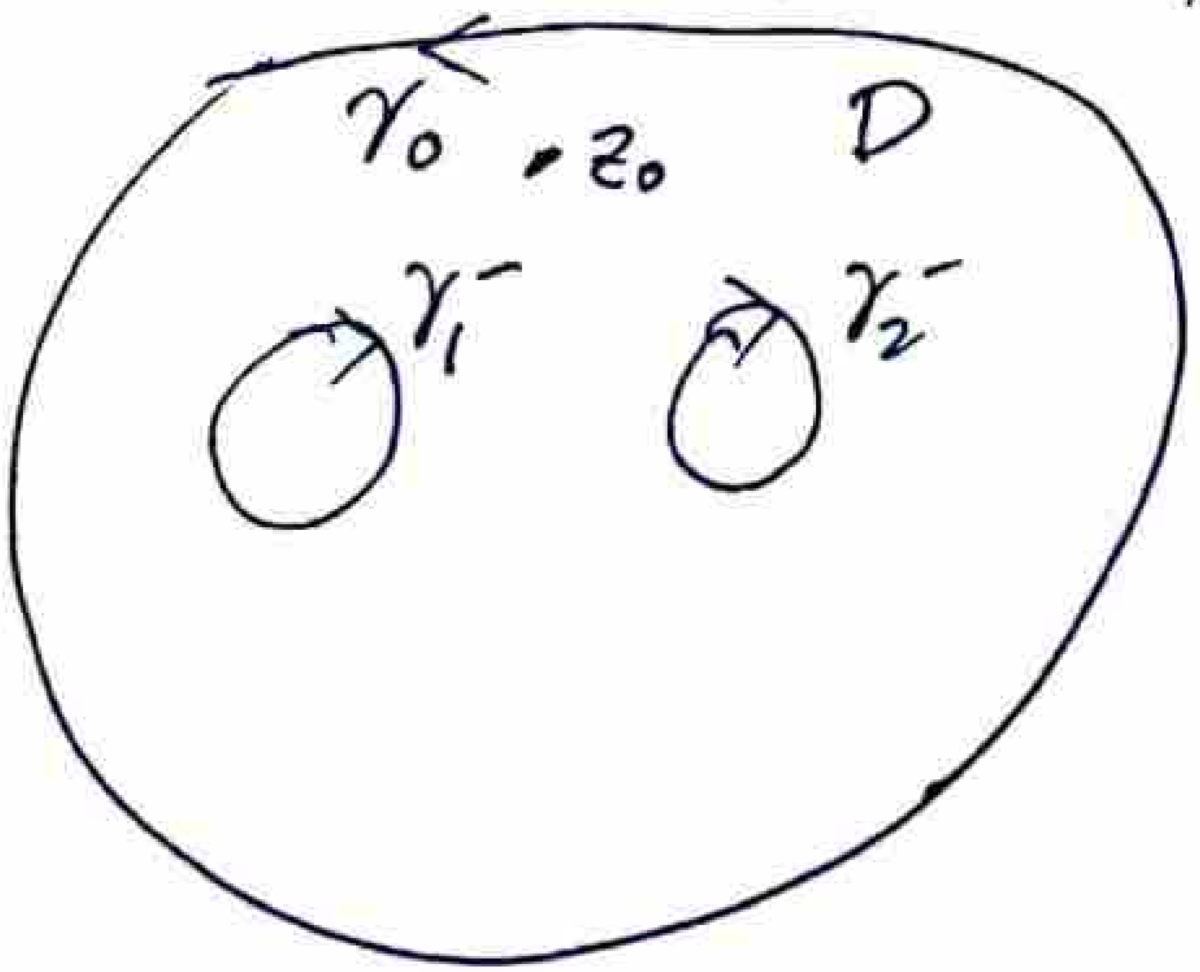
定理. 设简单闭曲线 $\gamma = \gamma_1^- \cup \gamma_2^- \cdots \cup \gamma_n^-$ 围成无界区域 D, 且 f(z) 在 D 中全纯, 在 $\bar{D}$ 上连续, 则 $\forall z \in D$, 有.

$$f(z) = f(\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

(注意 γ 的方向)

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi.$$

证明: $\forall z_0 \in D$, 取充分大的圆 $|z|=R$ 包含 z_0 与所有 γ_i, 则由多连通域的 Cauchy 公式有:



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\,d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\,d\xi$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\,d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R}\frac{f(\infty)}{\xi-z_0}\,d\xi+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R}\frac{f(\xi)-f(\infty)}{\xi-z_0}\,d\xi$$

$$=f(\infty)+I.$$

$$|I|\leq\max_{|\xi|=R}|f(\xi)-f(\infty)|\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{|\xi|=R}\frac{|d\xi|}{|\xi-z_0|}$$

$$\leq\max_{|\xi|=R}|f(\xi)-f(\infty)|\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi R}{R-|z_0|}\to 0.\quad(R\to\infty).$$

故. $f(z_0)=f(\infty)+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\,d\xi.$

高阶导数某例.

例: $I = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|z|=2} \dfrac{dz}{(z^4-1)(z-3)^2}$.

方法一: $z^4=1$ 在 $|z|<2$ 内有4个根 z_1, z_2, z_3, z_4.

分别对 z_1, z_2, z_3, z_4 用 Cauchy 公式……

方法二: $f(z)=\frac{1}{z^4-1}$ 在 $|z|>2$ 中全纯. $f'(3)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-}\frac{f(\xi)}{(\xi-3)^2}d\xi$.

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{f(\xi)}{(\xi-3)^2}d\xi=-f'(3)$$

$$=-\left(\frac{1}{z^4-1}\right)'\Big|_{z=3}=\frac{27}{1600}.$$

例：若 $f(z)$ 在 $|z-z_0|\le r$ 上全纯，且 $|\mathrm{Re}f(z)|\le M$，则

$$|f'(z_0)|\le \frac{2M}{r}.$$

证：$f'(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$，　令 $z=z_0+re^{i\theta}$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^2}\,rie^{i\theta}d\theta.$$

$$=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})\,e^{-i\theta}d\theta. \qquad ①$$

又 $0 = \dfrac{1}{2\pi i r^2} \displaystyle\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz = \dfrac{1}{2\pi i r^2} \int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\, r i e^{i\theta} d\theta$

$$= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\, e^{i\theta}\, d\theta$$

故 $\overline{0 = \dfrac{1}{2\pi r} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\, e^{i\theta}\, d\theta}$

$$= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \overline{f(z_0+re^{i\theta})}\, e^{-i\theta}\, d\theta . \qquad ②$$

①与②相加:

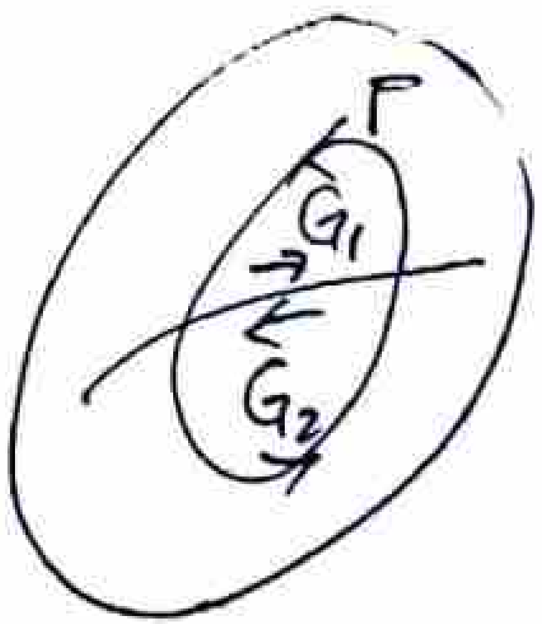
$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} 2\left(\mathrm{Re} f(z_0+re^{i\theta})\right) e^{-i\theta}\, d\theta$$

故 $|f'(z_0)| \leq \dfrac{1}{\pi r} \displaystyle\int_0^{2\pi} |\mathrm{Re} f| \cdot d\theta$

$$\leq \frac{1}{\pi r} \cdot M \cdot 2\pi = \frac{2M}{r} .$$

例：若$f(z)$在区域G中连续，在$G\setminus\gamma$上全纯．其中γ为G中分段光滑曲线．则f在G中全纯．

证①：$\displaystyle\int_{\partial G_1} f(z)=0$，$\displaystyle\int_{\partial G_2} f(z)dz=0$．



相加：$\displaystyle\int_{\Gamma} f(z)dz=0$

由Morera知$f(z)$在G中全纯．

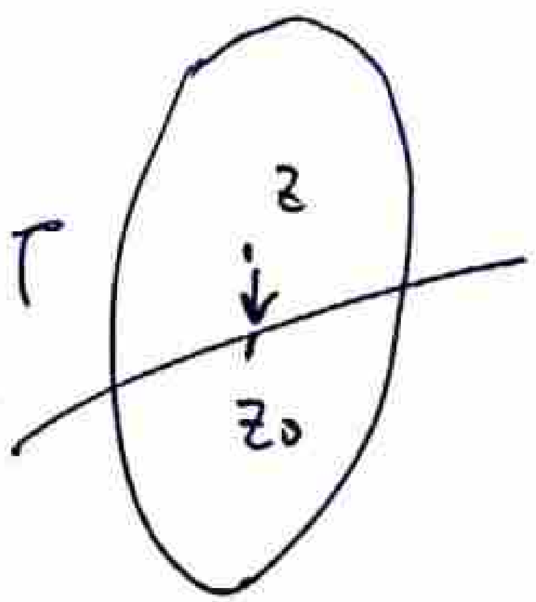
证②: $\forall z \in G_1$, $\quad f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial G_1} \dfrac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

又 $\dfrac{f(\xi)}{\xi - z}$ 当 $\xi \in G_2$ 时全纯. 故由Cauchy定理

$$\int_{\partial G_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$$

相加: $\quad f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma} \dfrac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (\forall z \in G_1).$

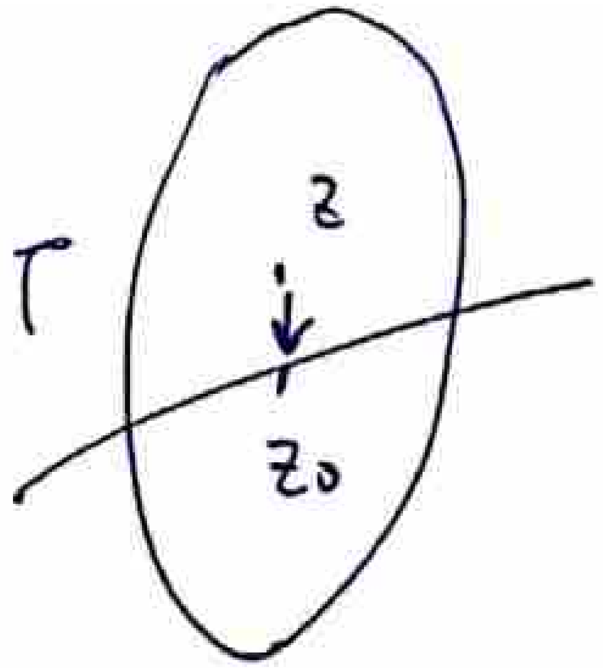
当 $z \to z_0 \in \gamma$ 时, $\quad \dfrac{1}{\xi - z} \to \dfrac{1}{\xi - z_0}$



由 Lebesgues 控制收敛定理知

$$f(z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in G_1}} f(z) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \to G_1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi.$$



由 Lebesgues 控制收敛定理知

$$f(z_0)=\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in G_1}} f(z) = \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\to G_1}} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\,d\xi.$$

由于 $F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ 上可导.

故 $f(z)$ 在 z_0 处可导. 由 z_0 的任意性知 $f(z)$ 在 γ 上可导.

故 f 在 G 中全纯.

级数.

数项级数，称 $\sum z_n$ 收敛，若部分和 $S_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$ 收敛到 $S \in \mathbb{C}$，否则称为发散.

$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}\, z_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}\, z_n$ 都收敛.

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N, p \geq 1$

$$|z_{n+1} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ 绝对收敛，若 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛.

函数项级数

给定集合 $E\subset\mathbb{C}$，函数列 $\{f_n(z)\}$

收敛：若对 $\forall z\in E$，$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 收敛，则称函数项级数 $\sum f_n(z)$

在 E 上收敛，记和函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$.

一致收敛：在集合 E 上，称 $\sum f_n(z)$ 一致收敛到 $f(z)$

若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$，$\forall n\geq N$，$|S_n(z)-f(z)|<\varepsilon$，$(\forall z\in E)$

其中 $S_n(z)=\sum_{k=0}^{n} f_k(z)$.

内闭一致收敛：若 $\sum f_n(z)$ 在区域 Ω 上任一紧集上一致收敛，则

称 $\sum f_n(z)$ 内闭一致收敛.

判别法：① $\sum f_n(z)$ 在E上一致收敛

$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists N>0$, $\forall n\geq N$, $\forall p\geq 1$, 有

$$|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots+f_{n+p}(z)|<\varepsilon,\quad (\forall z\in E)$$

② 若在E上 $|f_n(z)|\leq M_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n<+\infty$, 则

$\sum f_n(z)$ 在E上一致收敛.

③ 若 $f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在集合 E 上连续，且 $f_n(z)$ 在 E 上一致收敛到 $f(z)$，则 $f(z)$ 在 E 上连续.

证③：一致收敛：$\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$，$\forall n\geq N$ 时

$$|f(z)-S_n(z)|<\varepsilon,\quad (\forall z\in E)$$

固定上述 N，对 $z_0\in E$，取 δ 充分小，$|z-z_0|<\delta$ 时

$$|S_N(z)-S_N(z_0)|<\varepsilon$$

则 $$|f(z)-f(z_0)|\leq|f(z)-S_N(z)|+|S_N(z)-S_N(z_0)|+|f(z_0)-S_N(z_0)|\leq 3\varepsilon.$$

定理：若 $f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在可求长曲线 γ 上连续，且 $\sum f_n(z)$ 在 γ 上一致收敛到 $f(z)$，则 $\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)\,dz$.

证：由于 $\sum f_n(z)$ 在 γ 上一致收敛，故 $f(z)$ 在 γ 上连续。故 $\int_\gamma f(z)\,dz$ 有定义.

由假设，$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，使当 $n\geq N$ 时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\right| < \frac{\varepsilon}{L}, \qquad L=\text{length}(\gamma).$$

则当 $n\geq N$ 时

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\int_\gamma f_k(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\gamma \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\right) dz\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{L}\cdot L = \varepsilon.$$

故 $$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)\,dz.$$

定理（Weierstrass定理）. 若

① $\{f_n(z)\}$ 在区域D中全纯

② $\sum f_n(z)$ 在D中内闭一致收敛到 $f(z)$.

则 (1) $f(z)$ 在D中全纯

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在D中内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

证：(1) 全纯 + 内闭一致收敛 $\Rightarrow$ $f(z)$ 连续.

设 γ 为任一分段光滑简单闭曲线，则

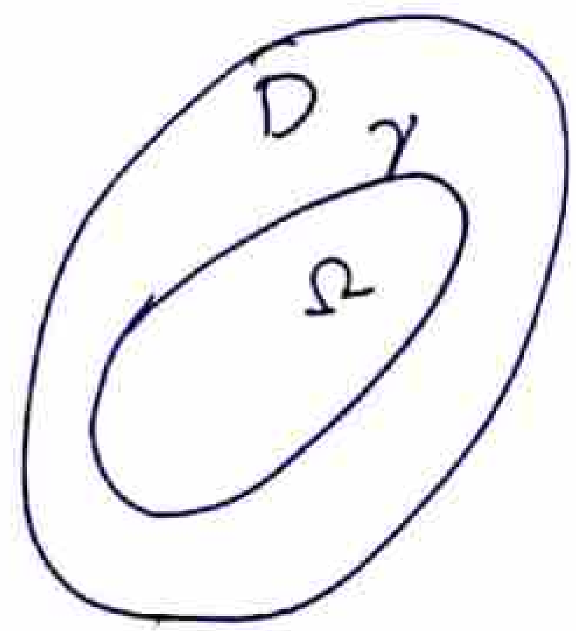
$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z)\,dz = 0$$

由Morera定理 $f(z)$ 在D中全纯.

(2). 令 $g_n(z)=f(z)-\sum_{j=1}^{n} f_j(z)$，则 $g_n(z)$ 在D中全纯.

$$g_n^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g_n(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}\,d\xi, \quad (k\in\mathbb{N})$$

故 设 $d=\min\limits_{\substack{z\in\Omega\\ \xi\in\partial D}}\{|z-\xi|\}>0$，则 $\forall z\in\Omega$.



$$|g_n^{(k)}(z)| \le \frac{k!}{2\pi}\cdot\max_{\xi\in\Omega}|g_n(\xi)|\cdot\int_\gamma \frac{1}{|\xi-z|^{k+1}}|d\xi|$$

$$\le C\cdot\max_{\xi\in\Omega}|g_n(\xi)| \to 0 \quad (n\to\infty).$$

故 $g_n^{(k)}(z)$ 在 Ω 上一致收敛.

定理：设 $F(z,s): \Omega \times [0,1] \to \mathbb{C}$ 满足：

① $F(z,s)$ 是 z 的全纯函数，

② F 在 $\Omega \times [0,1]$ 上连续.

则 $f(z) = \int_0^1 F(z,s)\,ds$ 全纯.

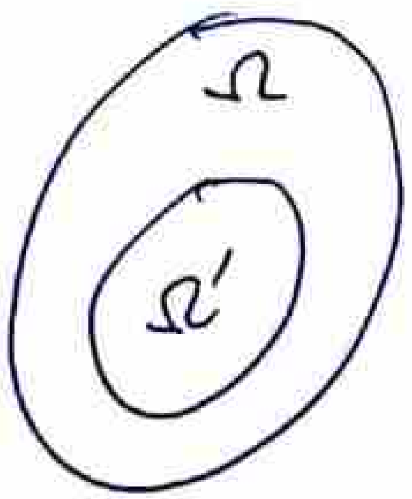
证：令

$$f_n(z)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F\left(z,\frac{k}{n}\right)$$

则 $f_n(z)$ 在 Ω 上全纯，下证 $f_n(z)$ 内闭一致收敛到 $f(z)$.

$$|f_n(z)-f(z)| = \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(F\left(z,\frac{k}{n}\right)-F(z,s)\right)ds\right|$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|F\left(z,\frac{k}{n}\right)-F(z,s)\right|ds$$



由于 $F(z,s)$ 在 $\overline{\Omega'}\times[0,1]$ 上一致连续，故对 $\forall s_1, s_2$ 满足 $|s_1-s_2|<\delta$ 时

$$|F(z,s_1)-F(z,s_2)|<\varepsilon \quad (\forall z\in\Omega').$$

故 $|f_n(z)-f(z)|\le \sum_{k=1}^{n}\varepsilon\cdot\frac{1}{n}=\varepsilon \quad (\forall z\in\Omega').$

从而 $f_n(z)$ 内闭一致收敛到 $f(z)$，且 $f(z)$ 全纯.

例：设函数 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 上连续有界，则函数

$$g(z) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-zt}\, dt$$

在 $\underbrace{\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0\}}_{=: \Omega}$ 上有定义且全纯.

例：设函数 $f(t)$ 在 $t\geq 0$ 上连续有界，则函数

$$g(z)=\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-zt}\, dt$$

在 $\underbrace{\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z>0\}}_{=\Omega}$ 上有定义且全纯.

证：① 令 $g_n(z)=\int_0^{n} f(t)\, e^{-zt}\, dt$，$n\in\mathbb{N}$.

知 $F(z,t)=f(t)\, e^{-zt}$ 在 $\Omega\times[0,n]$ 上满足前面定理的条件，

故 $g_n(z)=\int_0^{n} F(z,t)\, dt$ 在 Ω 上全纯.

② 设 $K \subset \Omega$ 为任意紧集，则令 $\delta = \min\limits_{z \in K} \operatorname{Re} z > 0$.

令 $M = \sup\limits_{t \geq 0} |f(t)| < +\infty$.

则 $\forall z \in K$.

$$|g_n(z) - g(z)| = \left| \int_n^\infty f(t) e^{-zt} dt \right|$$

$$\leq \int_n^\infty |f(t)| \cdot |e^{-zt}| \, dt.$$

设 $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$，则

$$|e^{-zt}| = |e^{-(x+yi)t}| = e^{-xt}$$

故 $|g_n(z) - g(z)| \leq M \cdot \int_n^\infty e^{-xt} dt \leq M \cdot \int_n^\infty e^{-\delta t} dt$

$$= \frac{M}{\delta}, \quad \forall z \in K.$$

故 $g_n(z)$ 在 K 上一致收敛到 $g(z)$.

从而 $g(z)$ 在 Ω 中全纯.

考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

定理. 令 $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$

则当 $|z|<R$ 时, $\sum a_n z^n$ 绝对, 内闭一致收敛.

当 $|z|>R$ 时, $\sum a_n z^n$ 发散.

证明：① 若 $R=0$，则 $\sum a_n z^n$ 收敛 $\Leftrightarrow z=0$

证：若 $z_0\neq 0$，由于 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$，故 $\exists\, n_k$，

$$|a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} > \frac{1}{|z_0|} \Rightarrow |a_{n_k}|\cdot|z_0|^{n_k} > 1$$

$\Rightarrow$ 发散.

② 若 $R=\infty$，则 $\sum a_n z^n$ 处处收敛.

证：取 $z_0\neq 0$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0$ 故 $\forall n>N$ 时

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|z_0|} \Rightarrow |a_n|\cdot|z_0|^n < \frac{1}{2^n}$$

$\Rightarrow$ 绝对，内闭一致收敛.

③ 设 $0<R<\infty$，则取 $0\neq z_0$，$|z_0|<R$，取 $|z_0|<\rho<R$

则 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}<\frac{1}{\rho}$，$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|}<\frac{1}{\rho}$

$\Rightarrow |a_n|\rho^n<1$

$\Rightarrow |a_n||z_0|^n<\left(\frac{z_0}{\rho}\right)^n$

故 $\sum a_n z_0^n$ 绝对，内闭一致收敛.

④ 若 $|z_0|>R$，取 $|z_0|>r>R$，则 $\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}>\frac{1}{r}$

故 $|a_n|>\frac{1}{r^n}$，故 $|a_n|\cdot|z_0|^n>\left(\frac{z_0}{r}\right)^n>1$，故发散.

例: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $R=+\infty$, 在 $\mathbb{C}$ 上收敛.

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$, $R=1$, 在 $|z|<1$ 上收敛.

定理：设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛域为 $|z|<R$

则 ① $f(z)$ 是 $|z|<R$ 上全纯函数

② f 在 $|z|<R$ 上可导，且 $f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

③ $f'(z)$ 在 $|z|<R$ 上收敛且全纯.

证明：令 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

取 $|z_0|<R$. 要证：$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=g(z_0)$.

즉 $f(z) = S_n(z) + E_n(z)$, $\quad S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$

때 $\quad \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - g(z_0)$.

$$= \frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} + \frac{E_N(z_0+h) - E_N(z_0)}{h} - g(z_0)$$

$$= \left(\frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} - S_N'(z_0) \right)$$

$$+ \frac{E_N(z_0+h) - E_N(z_0)}{h} + S_N'(z_0) - g(z_0).$$

由于 $S_N'(z_0) \to g(z_0)$, $N \to +\infty$, 且

$$\left|\frac{E_N(z_0+h)-E_N(z_0)}{h}\right| = \sum_{n=N+1}^{\infty}\left|a_n\cdot\frac{(z_0+h)^n-z_0^n}{h}\right|$$

$$\left|(z_0+h)^n - z_0^n\right| = \left|h\cdot\left[(z_0+h)^{n-1}+(z_0+h)^{n-2}\cdot z_0+\cdots+z_0^{n-1}\right]\right|$$

$$\le |h|\cdot n\cdot r^{n-1},$$ 取 $|z_0|<r<R$, $|z_0+h|<r<R$.

则 $\left|\dfrac{E_N(z_0+h)-E_N(z_0)}{h}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|n\cdot r^{n-1}$

由于 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ 收敛半径为R，故当N充分大时 $\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|\cdot n\cdot r^{n-1}<\varepsilon$.

固定 $z_0\in B(0,r)$，$\forall\varepsilon>0$，可取N充分大使得

① $|S_N'(z_0)-g(z_0)|<\varepsilon$

② $\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|\cdot n r^{n-1}<\varepsilon$

固定N，取h充分小，使 $\left|\dfrac{S_N(z_0+h)-S_N(z_0)}{h}-S_N'(z_0)\right|<\varepsilon$.

则有 $\left|\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}-g(z_0)\right|<3\varepsilon$.

故f在z_0处可导，且 $f'(z)=g(z)$.

推论：幂级数 $\sum a_n z^n$ 在收敛域上无穷次可导.

定义：在区域D上，称函数 $f(z)$ 在 ~~$z_0 \in D$~~ $z_0 \in D$ 上解析，若 f 在 z_0 处可展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in B(z_0, \varepsilon).$$

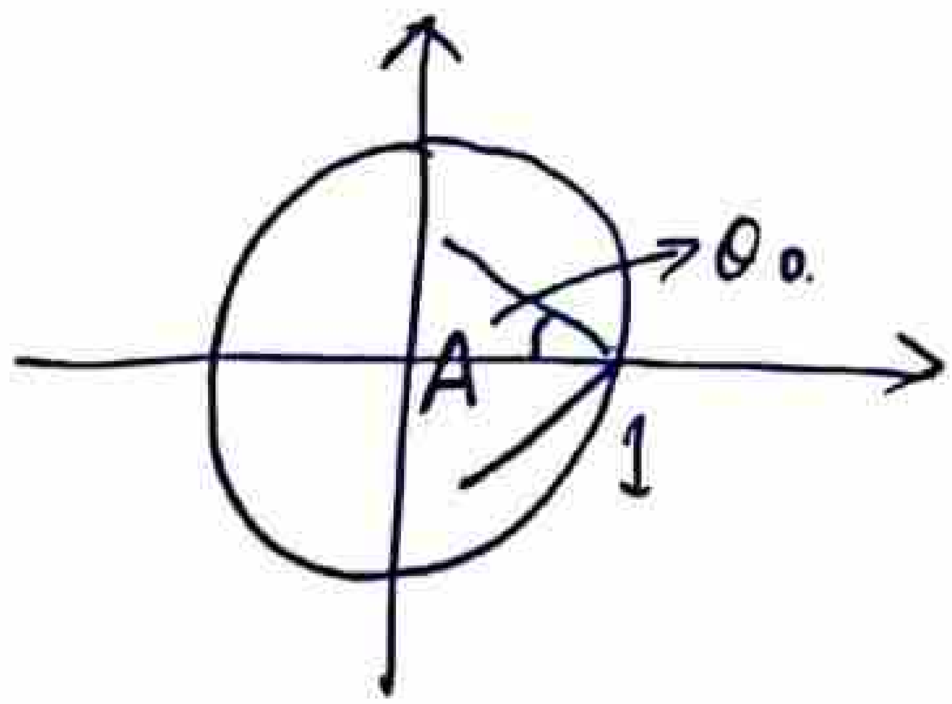
若 f 在D中任何点都解析，则称 f 在D中解析.

推论：若 f 在D上解析，则 f 全纯.

例：$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ 在 $\mathbb{C}$ 上可导.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ 在 $|z|<1$ 上可导.

定理.(Abel) 若幂级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛半径 $R=1$，且在点 $z=1$ 处收敛到 S，则



(1) 级数在区域 A 上一致收敛

(2) $\lim\limits_{\substack{z\in A \\ z\to 1}} f(z)=S$

证明：令 $\sigma_{n,p} = a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}$

则 $\sum a_n$ 收敛 $\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N>0, \forall n>N, |\sigma_{n,p}|<\varepsilon.$

故 $a_{n+1} z^{n+1} + \cdots + a_{n+p} z^{n+p}$

$= \sigma_{n,1} z^{n+1} + (\sigma_{n,2} - \sigma_{n,1}) z^{n+2} + \cdots + (\sigma_{n,p} - \sigma_{n,p-1}) z^{n+p}$

$= \sigma_{n,1} z^{n+1}(1-z) + \sigma_{n,2} z^{n+2}(1-z) + \cdots + \sigma_{n,p-1}(z^{n+p-1} - z^{n+p})$

$+ \sigma_{n,p} z^{n+p}$

$= \sigma_{n,1} z^{n+1}(1-z) + \sigma_{n,2} z^{n+2}(1-z) + \cdots + \sigma_{n,p-1} z^{n+p-1}(1-z)$

$+ \sigma_{n,p} z^{n+p}$

$= z^{n+1}(1-z)\left(\sigma_{n,1} + \sigma_{n,2} z + \cdots + \sigma_{n,p-1} z^{p-2}\right) + \sigma_{n,p} z^{n+p}$

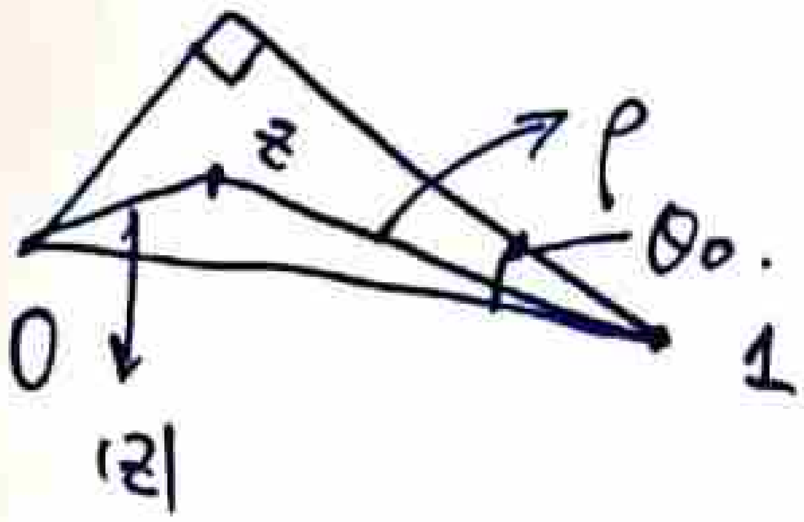
故 $\left| a_{n+1} z^{n+1} + \cdots + a_{n+p} z^{n+p} \right|$

$$\leq |z|^{n+1} \, |1-z| \cdot \left(|\sigma_{n,1}| + |\sigma_{n,2}|\,|z| + \cdots + |\sigma_{n,p-1}| \cdot |z|^{p-2} \right) + |\sigma_{n,p}|$$

$$\leq \varepsilon \cdot |z|^{n+1} \, |1-z| \, \frac{1}{1-|z|} + \varepsilon$$

下证：对 $\forall z \in A$，$\dfrac{|1-z|}{1-|z|}$ 一致有界.

设 $r=|z|$，则



$$r^2 = 1+\rho^2-2\rho\cos\theta,\quad 0\le\theta\le\theta_0.$$

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{\rho}{1-r} = \frac{\rho(1+r)}{1-r^2}$$

$$= \frac{\rho(1+r)}{2\rho\cos\theta-\rho^2} \le \frac{1+r}{2\cos\theta-\rho}$$

$$\le \frac{1+r}{\cos\theta} \le \frac{1+r}{\cos\theta_0}$$

注意 $\rho\le\cos\theta$.

故级数在区域 A 中一致收敛.

(2) 令 $E = A\cup\{1\}$，则级数在E上一致收敛，且每项在E上连续.

故 $f(z)$ 在E上连续. 即 $\lim\limits_{\substack{z\in A\\ z\to 1}} f(z) = f(1) = S$.

例: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ 在 $\{|z|\le 1\}\setminus\{1\}$ 上收敛.

解: ① $R=1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ 在 $|z|<1$ 上内闭一致收敛.

② $z=1$ 时发散.

③ 当 $z_0=e^{i\theta}$, $(\theta\in\mathbb{R})$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ 实部 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}$, 虚部 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$

若 $\theta\in(0,2\pi)$, 则实部虚部都收敛. $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ 在 $z=e^{i\theta}$, $\theta\in(0,2\pi)$ 收敛.

Dirichlet 判别法：设 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 两数列，$S_k=\sum_{i=1}^{k} a_i$.

若 ①: $\{b_k\}$ 单调趋于 0

② $\{S_k\}$ 有界

则 $\sum a_k b_k$ 收敛.

④ 求和函数.

当 $|z|<1$ 时: $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}=\frac{1}{1-z}$$

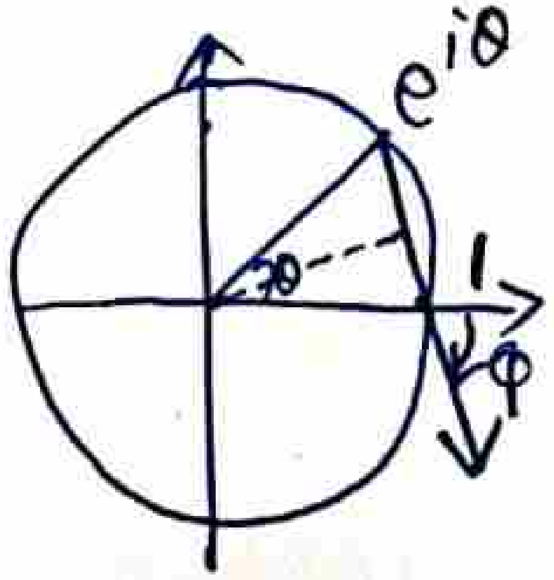
$$f(z)-f(0)=\int_0^z f'(w)\,dw=\int_0^z\frac{1}{1-w}\,dw=-\left[\operatorname{Log}(1-z)\right]_0^z$$

$$=-\log(1-z).$$ (取 $\log 1=0$ 的分支).

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\log(1-z)$, $(|z|<1)$

当 $z = e^{i\theta}$, $\theta \in (0, 2\pi)$ 时收敛. 故由 Abel 定理

$$f(e^{i\theta}) = \lim_{\substack{z = te^{i\theta} \\ t \to 1^-}} f(z) = \lim_{\substack{z = te^{i\theta} \\ t \to 1^-}} \left(-\log(1-z)\right)$$



$$= -\log(1-e^{i\theta})$$

$$= -\log|1-e^{i\theta}| - i\arg(1-e^{i\theta}), \quad \arg \in (-\pi, \pi].$$

$$|1-e^{i\theta}| = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\arg(1-e^{i\theta}) = -\frac{\pi-\theta}{2}$$

故 $f(e^{i\theta}) = -\log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\pi-\theta}{2}i$, $\theta \in (0, 2\pi)$

比较实部与虚部:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) \qquad \forall \theta \in (0, 2\pi).$$

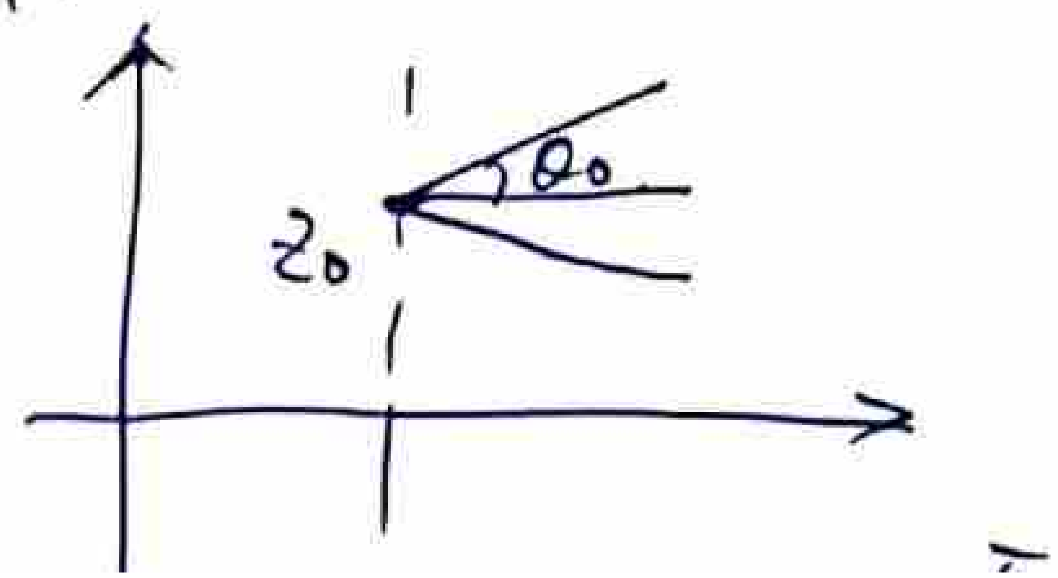
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^z}$ 的收敛性.

定理: 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^z}$ 在点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 收敛, 则

① 它在 $\mathrm{Re}\, z > x_0$ 内收敛.

② 级数在区域 A 的闭包上一致收敛.



$\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$.

证明：① 令 $\sigma_n = 0$, $\sigma_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{(n+1)^{z_0}}$.

$$\sigma_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{(n+1)^{z_0}} + \frac{a_{n+2}}{(n+2)^{z_0}}.$$

$$\cdots$$

$$\sigma_{n+p} = \frac{a_{n+1}}{(n+1)^{z_0}} + \frac{a_{n+2}}{(n+2)^{z_0}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{(n+p)^{z_0}}.$$

故 $\sigma_{n+p} - \sigma_{n+p-1} = \dfrac{a_{n+p}}{(n+p)^{z_0}}$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{k^z} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{k^{z_0}} \cdot \frac{1}{k^{z-z_0}}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{k^{z-z_0}}.$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sigma_k}{k^{z-z_0}} - \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{\sigma_k}{(k+1)^{z-z_0}}$$

$$= \left(\frac{\sigma_{n+1}}{(n+1)^{z-z_0}} + \frac{\sigma_{n+2}}{(n+2)^{z-z_0}} + \cdots + \frac{\sigma_{n+p}}{(n+p)^{z-z_0}} \right)$$

$$- \left(\frac{\sigma_n}{(n+1)^{z-z_0}} + \frac{\sigma_{n+1}}{(n+2)^{z-z_0}} + \cdots + \frac{\sigma_{n+p-1}}{(n+p)^{z-z_0}} \right).$$

$$= \sigma_{n+1}\left(\frac{1}{(n+1)^{z-z_0}} - \frac{1}{(n+2)^{z-z_0}}\right) + \cdots$$

$$+ \sigma_{n+p-1}\left(\frac{1}{(n+p-1)^{z-z_0}} - \frac{1}{(n+p)^{z-z_0}}\right) + \frac{\sigma_{n+p}}{(n+p)^{z-z_0}}$$

在单值域中

$$(w^{\beta})' = \left(e^{\beta \operatorname{Log} w}\right)' = \beta \cdot \frac{1}{w} e^{\beta \log w}$$

$$= \beta w^{\beta-1}.$$

故令 $\beta = -(z-z_0)$, $k>0$,

$$\left| k^{\beta} - (k+1)^{\beta} \right| = \left| \int_k^{k+1} \beta t^{\beta-1}\, dt \right|$$

$$\le |\beta| \cdot \int_k^{k+1} \left| t^{\beta-1} \right| \cdot dt.$$

设 $\beta-1 = u+iv$, $u, v \in \mathbb{R}$.

$$\left| t^{u+iv} \right| = \left| e^{(u+iv)\log t} \right| = \left| e^{u \log t} \right| = t^{u}$$

故 $$\left| k^{\beta} - (k+1)^{\beta} \right| \leq |\beta| \cdot \int_{k}^{k+1} t^{\operatorname{Re}\beta - 1}\, dt.$$

$$= \frac{|\beta|}{\operatorname{Re}\beta} \left((k+1)^{\operatorname{Re}\beta} - k^{\operatorname{Re}\beta} \right)$$

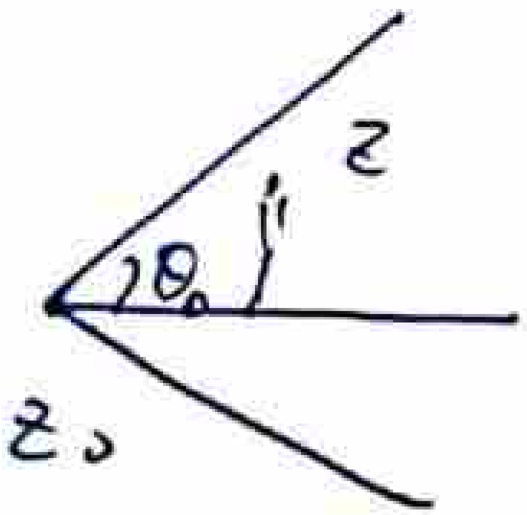
故 $$\left| \frac{1}{k^{z-z_0}} - \frac{1}{(k+1)^{z-z_0}} \right| \leq \frac{|z-z_0|}{x_0 - x} \left((k+1)^{x_0 - x} - k^{x_0 - x} \right)$$

$$= \frac{|z-z_0|}{x - x_0} \left(k^{x_0 - x} - (k+1)^{x_0 - x} \right)$$

故. $$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{k^z} \right| \leq \varepsilon \cdot \frac{|z-z_0|}{x - x_0} \cdot \frac{1}{(n+1)^{x-x_0}} + \frac{\varepsilon}{(n+p)^{x-x_0}}$$

故当 $\operatorname{Re} z = x > x_0$ 时

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{k^z}\right| \le \varepsilon\cdot\left(\frac{|z-z_0|}{x-x_0}+1\right).$$



$$\le \varepsilon\cdot\left(\frac{1}{\cos\theta_0}+1\right). \quad \forall z\in A.$$

故 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k^z}$ 在区域 A 上一致收敛，在 $\bar{A}$ 上也一致收敛.

定理：任一形如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^z}$ 的函数项级数都有一收敛直线 $\mathrm{Re}\,z=C$

满足：(1) 级数在直线右半平面内收敛，在直线的左半平面发散.

(2) 若在直线上一点 z_0 收敛，则在上述角状域中级数一致收敛.

(3) 级数在收敛直线的右半平面内内闭一致收敛.

证明：(1) 若级数处处发散，则直线为 $\mathrm{Re}\, z=+\infty$.

若级数处处收敛，则直线为 $\mathrm{Re}\, z=-\infty$.

若 $\exists z_1\in\mathbb{C}$ 级数收敛，$\exists z_1'\in\mathbb{C}$ 级数发散，

若 $\mathrm{Re}\, z_1=\mathrm{Re}\, z_1'$，取 $C=\mathrm{Re}\, z_1$

若 $\mathrm{Re}\, z_1\neq\mathrm{Re}\, z_1'$，则必有 $\mathrm{Re}\, z_1'<\mathrm{Re}\, z_1$，则.

可设 $z_1', z_1\in\mathbb{R}$. 设 $C_1=\dfrac{z_1+z_1'}{2}$，若级数在 C_1 收敛，则

记 $b_1=C_1$，$a_1=z_1'$，否则记 $a_1=C_1$，$b_1=z_1$，令 $C_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}$.

继续上述操作，故可得

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

且 $b_n-a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}(b_1-a_1)\to 0$ 故，由区间套定理，存在 $C\in\mathbb{R}$.

$$C=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n\in\mathbb{C}.$$

则直线 $\mathrm{Re}\, z=C$ 符合要求.

(2)(3) 略.

例：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$，当 $z=1$ 时发散，当 $z=x>1$ 时收敛。

其收敛直线为 $z=1$。其级数在 $\operatorname{Re} z>1$ 时内闭一致收敛，

令 $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$，则 $\zeta(z)$ 可解析延拓到 $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ 上。

在 $z=-2m\ (m=1,2,\cdots)$ 上是零点（平凡零点）。

Riemann 猜想：$\zeta(z)$ 的其余所有零点都在 $\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}$ 直线上。

例: $\dfrac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\cdots \quad (|z|<1)$

级数 $f(z)=1+z+z^2+\cdots$ 在 $|z|<1$ 中收敛, 在 $|z|>1$ 发散.

但 $f(z)$ 可全纯开拓为 $\dfrac{1}{1-z}$, 在 $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ 上全纯.

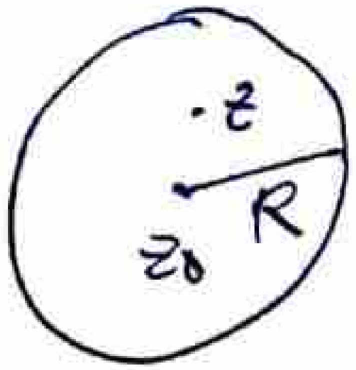
全纯函数的幂级数展开

定理：设 $f(z)$ 在区域 D 中全纯，$\overline{B(z_0, R)} \subset D$，则 f 可在 z_0 处展开：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad \forall z \in B(z_0, R).$$

且展式唯一。

证: $\forall z \in B(z_0, R)$, $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|\xi - z_0| = R} \dfrac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$



$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)}$$

$$= \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)}$$

$$= \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n$$

因为 $z \in B(z_0, R)$, 故 $\left|\dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| < 1$, 故上式绝对收敛.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = R} f(\xi) \cdot \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n d\xi$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = R} f(\xi) \cdot \frac{1}{(\xi - z_0)^{n+1}}\right) (z - z_0)^n$$

令 $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|\xi - z_0| = R} f(\xi) \cdot \dfrac{1}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$.

推论：f在z_0处全纯 $\Leftrightarrow$ f在z_0邻域中展开成幂级数.

定理：若函数f在圆盘内解析，则f的幂级数展式是唯一的.

证：$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$

$$\int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\,dz = \int_{|z-z_0|=R} \frac{1}{(z-z_0)^{m+1}}\left(a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots\right)dz$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^{k-m-1}\,dz.$$

若 $k=m$，则 $$\int_{|z-z_0|=R}(z-z_0)^{k-m-1}dz=\int_{|z-z_0|=R}(z-z_0)^{-1}dz=2\pi i$$

若 $k\neq m$，则: $$\int_{|z-z_0|=R}(z-z_0)^{k-m-1}dz=\int_0^{2\pi}(re^{i\theta})^{k-m-1}\cancel{dz}\,rie^{i\theta}d\theta$$

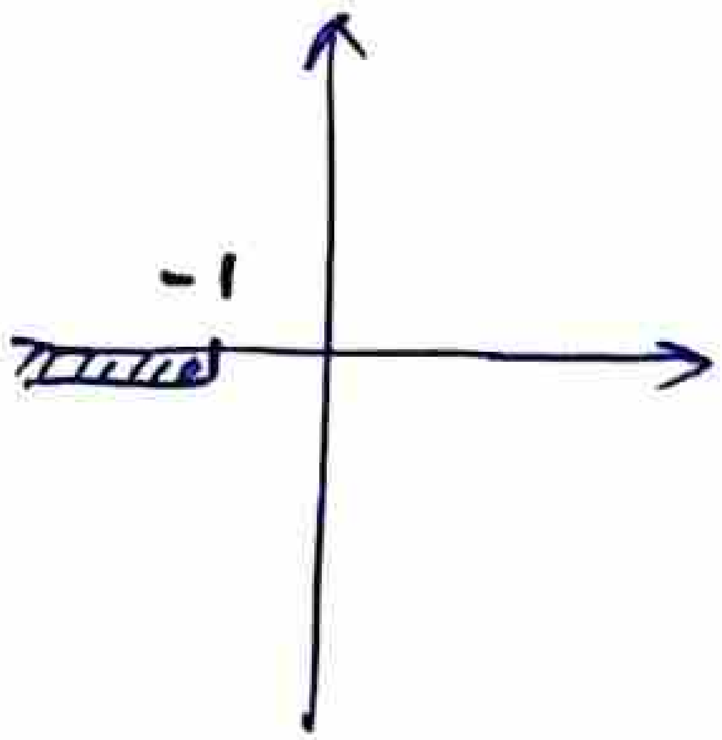
$$=r^{k-m-1}\int_0^{2\pi}e^{i(k-m-1)\theta}\cancel{dz}\,rie^{i\theta}d\theta.$$

$$=r^{k-m}i\int_0^{2\pi}e^{i(k-m)\theta}d\theta$$

$$=0.$$

所以 $$\int_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}dz=a_m\cdot 2\pi i\quad\Rightarrow a_m\text{ 唯一.}$$

例：对数函数 $\mathrm{Log}(1+z)$ 的单值分支在 $z=0$ 处的展式



设 $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$.

则 $\mathrm{Log}(1+z)$ 在 Ω 上单值分支：

$$\log_k(1+z) = \log_0(1+z) + 2k\pi i$$

$$\log_0(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{3}z^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \cdots$$

$(|z|<1)$. 故

故 $$\log_k(1+z) = 2k\pi i + z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \cdots$$

$(|z|<1,\quad k \in \mathbb{Z})$.

定义：若 $f(z)$ 在 z_0 处全纯，且 $f(z_0)=0$，则称 z_0 为 $f(z)$ 的零点。

此时 $f(z)$ 在 z_0 的邻域中可展开：

$$f(z)=f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots \qquad (\forall z\in B(z_0,\delta)).$$

只有两种情形：

(1) 若 $f^{(n)}(z_0)=0$，$\forall n\geq 1$，则 $f(z)$ 在 $B(z_0,\delta)$ 内恒为0.

(2) 若 $f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0$，$f^{(m)}(z_0)\neq 0$. 则称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点，或 m 重零点。此时，

$$f(z)=(z-z_0)^m\cdot\left[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)+\cdots\right],\ \forall z\in B(z_0,\delta).$$

$$=(z-z_0)^m\cdot g(z)$$

则 $g(z)$ 满足 $g(z_0)\neq 0$，$g(z)$ 在 $B(z_0,\delta)$ 内全纯。

命题：z_0 是全纯 $f(z)$ 的 m 阶零点 $\Leftrightarrow$ $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$，

其中 $g(z)$ 在 z_0 邻域中全纯，$g(z_0)\neq 0$.

证：$\Rightarrow$ f 在 z_0 全纯，故

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

$$= a_m (z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \cdots$$

$$=(z-z_0)^m\left(a_m + a_{m+1}(z-z_0)+\cdots\right)$$

$g(z)=a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots$ 在 z_0 邻域中全纯.

定理：若 $f(z)$ 在区域 Ω 中全纯，则 f 的零点是孤立的。

即若 $z_k \to z_0 \in \Omega$，$z_k \in \Omega$，$z_k \neq z_0$，$f(z_k)=0$，则 f 在 Ω 中恒为 0.

证明：

① $f(z)$ 在 z_0 处全纯，若 f 在 $B(z_0,\delta)$ 内不恒为 0，则可展开：

$$f(z) = a_m (z-z_0)^m (1+\varphi(z)),\quad a_m \neq 0,\quad m \geq 0.$$

其中 $\varphi(z)$ 在 $B(z_0,\delta)$ 内全纯，且 $\varphi(z_0)=0$。取 δ 小，使 $|\varphi(z)|<\varepsilon$，$\forall z \in B(z_0,\delta)$，则

$$f(z_k) = a_m (z_k - z_0)^m (1+\varphi(z_k)) \neq 0,\ 若\ z_k \in B(z_0,\delta).$$

与假设矛盾，故 f 在 $B(z_0,\delta)$ 内恒为 0.

② 下证 f 在整个 Ω 上恒为 0.

由于 f 连续，故 $E=\{z\in\Omega \mid f(z)=0\}$ 是闭集且非空.

令 U 为 E 的内部. 则 U 为开集. 由①知，U 非空.

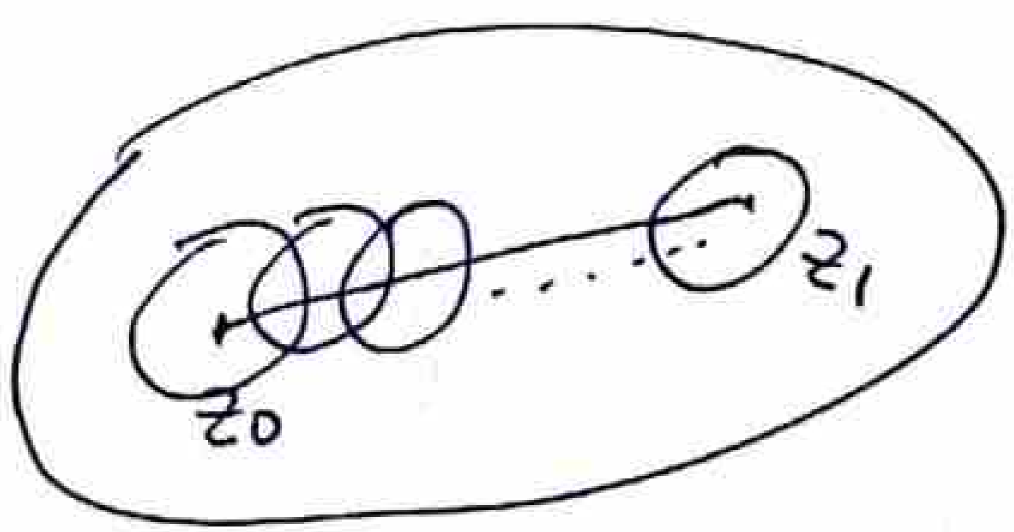
下证 U 为闭集. 即证：若 $z_n\in U$，$z_n\to z_0\in\Omega$，~~且 $f(z_n)=0$~~，

则 $z_0\in U$.（由①知成立）.

故 U 闭，从而 U 为 Ω 中既开又闭而非空子集，故由连通性知 $\Omega=U$.

即 $f(z)$ 在 Ω 中恒为 0.

或者：



推论：若 f_1, f_2 在 Ω 上全纯，且存在 Ω 上点 z_n，使 $f_1(z_n)=f_2(z_n)$，

$z_n \to z_0 \in \Omega$，$z_n \neq z_0$，则 $f_1(z)=f_2(z)$，$(\forall z \in \Omega.)$

说明："$z_0 \in \Omega$"条件不能去掉。

如：$\sin\frac{1}{1-z}$ 在 $|z|<1$ 上全纯，零点 $z_k = 1-\frac{1}{k\pi} \to 1$ $(k\to\infty)$

但 $\sin\frac{1}{1-z}$ 在 $|z|<1$ 上不恒为0.

推论：三角恒等式对复数 z 都成立。

如 $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$，$\sin 2z = 2\sin z\cos z$.

例：求 e^z 的幂级数展开式.

设 $F(z)=e^z$，$G(z)=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$

则 F 与 $G(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯，且当 $z=x\in\mathbb{R}$ 上：

$$F(z)\Big|_{z=x}=e^z\Big|_{z=x}=e^{x+iy}\Big|_{z=x}=e^x=G(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

故由全纯函数零点孤立性知 $F(z)=G(z)$. $(\forall z\in\mathbb{C})$，即

$$e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots\quad(\forall z\in\mathbb{C}).$$

例：求 $\sin z$，$\cos z$ 的展开式.

由定义：$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + iz + \frac{1}{2!}(iz)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(iz)^n + \cdots\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 - iz + \frac{1}{2!}(iz)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(-iz)^n + \cdots\right)$$

$$= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(1 + iz + \frac{1}{2!}(iz)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(iz)^n + \cdots\right)$$

$$- \frac{1}{2i}\left(1 - iz + \frac{1}{2!}(iz)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(-iz)^n + \cdots\right)$$

$$= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

全纯函数的 Laurent 展开

定义: Laurent 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}$$

(a) (b) (c)

称级数 (a) 收敛, 若 (b) (c) 收敛

称 (a) 发散, 若 (b), (c) 有一个发散.

求(a)的收敛域：

① (b)的收敛半径为R，则 (b)在$|z-z_0|<R$上收敛.

② 令 $W=\frac{1}{z-z_0}$，则(c)为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} W^n$ 为W的幂级数.

设收敛半径为ρ，则(c)在 $|W|<\rho$上收敛.

即在 $|z-z_0|>\frac{1}{\rho}$ 上收敛.

③ 综上：若 $\frac{1}{\rho}<R$，则(a)收敛域非空，为集合$\{\frac{1}{\rho}<|z-z_0|<R\}$.

若 $\frac{1}{\rho}>R$，则(a)收敛域为空集.

(a)在收敛域中内闭一致收敛到一全纯函数.

综上：

定理：若 Laurent 级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ 的收敛域为圆环 $D=\{z \mid r<|z-z_0|<R\}$

则级数 D 内闭一致收敛，且和函数在 D 中全纯.

定理：若 $f(z)$ 在 D: $r<|z-a|<R$ 上全纯 $(0\leq r<R\leq+\infty)$

则 $$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\overset{c_n}{\cancel{a_n}}(z-a)^n \qquad (*)$$

其中 $$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi, \qquad (r<\rho<R)$$

且展式唯一.

证明：(1) (*)式右边与ρ的选取无关，因为函数$\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$

在D内全纯，对任意ρ_1, ρ_2，$0<r<\rho_1, \rho_2<R$有

$$\int_{|\xi-z_0|=\rho_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \int_{|\xi-z_0|=\rho_2} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$$

(2) 设 $\gamma_1: |z-a|=\rho_1$，$\gamma_2: |z-a|=\rho_2$，$z_0 \in D$

设 $r<\rho_1<|z_0-a|<\rho_2<R$

则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi-z_0} d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi-z_0} d\xi$$

当 $\xi \in \gamma_2$ 时，将 $\dfrac{1}{\xi - z_0}$ 在 a 点展开为 Laurent 级数.

$$\frac{1}{\xi - z_0} = \frac{1}{(\xi - a) - (z_0 - a)} = \frac{1}{\xi - a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z_0 - a}{\xi - a}}$$

$\left| \dfrac{z_0 - a}{\xi - a} \right| < 1$，

$$= \frac{1}{\xi - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0 - a}{\xi - a} \right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_0 - a)^n}{(\xi - a)^{n+1}}$$

当 $\xi \in \gamma_1$ 时，展开 $\dfrac{1}{\xi - z_0}$；由于 $\left|\dfrac{\xi - a}{z_0 - a}\right| < 1$ 时

$$\frac{1}{\xi - z_0} = \frac{1}{(\xi - a) - (z_0 - a)} = -\frac{1}{z_0 - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - a}{z_0 - a}}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - a)^n}{(z_0 - a)^{n+1}}$$

故 $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f(\xi) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_0 - a)^n}{(\xi - a)^{n+1}} \, d\xi$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\xi) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - a)^n}{(z_0 - a)^{n+1}} \, d\xi$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \right) (z_0 - a)^n$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{-n}} d\xi \right) (z_0 - a)^{-n-1}$$

在第二项中令 $-n = m+1$，则第二项为

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{m+1}} d\xi \right) (z_0 - a)^m$$

综上 $f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^m} d\xi \right) (z-a)^m$，$(\forall z \in D)$

(3) 唯一性： 设 $f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n' (z-a)^n$

则积分：

$$\int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \cdot \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^{n-m-1} dz = 2\pi i C_m .$$

原因：若 $n=m$，则 $\int_{|z-a|=\rho} (z-a)^{n-m-1} dz = 2\pi i$

若 $n\neq m$，则 $\int_{|z-a|=\rho} (z-a)^{n-m-1} dz = \int_0^{2\pi} (\rho e^{i\theta})^{n-m-1} \rho i e^{i\theta} d\theta$

$$= \rho^{n-m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = 0 .$$

例：求 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 在 $0<|z|<1$ 与 $|z|>1$ 的展开式：

解：当 $|z|<1$ 时 $f(z)=1+z+z^2+\cdots$

当 $|z|>1$ 时，

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\frac{1}{z}-1}$$

$$=\frac{-1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

例：$f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在 $1<|z|<2$, $2<|z|<+\infty$ 的 Laurent 展式.

解：$f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{2}{z^2+1}$

当 $1<|z|<2$ 时

$$f(z)=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{2}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n$$

当 $|z|>2$ 时.

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}+2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}$$

定义：若 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 上全纯，在 z_0 处无定义，则称 z_0 为 f 的孤立奇点.

例：$z=0$ 是 $\frac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点

$z=0$ 不是 $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ 的孤立奇点，$z_k=\frac{1}{k\pi}\to 0$

此时 f 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 上有展式，$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n$

主要部分：$\sum_{n=-\infty}^{-1}C_n(z-z_0)^n$

全纯部分：$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$

定理：若 z_0 是 f 的孤立奇点，则下列等价：

① $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 存在且有限

② $f(z)$ 在 z_0 的某空心邻域中有界

③ $f(z)$ 的 Laurent 展式中负幂次项系数均为 0.

满足上述条件之一，称为可去奇点，补充定义后，f 在 z_0 全纯.

证明：(1) ⇒ (2) 显然

(2) ⇒ (3) 设 $n>0$,

$$|C_{-n}| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=\rho} f(\xi)\cdot(\xi-z_0)^{n-1}\,d\xi\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\cdot M\cdot \rho^{n-1}\, 2\pi\rho = M\rho^{n} \to 0.$$

故 $C_{-n}=0$, $(\forall n>0)$

(3) ⇒ (1) 令 $g(z)$ 为 $f(z)$ Laurent 展式中的全纯部分

则 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$ 在 z_0 点全纯.

令 $\lim_{z\to z_0} f(z) = g(z_0)$. 则 ① 成立.

说明：第四条可改为： $|f(z)| \le \dfrac{M}{|z-z_0|^{\delta}}$，$\delta \in [0,1)$，$0<|z-z_0|<\delta$.

在该条件下：

$$|C_{-n}| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{\rho^{\delta}}\cdot\rho^{n}\cdot 2\pi\rho = M\rho^{n-\delta} \to 0\text{，若 } n\geq 1\text{，}\cancel{\rho\in}\ \delta\in[0,1)$$

故 $C_{-n}=0$，$(\forall n\geq 1)$

定理：设 z_0 是 f 的孤立奇点，则下列等价：

① $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$

② 存在 $m \in \mathbb{N}$，$g(z)$ 在 $B(z_0, \delta)$ 上全纯，且恒不为 0，

使 $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$

③ $f(z)$ 展开式中只有有限多负幂次项不为 0，即

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + a_0 + a_1(z-a) + \cdots$$

$(a_{-m} \neq 0)$

④ 存在 $m \in \mathbb{N}$，$\lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z)$ 存在，且不为 0

⑤ 存在 $m \in \mathbb{N}$，$g = \dfrac{1}{f}$ 以 z_0 为 m 阶零点

满足上述条件之一称为 m 阶极点

证明：① ⇒ ② 设 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 上恒不为0

令 $g(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{f(z)}, & 0<|z-z_0|<\delta \\ 0, & z=z_0\end{cases}$

则 $g(z)$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 上全纯，且 z_0 为 g 的零点.

故 $g(z)=(z-z_0)^m h(z)$，$h(z)$ 全纯，且 $h(z)\neq 0$，$\forall z\in B(z_0,\delta)$.

$\Rightarrow f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^m}\,\dfrac{1}{h(z)}$

其余显然，证明略.

定理. 设 z_0 为 f 的孤立奇点, 则下列等价,

(1) f 的展式中有无穷多项幂次不为0.

(2) 对任何复数 $A\in\mathbb{C}$ 或 $A=\infty$, 在 z_0 的任何空心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 中找到一列互异的 $z_n\to z_0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$.

(3) 不存在有限或无限的极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

证明: (2) $\Rightarrow$ (3) 显然

(3) $\Rightarrow$ (1) 若 (1) 不成立, 则 z_0 为 f 的可去奇点或极点, 则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 为有限或 ∞, 与 (3) 矛盾.

(1) $\Rightarrow$ (2) 若 $A=\infty$, 则 z_0 不是可去奇点, 故 $f(z)$ 在 z_0 附近无界.

故可找到 $z_n \to z_0$, 使 $f(z_n) \to A = \infty$.

若 $A \in \mathbb{C}$, 则若在 z_0 的任何小邻域中都有 $f(z)-A$ 的零点,

则 (2) 成立. 否则 $f(z)-A$ 在某邻域中恒不为 0.

$$g(z) = \frac{1}{f(z)-A}$$ 在 $B(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}$ 中全纯, 且不为 0.

若 $g(z)$ 在 $B(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}$ 中有界，则 z_0 是 g 的可去奇点

$$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)-A}=\lambda$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=\begin{cases} A+\frac{1}{\lambda}, & \lambda\neq 0 \\ \infty, & \lambda=0, \end{cases}$$

$\Rightarrow$ z_0 为可去奇点或极点，矛盾.

若 $g(z)$ 在 $B(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}$ 中无界. 故存在 $z_n\to z_0$，$z_n\in B(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}$

使得 $\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n)=\infty$ 　故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$.

无穷远奇点

定义：① $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点 / 极点 / 本性奇点

$\Leftrightarrow$ $w=0$ 是 $f(\frac{1}{w})$ 的可去奇点 / 极点 / 本性奇点

② 若 $f(z)$ 在 $|z|>R$ 内全纯，则称 $z=\infty$ 是 f 的孤立奇点

例：① $z=\infty$ 不是 $\frac{1}{\sin z}$ 的孤立奇点

② ∞ 是多项式 $P_d(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_dz^d\ (a_d\neq 0)$

的 d 阶极点

定义. 若f在$\mathbb{C}$上全纯, 则称f为整函数, 即f可表示为:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\quad \text{收敛半径 } R=+\infty.$$

定理. 设f(z)为整函数,

(1) ∞为f(z)的可去奇点 $\Longleftrightarrow$ f(z)为常数.

(2) ∞为f(z)的极点 $\Longleftrightarrow$ f(z)为非零多项式.

(3) ∞为f(z)的本性奇点 $\Longleftrightarrow$ $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 中有无穷多个 $a_n \neq 0$

证：(1) $\Leftarrow$ 显然

$\Rightarrow$ 令 $w = \frac{1}{z}$，

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{w^n}$$

$w=0$ 可去 $\Leftrightarrow$ $a_n = 0$，$\forall n \geq 1$ $\Leftrightarrow$ f 常数.

(2) $w=0$ 为 $f(\frac{1}{w})$ 极点 $\Leftrightarrow$ f 为多项式.

(3) 显然

推论：有界整函数为常数.

证：$f(z)$ 有界 $\Rightarrow$ ∞ 为可去奇点 $\Rightarrow$ $f(z)$ 为常数.

亚纯函数：若 f 在 $\Omega(\subset \overline{\mathbb{C}})$ 上除极点外处处全纯，则 f 在 Ω 上亚纯.

（没有非孤立奇点或本性奇点）.

定理：若 f 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上亚纯，则 f 为有理函数.

证：① $f(z)$ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上只能有有限个极点。若无穷多极点，则存在极限点 z_0，z_0 不是孤立奇点，故 z_0 不是 $f(z)$ 的极点或全纯点，与假设矛盾.

② 设 $f(z)$ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上极点为

$$z_1, z_2, \cdots z_k, \infty.$$

相应的 Laurent 展式的主要部分为

$$\varphi_j(z) = \frac{c_{-1}^{(j)}}{z-z_j} + \cdots + \frac{c_{-m_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{m_j}}, \quad m_j \geq 1.$$

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_m z^m.$$

② 设 $f(z)$ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上极点为

$$z_1, z_2, \cdots z_k, \infty.$$

相应的 Laurent 展式的主要部分为

$$\psi_j(z) = \frac{C_{-1}^{(j)}}{z-z_j} + \cdots + \frac{C_{-m_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{m_j}}, \quad m_j \geq 1.$$

$$\psi(z) = C_0 + C_1 z + \cdots + C_m z^m.$$

全纯部分记为 $\varphi_j(z)$ 与 $\varphi(z)$.

则在 z_j 附近有 $f(z) = \psi_j(z) + \varphi_j(z)$

在 ∞ 邻域有 $f(z) = \varphi(z) + \psi(z)$

令 $F(z) = f(z) - \psi(z) - \sum_{j=1}^{k} \psi_j(z).$

则 $F(z)$ 为 $\overline{\mathbb{C}}$ 上亚纯函数，且在 $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2, \cdots z_k, \infty\}$ 上全纯.

在 z_j 点处： $\lim\limits_{z\to z_j} F(z) = \lim\limits_{z\to z_j}\left(f(z) - \varphi_j(z) - \psi(z) - \sum\limits_{i\neq j} \varphi_i(z)\right)$

$$= \varphi_j(z_j) - \psi(z_j) - \sum_{i\neq j} \varphi_i(z_j) \in \mathbb{C}.$$

在 ∞ 点处： $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = \lim\limits_{z\to\infty}\left(f(z) - \psi(z) - \sum\limits_{i=1}^{K} \varphi_i(z)\right)$

$$= \lim_{z\to\infty} \varphi(z) - \sum_{i=1}^{K} \lim_{z\to\infty} \varphi_i(z)$$

$$= \varphi(\infty) = 0.$$

注意. $\psi(z) = C_0 + C_1 z + \cdots + C_m z^m$

$$\varphi(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n z^n$$

故 $F(z)$ 是 $\overline{\mathbb{C}}$ 上全纯有界函数，故 $F(z)$ 为常数. 又 $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$

故 $F(z)$ 恒为 0. 从而 $f(z) = \psi(z) + \sum\limits_{j=1}^{K} \varphi_j(z)$ 为有理函数.

定理：若 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上亚纯，单射，则 $f(z)$ 是分式线性变换.

证明：设 $f(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$，$P_n, Q_m$ 无公共根.

若 $n>m$，则 $f(\infty)=\infty$. 故 Q_m 在 $\mathbb{C}$ 上无零点 $\Rightarrow Q_m$ 为常数.

故 $f(z)=P_n(z)$ 为多项式. f 单叶 $\Rightarrow P_n(z)$ 只有一个零点，设为 z_0.

故 $f(z)=a\cdot(z-z_0)^n$，$(a\neq 0)$.

因为 $b\neq 0$，$(z-z_0)^n=\dfrac{b}{a}$ 在 $\mathbb{C}$ 上有 n 个不同的根.

故 $n=1$. 从而 $f(z)$ 为线性函数.

若 $n<m$，则 $f(\infty)=0$. 故 $P_n(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上无零点，故 P_n 为常数.

从而 $f(z)=\dfrac{1}{Q_m(z)}$. f 单叶，$\forall A\in\mathbb{C}$，$Q_m(z)=\frac{1}{A}$ 只有一根

$\Rightarrow$ $m=1$. $\quad f(z)=\dfrac{1}{cz+d}$；$(c\neq 0)$.

若 $n=m$，则 $f(z)=0$ 有一根 z_0，故 $P_n(z)=0$ 只有一根 z_0，$P_n(z)=(z-z_0)^n$.

$f(z)=\infty$ 只有一根 z_1，故 $Q_m(z)=(z-z_1)^m$，$(z_0\neq z_1)$

$f(z)=c\neq 0$ 只有一根. 故 $\left(\dfrac{z-z_0}{z-z_1}\right)^n=c\neq 0$.

$\Rightarrow$ $\dfrac{z-z_0}{z-z_1}=c^{\frac{1}{n}}$ 有 n 个不同的根.

$\Rightarrow$ $n=1$. $\quad$ 故 $f(z)$ 为分式线性映射.

例：若 $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 全纯，且反函数 $f^{-1}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 全纯，

则 $f(z) = az+b \ (a \neq 0)$.

证：① 若 ∞ 可去，则 $f(z)$ 为常数，不可能

② 若 ∞ 本性奇点，$\forall A \in \mathbb{C}$，存在 $z_n \to \infty$，$f(z_n) \to A$

故 $z_n = f^{-1}(f(z_n)) \to f^{-1}(A) \in \mathbb{C}$

与 $z_n \to \infty$ 矛盾.

③ 若 ∞ 为 f 的极点，则 f 为多项式.

由于 f 单，故 f 为一次多项式.

$f = az+b$，$a \neq 0$.

最大模原理与 Schwarz 引理.

最大模原理, 设 $f(z)$ 在区域 D 中全纯, 不是常值函数, 则 $|f(z)|$ 不可能在 D 中取到最大值.

引理: 若 $f(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内全纯, 则

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})\,d\theta,\quad 0<r<R.$$

证明: $$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}\,dz \qquad z=a+re^{i\theta}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\cdot ri\,e^{i\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})\,d\theta.$$

定理证明：设 $M = \sup\limits_{\Omega} |f(z)| < +\infty$. $f(z)$ 不是常数，故 $M>0$.

令 $\Omega_1 = \{ z\in\Omega \mid |f(z)| = M \}$

$\Omega_2 = \{ z\in\Omega \mid |f(z)| < M \}$.

由 f 连续知 Ω_1 闭，Ω_2 开. 下证 Ω_1 为开集.

设 $a\in\Omega_1$，则 $|f(a)| = M$. 由于 $a\in\Omega$，$\exists \delta>0$，$B(a,\delta)\subset\Omega$，

故当 $0<r<\delta$ 时

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\,d\theta.$$

$$M = |f(a)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{i\theta})|\,d\theta$$

故 $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(M - |f(a+re^{i\theta})|\right)d\theta \leqslant 0$，$\forall r\in(0,\delta)$.

由于 $M-|f(a+re^{i\theta})|$ 非负且连续，故

$$M-|f(a+re^{i\theta})| = 0,\quad \forall\theta\in[0,2\pi),\quad \forall r\in(0,\delta).$$

即 $B(a,\delta)\subset\Omega_1$，故 Ω_1 开.

由于 $\Omega_1\cup\Omega_2=\Omega$，$\Omega_1\cap\Omega_2=\phi$. 故由连通性知 Ω_1，Ω_2 必有一个为空集.

若 $|f(z)|$ 在 Ω 中达到最大，则 Ω_1 非空，故 Ω_2 为空集.

从而 $\Omega_1=\Omega$. $\Rightarrow f(z)$ 在 Ω 上为常数，与假设矛盾.

推论：设 Ω 为有界区域. $f(z)$ 在 Ω 中全纯，且在 $\bar{\Omega}$ 上连续，则

$$|f(z)|\leq\max_{\partial\Omega}|f(z)|\quad(\forall z\in\Omega)$$

且"="成立当且仅当 $f(z)$ 为常数.

说明："有界性"条件不能去掉.

$f(z) = e^{e^z}$, $\Omega = \{ z \mid -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2} \}$

则 $f(z) = e^{e^{x+iy}} = e^{e^x \cos y + i e^x \sin y}$.

$|f(z)| = e^{e^x \cos y}$

若 $z \in \partial\Omega$，则 $|f(z)| = 1$

但 $|f(z)|$ 在 Ω 上无界.

说明："最小模"原理不成立.

例：$f(z)=z$，$|f|=|z|$. 在 $|z|<1$ 中达到最小模 0.

但 f 不为常数.

例：若 $f(z)$ 全纯，且在区域 Ω 上恒不为 0，则 $|f|$ 在 Ω 内部不能达到最小值.

证：$g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 在 Ω 上全纯. 故 $|g|$ 在 Ω 中不能达到最大.

$\Rightarrow$ $|f|$ 在 Ω 中不能达到最小.

无界区域的最大模原理.

例: 设 $F(z)$ 在 $G=\{z \mid 0<\operatorname{Im} z<1\}$ 上全纯, 有界, 且在 $\overline{G}$ 上连续,

若 $\sup\limits_{\partial G}|F(z)|\le 1$, 则 $|F(z)|\le 1$, $\forall z\in G$.

想法: 构造函数 $F_\varepsilon(z)$ 在 G 上全纯, 且满足

① $|F_\varepsilon(z)|\le 1$, $\forall z\in\partial G$.

② $\lim\limits_{\substack{z\in G\\ z\to\infty}}|F_\varepsilon(z)|=0$

③ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}F_\varepsilon(z)=F(z)$, $\forall z\in G$.

则 $|F_\varepsilon(z)|$ 的最大值不可能在无穷远达到. 故只可能在有限区域边界上达到 $\Rightarrow$ $|F_\varepsilon(z)|\le 1$, $\forall z\in G$.

令 $\varepsilon\to 0$ 得 $|F(z)|\le 1$, $\forall z\in G$.

证：令 $F_\varepsilon(z)=F(z)e^{-\varepsilon z^2}$，则 $F_\varepsilon(z)$ 在 G 上全纯，$\bar{G}$ 上连续.

若 $\operatorname{Im} z=0$，则 $|F_\varepsilon(x)| = |F(x)|\, e^{-\varepsilon x^2} \le 1$. $(\forall x\in\mathbb{R})$

若 $\operatorname{Im} z=1$，则 $z=x+i$. $(x\in\mathbb{R})$

$$|F_\varepsilon(z)| = |F(z)|\cdot\left|e^{-\varepsilon(x+i)^2}\right|$$

$$= |F(z)|\cdot e^{-\varepsilon(x^2-1)} \le \begin{cases} e^{\varepsilon}, & 若\ |x|<1 \\ 1, & 若\ |x|\ge 1 \end{cases}$$

若 $0\le \operatorname{Im} z\le 1$，则令 $z=x+iy$，$x\in\mathbb{R}$，$y\in[0,1]$.

$$|F_\varepsilon(z)| = |F(z)|\cdot\left|e^{-\varepsilon(x+iy)^2}\right|$$

$$= |F(z)|\cdot e^{-\varepsilon(x^2-y^2)}$$

$$= |F(z)| \cdot e^{-\varepsilon(x^2-y^2)}$$

$$= |F(z)| \cdot e^{-\varepsilon x^2+\varepsilon y^2} \le M \cdot e^{-\varepsilon x^2+\varepsilon} \to 0 \quad (|x| \to +\infty)$$

故 $\exists R>0$, 当 $|x|>R$ 时, $|F_\varepsilon(z)| < \frac{1}{2}$.

令 $G_R = \left\{ z \,\middle|\, z = x+iy,\ \begin{matrix} |x| < R \\ 0<y<1 \end{matrix} \right\}$

则 若 $z \in G \setminus G_R$, 则 $|F_\varepsilon(z)| \le \frac{1}{2}$

若 $z \in G_R$, 则 $|F_\varepsilon(z)| \le \max\limits_{\partial G_R} |F_\varepsilon(z)| \le 1$.

综上: $\forall z \in G$, $|F_\varepsilon(z)| \le 1$.

令 $\varepsilon \to 0$, 则. $|F(z)| \le 1$, $(\forall z \in G)$

证②: 令 $F_\varepsilon(z) = F(z)\cdot \dfrac{1}{1-i\varepsilon z}$

设 $z=x+iy$, $0\le y\le 1$.

若 $\mathrm{Im}\, z=0$, 则 $|F_\varepsilon(z)| = |F(z)|\cdot \dfrac{1}{|1-i\varepsilon(x+iy)|}$

或 $\mathrm{Im}\, z=1$,

$$= |F(z)|\cdot \frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon y)^2+\varepsilon^2 x^2}}$$

$$\le |F(z)| \le 1.$$

若 $0<\mathrm{Im}\, z<1$, 则 $|F_\varepsilon(z)| \le \dfrac{M}{\sqrt{(1+\varepsilon y)^2+\varepsilon^2 x^2}} \le \dfrac{M}{\varepsilon|x|}$

故 $\exists R>0$, 当 $|x|>R$ 时 $|F_\varepsilon(z)|\le \dfrac{1}{2}$.

~~不妨~~. $R=\dfrac{2M}{\varepsilon}$.

令 $\Omega_R = \{ z \mid 0 < \mathrm{Im}\, z < 1, \quad |\mathrm{Re}\, z| < R \}$.

则 $\forall z \in \Omega$, 则

$$|F_\varepsilon(z)| \le \max_{\partial \Omega_R} |F_\varepsilon(z)| \le 1, \quad \forall z \in \Omega.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 则 $|F(z)| \le 1$.

类似地，可证：

定理：令 $S=\{z\in\mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{4}\}$

设 ① $F(z)$ 在 S 上全纯，在 $\bar{S}$ 上连续

② $|F(z)|\le 1$, $\forall z\in\partial S$

③ $|F(z)|\le C_1 e^{C_2|z|}$, $\forall z\in S$.

则 $|F(z)|\le 1$, $\forall z\in S$.

（构造 $F_\varepsilon(z)=F(z)\,e^{-\varepsilon z^{3/2}}$）.

调和函数的极值原理.

调和函数 $\Delta u=0$.

引理: 若 $u(x,y)$ 在 $|z-a|<R$ 中调和, 则 $\forall\, 0<r<R$ 有

$$u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+re^{i\theta})\,d\theta.$$

证: 由于 $|z-a|<R$ 单连通, 故存在 全纯 $f(z)$, 使 $u(z)=\mathrm{Re}f(z)$.

由于 $$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}\frac{f(\xi)}{\xi-a}\,d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})\,d\theta.$$

取实部:

$$u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+re^{i\theta})\,d\theta.$$

定理：设 $u(x,y)$ 在区域 D 中调和，不是常数，则 u 在 D 中最大值、最小值都不能在 D 中内点达到.

证明：①令 $M = \sup\limits_{z\in D} u(z)$，若 $M=+\infty$，则定理成立.

设 $M\in\mathbb{C}$，若 $\exists\, a\in D$，$u(a)=M$，则取 r，使 $B(a,r)\subset D$.

$$M = u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{i\theta})\,d\theta.$$

故 $\int_0^{2\pi}(M-(u(a+re^{i\theta})))=0$，$\forall r$：$0<r<d(a,\partial D)$.

故 $u(a+re^{i\theta})=M$，$\forall\,\theta\in[0,2\pi)$，$0<r<d(a,\partial\Omega)$.

② 令 $D_1=\{z\in D \mid u(z)=M\}$

$D_2=\{z\in D \mid u(z)<M\}$.

则由 u 连续知，D_1 闭，D_2 开. 由①知 D_1 开.，又 $D=D_1\cup D_2$，$D_1\cap D_2=\phi$.

D 连通，故 D_1, D_2 必有一个空集，若 $\underset{D_1\text{非空}}{\underline{D_2\text{空}}}$ 则 $D_1=D$. u 为常数.

③ $-u(z)$在D中调和，故$-u(z)$在D中取不到最大值.

故$u(z)$在D中取不到最小值.

例：f 在 $\Omega = \{0 < r_1 < |z| < r_2\}$ 内全纯，在 $\bar{\Omega}$ 上连续。

令 $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$，则

$$\log M(r) \le \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_1) + \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_2) \quad (*)$$

证明：$\forall \alpha \in \mathbb{R}$，在 $\{z \mid f(z) \neq 0,\ z \in \Omega\}$ 上

$$g(z) = \alpha \log |z| + \log |f(z)| \text{ 调和.}$$

在 $\{f(z) = 0,\ z \in \Omega\}$ 上，$g(z) = -\infty$，故不能达到最大值.

证明：$\forall \alpha \in \mathbb{R}$，在 $\{z \mid f(z) \neq 0,\ z \in \Omega\}$ 上

$$g(z) = \alpha \log |z| + \log |f(z)| \text{ 调和.}$$

在 $\{f(z)=0,\ z\in\Omega\}$ 上，$g(z) = -\infty$，故不能达到最大值.

由调和函数极值原理，$\forall z \in \Omega$

$$g(z) \leq \max\left\{ \max_{|z|=r_1} g(z),\ \max_{|z|=r_2} g(z) \right\}.$$

$$\leq \max\left\{ \alpha \log r_1 + \log M(r_1),\ \alpha \log r_2 + \log M(r_2) \right\}$$

令 $\alpha \log r_1 + \log M(r_1) = \alpha \log r_2 + \log M(r_2)$

即 $$\alpha = \frac{\log M(r_2) - \log M(r_1)}{\log r_1 - \log r_2}.$$

则 $$\max_{|z|=r} g(z) = \alpha \log r + \log M(r) \leq \alpha \log r_1 + \log M(r_1).$$

$$\Rightarrow \log M(r) \leq \alpha \log r_1 + \log M(r_1) - \alpha \log r$$

$=$ (*) 式右边.

Schwarz 引理：设 $f(z): \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 全纯，$\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$，$f(0) = 0$，则

① $|f(z)| \le |z|$，$\forall z \in \mathbb{D}$

② 若对某 $z_0 \ne 0$，$z_0 \in \mathbb{D}$，$|f(z_0)| = |z_0|$，则 $f(z)$ 是旋转，$f(z) = e^{i\theta} z$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

③ $|f'(0)| \le 1$，等号成立，则 $f(z) = e^{i\theta} z$.

证明：①由于 $f(z)$ 在 D 中全纯，$f(0)=0$，所以

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots, \quad |z|<1$$

令

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & 0<|z|<1 \\ a_1, & z=0 \end{cases}$$

则 $\varphi(z) = a_1 + a_2 z + \cdots$ 在 $|z|<1$ 内全纯。

由最大模原理，$|\varphi(z)| \le \max\limits_{|z|=r} |\varphi(z)|$，$\forall r \in (0,1)$，$\forall z \in B(0,r)$

$$|\varphi(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \le \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{1}{r} \max_{|z|=r} |f(z)| \le \frac{1}{r}, \quad \forall z \in B(0,r)$$

令 $r \to 1^-$，则 $|f(z)| \le |z|$，$\forall z \in B(0,1)$.

② 由假设，$|\varphi(z)|$ 在 $|z|<1$ 内某点 z_0 达到最大值 1，则 $|\varphi(z)|$ 恒为常数，故 $\varphi(z)$ 为常数 c. 且 $|c|=1$，故 $c=e^{i\theta}$. 从而 $f(z)=e^{i\theta}z$. $(\forall z\in B(0,1))$

③ 由于 $|\varphi(z)|\le 1$，故 $|\varphi(0)|\le 1$. 从而 $|f'(0)|=|a_1|=|\varphi(0)|\le 1$.
若 $|f'(0)|=1$，则 $|\varphi(z)|$ 在 $z=0$ 取到最大值 1. 从而 $\varphi(z)$ 为常数，
故 $f(z)=e^{i\theta}z$，$\forall z\in B(0,1)$.

Schwarz引理应用:

定义: ① 若 $f: U \to V$ 是全纯双射, 则称 f 为共形映射.

此时 U 与 V 称为共形等价, 或双全纯等价.

(由反函数定理知此时 $f^{-1}: V \to U$ 为全纯双射).

② 区域 $\Omega \to \Omega$ 的共形映射, 称为 Ω 的自同构.

$Aut(\Omega)$ 表示所有 Ω 的自同构集合

定理：① $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{az+b \mid a \neq 0\}$

② $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) = \{$分式线性变换$\}$.

证：①：若 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$，则 f 为 $\mathbb{C}$ 上整函数.

若 ∞ 为可去奇点，则 f 为常数，不可能.

若 ∞ 为本性奇点，则 $\exists z_n \to \infty$，$f(z_n) \to A \ (\in \mathbb{C})$.

而 $z_n = f^{-1}(f(z_n)) \to f^{-1}(A) \in \mathbb{C}$，与 $z_n \to \infty$ 矛盾.

故 ∞ 为 f 的极点，而 f 为 $\mathbb{C}$ 上多项式.

f 单叶，故 f 为一次多项式.

② 设 $f\in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$

若 $f(\infty)=\infty$，则由① 知 f 为一次多项式.

若 $f(\infty)=a\in\mathbb{C}$，令 $\varphi: a\to\infty$ 为分式线性映射，即 $\varphi=\dfrac{1}{z-a}$

则

$$\begin{array}{ccccc} \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f} & \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\varphi} & \overline{\mathbb{C}} \\ \infty & \longrightarrow & a & \longrightarrow & \infty \end{array}$$

故 $\varphi\circ f\in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ 从而 $\varphi\circ f=cz+d$，$(c\neq 0)$.

即 $\dfrac{1}{f-a}=cz+d$，$f=a+\dfrac{1}{cz+d}$，$(c\neq 0)$

定理：若 f 为 $\mathbb{D}$ 上自同构，则存在 $\theta\in\mathbb{R}$，$\alpha\in\mathbb{D}$，使 $f(z)=e^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$.

即 $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})=\left\{e^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\ \middle|\ \theta\in\mathbb{R},\ |\alpha|<1\right\}$.

证：① 令 $\alpha=f(0)$，则存在分式 φ_α: $\begin{array}{l}\mathbb{D}\to\mathbb{D}\\ \alpha\to 0\end{array}$，$\varphi_\alpha(z)=\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$.

则有：$0\xrightarrow{f}\alpha\xrightarrow{\varphi_\alpha}0$

令 $g=\varphi_\alpha\circ f$，则 $g:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$，且 $g(0)=0$，g 全纯，双射.

故 $|g'(0)|\le 1$.

② 设 g 的逆映射为 $h=g^{-1}$: $\begin{array}{l}\mathbb{D}\to\mathbb{D}\\ 0\to 0\end{array}$，$h$ 全纯双射.

故 $|h'(0)|\le 1$

③ $h(g(z)) = z$

$$h'(0)\, g'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad |g'(0)| = |h'(0)| = 1$$

$$\Rightarrow \quad g(z) = e^{i\theta} z \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

④ $\varphi_\alpha \circ f(z) = e^{i\theta} z$

$$\| $$

$$\frac{f(z) - \alpha}{1 - \bar{\alpha} f(z)} = e^{i\theta} z \qquad f(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z + e^{-i\theta}\alpha}{1 + e^{i\theta}\bar{\alpha} z}.$$

问题：求 $\mathbb{H}=\{\operatorname{Im} z>0\}$ 的全纯自同构

想法：
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{D} \\ z_0 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

令 $\varphi(z)=\dfrac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$

则：
$$\begin{tikzcd} \mathbb{H} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{H} \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{D} \arrow[r, "\tilde{f}"] & \mathbb{D} \end{tikzcd}$$

若 $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ 为自同构，则 $\tilde{f}=\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 为 $\mathbb{D}$ 的自同构，故 $\operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ 与 $\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ 一一对应.

定义: $SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad-bc=1 \right\}$

对 $\forall M \in SL_2(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 定义 $f_M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

定理: $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \left\{ f_M \middle| M \in SL_2(\mathbb{R}) \right\}$.

证明：设 $f\in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$，$f(\beta)=i$，要证存在 $M\in SL_2(\mathbb{R})$，使 $f=f_M$.

① 构造 f_N，使 $f_N(i)=\beta$. 则

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{f_N} & \mathbb{H} & \xrightarrow{f} & \mathbb{H} \\ i & \to & \beta & \to & i. \end{array}$$

令 $g=f\circ f_N:\ \mathbb{H}\to\mathbb{H}$
$\qquad\qquad\qquad\quad i\to i.$

② 令 $F:\ \mathbb{H}\to\mathbb{D}$ 为分式线性映射. 则
$\qquad\qquad i\to 0$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "F"'] & \mathbb{H} \arrow[d, "F"] \\ \mathbb{D} \arrow[r, "h"] & \mathbb{D} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i \arrow[r] \arrow[d] & i \arrow[d] \\ 0 \arrow[r, "h"] & 0 \end{tikzcd}$$

$h\in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$，$h(0)=0$，故

$h(z)=e^{i\theta}z.\ (\theta\in\mathbb{R}).$

$h=F\circ g\circ F^{-1}:\ \mathbb{D}\to\mathbb{D}.$

③: 构造 $M_\theta \in SL_2(\mathbb{R})$, 使 f_{M_θ} 满足:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H} \arrow[r, "f_{M_\theta}"] \arrow[d, "F"'] & \mathbb{H} \arrow[d, "F"] \\ \mathbb{D} \arrow[r, "h=e^{i\theta}z"'] & \mathbb{D} \end{tikzcd}$$

$$F\circ f_{M_\theta}\circ F^{-1}(z) = h(z) = e^{i\theta}z$$

④ 故有 $F\circ g\circ F^{-1}(z) = h(z) = e^{i\theta}z = F\circ f_{M_\theta}\circ F(z).$

故 $g = f_{M_\theta}$

由定义 $f\circ f_N = f_{M_\theta} \Rightarrow f = f_{M_\theta}\circ f_N^{-1} = f_{M_\theta N^{-1}}.$

详细证明：① $\forall M\in SL_2(\mathbb{R})$，$f_M$ 将 $\mathbb{H}$ 映为 $\mathbb{H}$.

$$\operatorname{Im} f_M(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2}\right)$$

$$= \frac{(ad-bc)\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} > 0.$$

② 若 $M, M'\in SL_2(\mathbb{R})$，则 $f_M\circ f_{M'} = f_{M\cdot M'}$

故 $(f_M)^{-1} = f_{M^{-1}}$.

即 $f_M\circ f_{M^{-1}} = f_{M\cdot M^{-1}} = f_I(z) = z$.

③ 对任何 $z_1, w_1\in\mathbb{H}$，存在 $M\in SL_2(\mathbb{R})$ 使 $f_M(z_1)=w_1$.

只要对 $w_1=i$ 证明即可. 即求 $a, b, c, d\in\mathbb{R}$ 使

$$\frac{az_1+b}{cz_1+d} = i \qquad (*)$$

令 $z_1 = x_1+iy_1$，则

$$(*) \iff a(x_1+iy_1)+b = i\left(c(x_1+iy_1)+d\right).$$

$$\Leftrightarrow (ax_1+b)+ay_1 i = -cy_1+(cx_1+d)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax_1+b=-cy_1 \\ ay_1=cx_1+d \\ ad-bc=1 \end{cases}$$

取 $d=0$, $c=\sqrt{\dfrac{y_1}{x_1^2+y_1^2}}$, $b=-\dfrac{1}{c}$, $a=\dfrac{cx_1}{y_1}$

由于 $z_1\in\mathbb{H}$, 则 $y_1>0$. 故上式有意义.

从而对任意 $\beta\in\mathbb{H}$, 有 $f_M(\beta)=i$, $f_M^{-1}(i)=\beta$.

故 $f_{M^{-1}}(i)=\beta$.

④ 设 $F: \mathbb{H} \to \mathbb{D}$, $i \to 0$. 取 $F(z) = -\dfrac{z-i}{z+i}$

存在 $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, 使

$$F \circ f_{M_\theta} \circ F^{-1}(z) = e^{i\theta} z.$$

⑤

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H} \arrow[r, "f_N"] \arrow[rr, bend right, "g"'] \arrow[d, "F"'] & \mathbb{H} \arrow[r, "f"] & \mathbb{H} \arrow[d, "F"] \\ \mathbb{D} \arrow[rr, "h = e^{i\theta} z"'] & & \mathbb{D} \end{tikzcd} , \qquad \begin{tikzcd} i \arrow[r, "f_N"] \arrow[d] & \beta \arrow[r, "f"] & i \arrow[d] \\ 0 \arrow[rr, "h"'] & & 0 \end{tikzcd}$$

$$F \circ g \circ F^{-1}(z) = e^{i\theta} z = F \circ f_{M_\theta} \circ F^{-1}(z)$$

故 $g = f_{M_\theta}$, $\quad f \circ f_N = f_{M_\theta}$

$$f = f_{M_\theta} \circ f_N^{-1} = f_{M_\theta \cdot N^{-1}}.$$

Schwarz引理应用：

例：设 $w=f(z)$，$\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 全纯，则

① $\left|\dfrac{f(z)-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}\,f(z)}\right| \leq \left|\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z_0}z}\right|$，$\forall z\in\mathbb{D}$.

② $\dfrac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \dfrac{1}{1-|z|^2}$. $\forall z\in\mathbb{D}$.

f

例：设 $w=f(z)$, $\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 全纯，则

① $$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}\,f(z)}\right| \leq \left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|, \quad \forall z\in\mathbb{D}.$$

② $$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}. \quad \forall z\in\mathbb{D}.$$

解：①
$$\begin{tikzcd} z_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_{z_0}"] & f(z_0) \arrow[d, "\varphi_{f(z_0)}"] \\ 0 \arrow[r, "F"] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{D} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_{z_0}"] & \mathbb{D} \arrow[d, "\varphi_{f(z_0)}"] \\ \mathbb{D} \arrow[r, "F"'] & \mathbb{D} \end{tikzcd}, \qquad \varphi_a(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

则 $F=\varphi_{f(z_0)}\circ f\circ\varphi_{z_0}^{-1}$: $\mathbb{D}\to\mathbb{D}$, $0\to 0$

故 $|F(w)|\leq|w|$.

即 $\left|\varphi_{f(z_0)}\circ f\circ\varphi_{z_0}^{-1}(w)\right|\leq|w|$. 令 $z=\varphi_{z_0}^{-1}(w)$ 则有：

$$\left|\varphi_{f(z_0)}\circ f(z)\right|\leq\left|\varphi_{z_0}(z)\right|.$$

故 $$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)}\right|\leq\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|, \quad (\forall z\in\mathbb{D})$$

② 利用 $|F(0)| \le 1$ 或者:

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \le \frac{\left|1-\overline{f(z_0)}f(z)\right|}{\left|1-\bar{z}_0 z\right|}$$

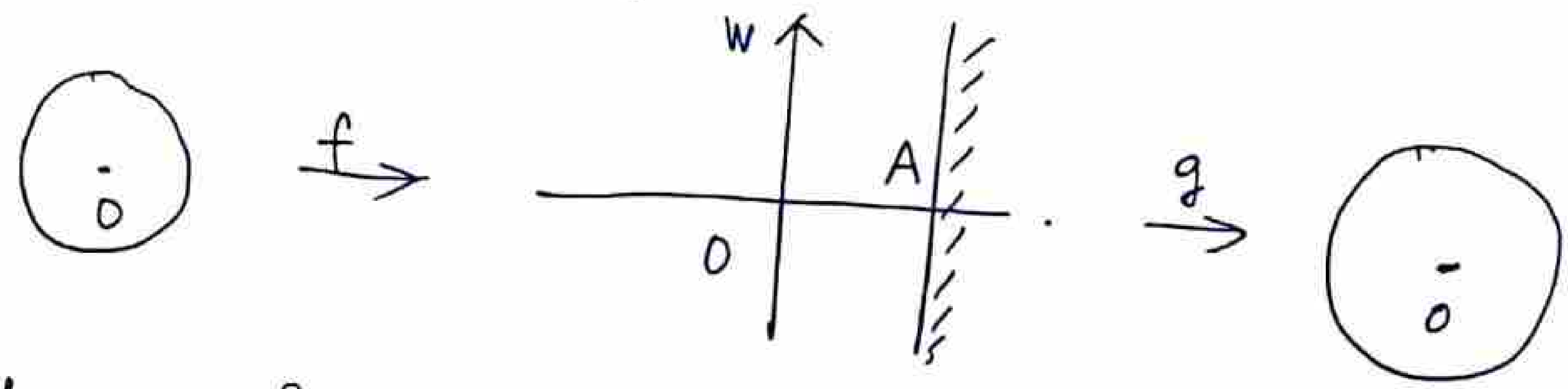
令 $z \to z_0$.

$$|f'(z_0)| \le \frac{1-|f(z_0)|^2}{1-|z_0|^2}. \quad (\forall z_0 \in \mathbb{D})$$

例：设 $f(z)$ 在 $\mathbb{D}=\{z \mid |z|<1\}$ 上全纯，$f(0)=0$，$\operatorname{Re} f(z) \le A \ (A>0)$.

证明：$|f(z)| \le \dfrac{2A|z|}{1-|z|}$，$\forall z \in \mathbb{D}$.

证：



构造：$g: \{\operatorname{Re} w < A\} \to \mathbb{D}$

$$0 \to 0$$
$$2A \to \infty$$

令 $g(w)=\dfrac{w}{w-2A}$，则 $g\circ f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$
$$0 \to 0$$

故 $|g\circ f(z)| \le |z|$

而2 $|g\circ f(z)| \leq |z|$

即 $\left|\dfrac{f(z)}{f(z)-2A}\right| \leq |z|$.

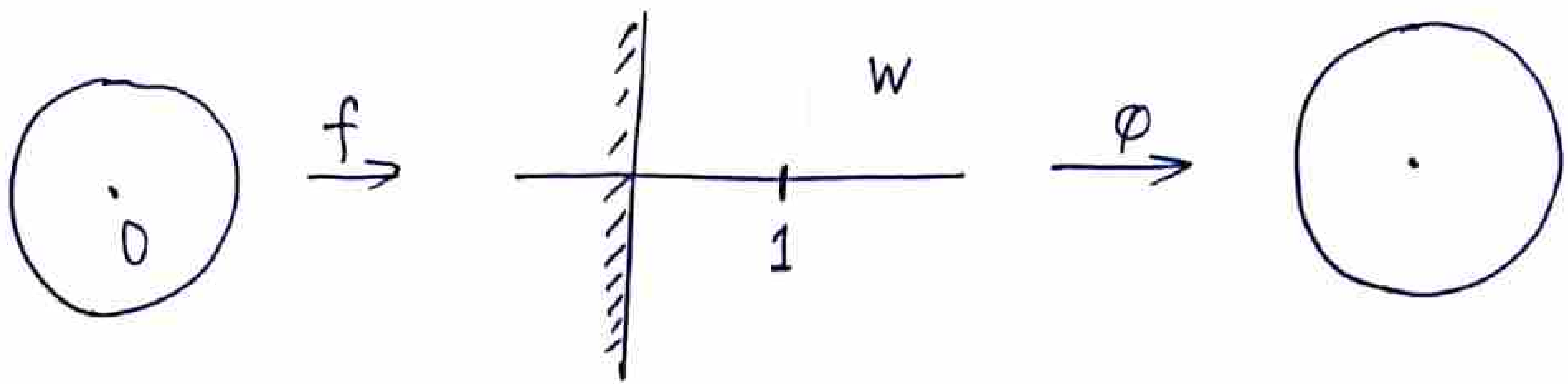
令 $t=\dfrac{f(z)}{f(z)-2A}$, $tf-2At=f$, $f=\dfrac{-2At}{1-t}$

而2 $|f| = \left|\dfrac{-2At}{1-t}\right| \leq \dfrac{2A|t|}{1-|t|} \leq \dfrac{2A|z|}{1-|z|}$.

例：设 f 在 $\mathbb{D}$ 内全纯，$\mathrm{Re} f(z) > 0$，$f(0) = 1$

则 $$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le |f(z)| \le \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

证：



令 $\varphi(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$，则 $\varphi : \{ \cancel{\mathrm{Re} f}\ \mathrm{Re}\, z > 0 \} \to \mathbb{D}$

$$\varphi \circ f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \quad 0 \to 0$$

$$|\varphi \circ f(z)| \le |z|$$

$$\left| \frac{f(z)-1}{f(z)+1} \right| \le |z|.$$

令 $w = \dfrac{f-1}{f+1}$，则 $f-1 = wf + w$，$|w| \le |z|$

$$f = \frac{1+w}{1-w}.$$

则 $|f| = \left|\dfrac{w+1}{w-1}\right| \le \dfrac{1+|w|}{1-|w|} \le \dfrac{1+|z|}{1-|z|}.$

$$|f| \ge \frac{1-|w|}{1+|w|} \ge \frac{1-|z|}{1+|z|}.$$

例：设 f 在 $|z|<R$ 上全纯，在 $|z|\le R$ 上连续，设

$$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|,\quad A(r)=\max_{|z|=r}\operatorname{Re}f(z),$$ 则 $\forall r\in(0,R)$ 时

$$M(r)\le\frac{2r}{R-r}A(R)+\frac{R+r}{R-r}|f(0)|. \qquad (*)$$

证：① $f(z)\equiv C$ 恒为常数.

$$(*)\text{右边}=\frac{2r}{R-r}\operatorname{Re}C+\frac{R+r}{R-r}|C|$$

$$\ge\frac{R+r}{R-r}|C|-\frac{2r}{R-r}|C|=\frac{R-r}{R-r}|C|=|C|=\text{左边}.$$

② 若 $f(z)$ 不为常数，且 $f(0)=0$.

② 若$f(z)$不为常数，且$f(0)=0$.

引理：设$f(z)$在$\mathbb{D}$上全纯，$f(0)=0$，$\operatorname{Re} f(z)\le A$，$(A>0)$.

则 $$|f(z)| \le \frac{2A|z|}{1-|z|}, \quad (|z|<1).$$

故令 $F(z)=f(Rz)$，则 $F(0)=0$

且 $$\operatorname{Re} F(z) = \operatorname{Re} f(Rz) \le \max_{|z|=1} \operatorname{Re} f(Rz) = A(R), \quad \forall z\in\mathbb{D}.$$

故 $$\underset{\displaystyle |f(Rz)|}{\overset{\shortparallel}{|F(z)|}} \le \frac{2A(R)|z|}{1-|z|}, \quad \forall z\in\mathbb{D}.$$

令 $Rz=u$，则 $$|f(u)| \le \frac{2A(R)\frac{|u|}{R}}{1-\frac{|u|}{R}} = \frac{2A(R)|u|}{R-|u|}$$

故 $$M(r)=\max_{|u|=r}|f(u)| \le \frac{2A(R)r}{R-r}.$$

③ 若 $f(0)\neq 0$，令 $g(z)=f(z)-f(0)$. 则

$$\max_{|z|=r}|g(z)| \leq \frac{2r}{R-r}\max_{|z|=R}\operatorname{Re} g(z)$$

$$=\frac{2r}{R-r}\max_{|z|=R}\operatorname{Re}(f(z)-f(0))$$

这里是≤不是＝

$$=\frac{2r}{R-r}A(R)+\frac{2r}{R-r}|f(0)|$$

从而

$$\max_{|z|=r}|f(z)| \leq \frac{2r}{R-r}A(R)+\left(\frac{2r}{R-r}+1\right)|f(0)|$$

$$=\frac{2r}{R-r}A(R)+\frac{R+r}{R-r}|f(0)|.$$

例. 设 f 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上全纯, 在 0 与 ∞ 都是 f 的本性奇点, 证明: 若令 $A(r)=\max\limits_{|z|=r}\mathrm{Re}f(z)$, $0<r<\infty$, 则

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log A(r)}{\log r}=\infty^{(*)},\quad \lim_{r\to 0}\frac{\log A(r)}{\log\frac{1}{r}}=\infty.\ (**).$$

证明:

① 若 $(*)$ 成立, 则 $(**)$ 成立.

令 $F(r)=f(\frac{1}{r})$. 则.

$$A_F(r)=\max_{|w|=r}\mathrm{Re}\,F(w)=\max_{|z|=r}\mathrm{Re}\,f\left(\frac{1}{z}\right)=\max_{\frac{1}{|z|}=\frac{1}{r}}\mathrm{Re}\,f\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$=A_f\left(\frac{1}{r}\right).$$

故 $$\lim_{\rho\to 0}\frac{\log A_f(\rho)}{\log\frac{1}{\rho}}=\lim_{r\to\infty}\frac{\log A_F(r)}{\log r}\overset{(*)}{=}\infty$$

② 只需对 $\mathbb{C}$ 上全纯函数证明(*)即可.

若 f 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上全纯, 则有 Laurent 展式

$$f(z)=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n}_{g}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}_{\varphi}, \quad \forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

由于 $\lim\limits_{z\to 0} g(z)=0$, 故当 $|z|$ 大时 $|g(z)|<\varepsilon$.

这里是趋于无穷

从而 $A_f(r)=\max\limits_{|z|=r} \operatorname{Re}(g+\varphi) \cancel{\le \max\limits_{|z|=r} \operatorname{Re} g(z) + \max\limits_{|z|}}$

$$\ge \max_{|z|=r} \operatorname{Re}\varphi(z)-\varepsilon \quad (\text{当 } |z| \text{ 大时}).$$

从而 $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\log A_f(r)}{\log r} \ge \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\log A_\varphi(r)-\varepsilon}{\log r}=\infty$. (由于 φ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯).

③. 下对 $\mathbb{C}$ 上全纯函数 $f(z)$ 证明(*).

令 $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$，则当 $0<r<R$ 时有

$$M(r)\le\frac{2r}{R-r}A(R)+\frac{R+r}{R-r}|f(0)|. \quad (*3)$$

则有 $M(r)$ 是 r 的增函数（由最大模原理）且

最大模原理

$$\lim_{r\to\infty}M(r)=\infty$$ （本性奇点性质）

④ 存在 $N>0$, 当 $r>N$ 时 $A(r)>0$.

由(※3)知 $A(R)\geq\frac{R-r}{2r}\left(M(r)-\frac{R+r}{R-r}|f(0)|\right)>0$ (当 $R>r$ 都充分大时)

取 $r=\frac{R}{2}$, 则

$$A(R)\geq\frac{1}{2}\left(M\left(\frac{R}{2}\right)-3|f(0)|\right)>0.$$

而 $\log A(r)$ 当 r 大时可定义.

⑤ 令 $M_n(r) = \max\limits_{|z|=r} |f^{(n)}(z)|$

由于 ∞ 为f的本性奇点，则 ∞ 为 $f^{(n)}(z)$ 的本性奇点。故

$$\lim_{r\to\infty} M_n(r) = +\infty.$$

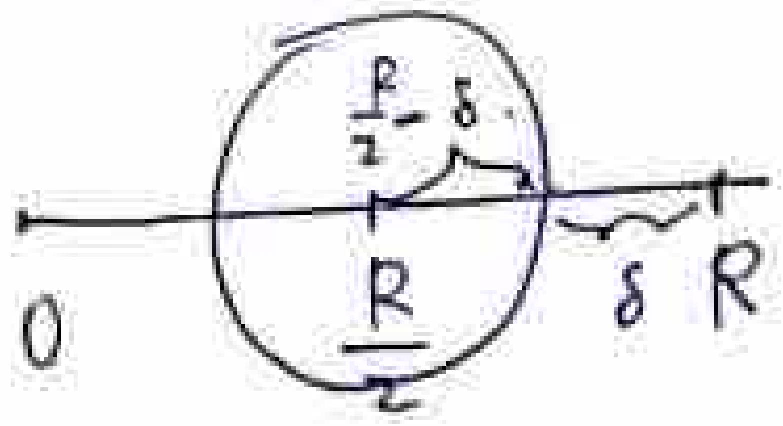
下证：存在常数 $C(n)$，使得

$$M_n\left(\frac{R}{2}\right) \leq \frac{C(n)}{R^n}\left(A(R) + |f(0)| \right). \qquad (*4)$$

(※4)证明：设 z 满足 $|z|=\frac{R}{2}$，由于

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C_\delta} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,d\xi$$

C_δ: $|\xi - z| = \frac{R}{2}-\delta$, δ待定



这里没有2π

$$|f^{(n)}(z)| \le C\cdot\frac{2\pi(\frac{R}{2}-\delta)}{(\frac{R}{2}-\delta)^{n+1}}\max_{C_\delta}|f(\xi)|$$

$$\le \frac{C}{(\frac{R}{2}-\delta)^{n}}\max_{|\xi|\le R-\delta}|f(\xi)|$$

$$\le \frac{C}{(\frac{R}{2}-\delta)^{n}}M(R-\delta).$$

故 $$|f^{(n)}(z)| \le \frac{C}{(\frac{R}{2}-\delta)^{n}}\left[\frac{2(R-\delta)}{\delta}A(R)+\frac{2R-\delta}{\delta}|f(0)|\right]$$

$$\le \frac{C\cdot 2R}{\delta\cdot(\frac{R}{2}-\delta)^{n}}\left(A(R)+|f(0)|\right)$$

令 $\delta = \frac{1}{4}R$，则

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{C(n)}{R^n}\left(A(R) + |f(0)|\right)$$

从而 $M_n\left(\frac{R}{2}\right) \leqslant \frac{C(n)}{R^n}\left(A(R) + |f(0)|\right)$

从而 $A(R) \geqslant \frac{R^n}{C(n)}\left(M_n\left(\frac{R}{2}\right) - |f(0)|\right).$

$$\frac{\log A(R)}{\log R} \geqslant \frac{n\log R + \log\left(M_n\left(\frac{R}{2}\right) - |f(0)|\right) - \log C(n)}{\log R}$$

$$\geqslant n \quad (\text{当 } R \text{ 充分大时}).$$

从而 $\lim\limits_{R\to+\infty} \frac{\log A(R)}{\log R} = +\infty.$

另外证明：只要证，$\forall n>0$，$\exists\, r_n$，$\forall\, r \geq r_n$ 时 $M(r) \geq r^n$.

证：令 $g(z) = \dfrac{f(z)}{z^n}$，$g(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上全纯，且在 ∞ 点为本性奇点.

取定 $\varepsilon>0$，令 $M = \max\limits_{|z|=\varepsilon} |g(z)|$，由于 ∞ 点为 $g(z)$ 的本性奇点.

故存在 r_n，使得

$$\max_{|z|=r_n} |g(z)| \geq M+1$$

对 $\forall r > r_n$，在区域 $\{\varepsilon < |z| < r\}$ 上，$|g(z)|$ 的最大值只能在边界 $|z| = r$ 上达到。故

$$\max_{|z|=r} |g(z)| \geq \max_{|z|=r_n} |g(z)| \geq M+1$$

$$\max_{|z|=r} |g(z)| = \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|^n}$$

故 $\forall r \geq r_n$，$\max\limits_{|z|=r} |f(z)| \geq (M+1) r^n$

故 $\log M(r) \geq n \log r + \log(M+1) > n \log r$

故 $\dfrac{\log M(r)}{\log r} \geq n$.

故由此知 $\lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{A(R)}{\log R} = +\infty$.

幅角原理.

设 f 在 $z=0$ 处为极点或全纯，则

$$f(z) = a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \cdots, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

若 $m \geq 1$，则 0 为 f 的零点.

若 $m < 0$，则 0 为 f 的极点.

定义. 记上述 m 为 $\mathrm{ord}_0 f$，即 $\mathrm{ord}_0 f = m$，

一般地，若 $f(z) = a_m (z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \cdots$

则记 $\mathrm{ord}_{z_0} f = m$.

设在 $B(0,\delta)$ 中，$f(z) = a_m z^m (1+h(z))$，$a_m \neq 0$，$h(z)$ 在 0 处全纯.

则 $f'(z) = m a_m z^{m-1}(1+h(z)) + a_m z^m \cdot h'(z)$

故 $$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m a_m z^{m-1}(1+h(z)) + a_m z^m h'(z)}{a_m z^m (1+h(z))}$$

$$= \frac{m}{z} + \underbrace{\frac{h'(z)}{1+h(z)}}_{\text{全纯.}}$$

故. $$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = m = \operatorname{ord}_0 f$$

定理. 若 f 在 D 内亚纯, γ 是 D 内简单闭曲线, f 在 γ 上无零点, 无极点,

则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{z\text{在}\gamma\text{内部}}\mathrm{ord}_z f$$

$= \gamma$ 内零点重数之和 $-$ γ 内极点阶数之和.

$= N(f,\gamma)-P(f,\gamma)$.

证明：若 z_0 点不是 f 的零点或极点，则 $\frac{f'}{f}$ 在 z_0 点全纯。

设 $f(z)$ 在 γ 内的零点和极点为 $\{z_1, z_2, \cdots z_n\}$，

则由多连通域 Cauchy 定理知：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_i|=\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ord}_{z_k} f$$

绕数（环绕指数，圈数）.

设γ是闭曲线(不一定简单). 设

$$\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}, \quad z(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}, \quad z(a) = z(b).$$

则
$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_a^b \frac{1}{\rho(t)e^{i\theta(t)}} \left(\rho(t)e^{i\theta(t)}\right)' dt$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\rho(t)e^{i\theta(t)}} \left(\rho'(t)e^{i\theta(t)} + \rho(t)\, i e^{i\theta(t)}\theta'(t)\right) dt$$

$$= \int_a^b \frac{\rho'(t)\,dt}{\rho(t)} + i\int_a^b i\,\theta'(t)\,dt$$

$$= \log\rho(b) - \log\rho(a) + i(\theta(b) - \theta(a))$$

$$= i\,\Delta_\gamma \operatorname{Arg} z$$

故
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} z$$

$=$ 曲线γ绕原点的圈数.

故 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma}\dfrac{dz}{z} = \dfrac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma}\operatorname{Arg} z$

$=$ 曲线 γ 绕原点的圈数.

故 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma}\dfrac{f'(z)dz}{f(z)} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma}\dfrac{d f(z)}{f(z)} = \dfrac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma}\operatorname{Arg} f(z)$.

故 $\boxed{N(f,\gamma) - P(f,\gamma) = \dfrac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma}\operatorname{Arg} f(z)}$ 幅角原理.

例：$f(z)=(z-1)(z-2)^3(z-4)$，　γ：$|z|=3$.

γ内零点个数 $N=1+3=4$

极点个数 $P=0$

$$\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z)=\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z-1)+3\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z-2)+\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z-4)$$

$$=2\pi+3\cdot 2\pi=8\pi$$

而 $N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z)$.

定理：设 $f(z)$, $g(z)$ 在 D 内全纯，在 γ 上 $|g(z)| < |f(z)|$

则 $f(z)$ 与 $f(z) \pm g(z)$ 在 γ 内有相同的零点。 指零点个数相同

证：在 γ 上 $|g(z)| < |f(z)|$，故 $f(z)$ 与 $f \pm g(z)$ 在 γ 上无零点。

$$N(f,\gamma) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z)$$

$$N(f+g,\gamma) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \operatorname{Arg} (f+g)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z) + \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right).$$

只需证 $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} \left(1+ g(z)/f(z)\right) = 0$.

注：$\Delta_\gamma \operatorname{Arg} z = 0 \iff 0$ 在 γ 外

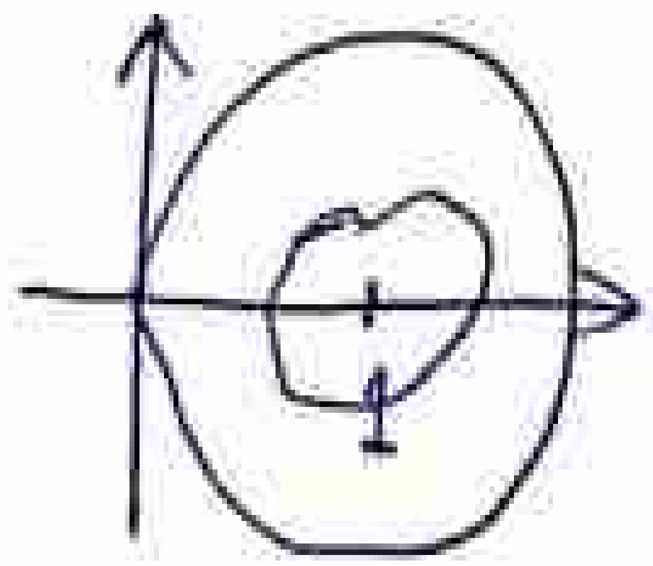
$\Delta_\gamma \operatorname{Arg} w(z) = 0 \iff 0$ 在 曲线 $w(\gamma(t))$ 外.

注意：$\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, z = 0 \iff 0$ 在 γ 外

$\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, w(z) = 0 \iff 0$ 在 曲线 $w(\gamma(t))$ 外.

令 $w(z) = 1 + \dfrac{g(z)}{f(z)}$，对于 $z \in \gamma$，$|g(z)| < |f(z)|$，

故 $|w-1| < 1$



$\Rightarrow$ 0 在 $w(z)$，$z \in \gamma$ 外面

$\Rightarrow \Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, w(z) = 0$. $\Rightarrow \Delta_\gamma \mathrm{Arg}\left(1 + \dfrac{g(z)}{f(z)}\right) = 0$.

定理：若 $f(z)$, $g(z)$ 在 D 中全纯，在 γ 上 $|g(z)| < |f(z)| + |f+g|$，

则 f 与 $f+g$ 在 γ 内部有相同的零点.

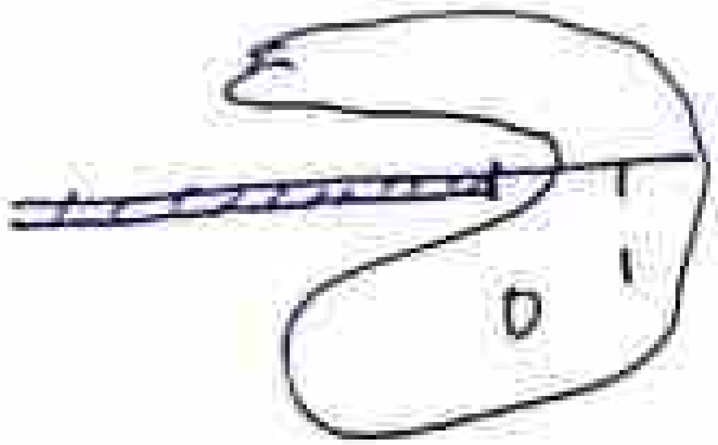
证明：由假设，f 与 $f+g$ 在 γ 上无零点. 由前定理的证明，只

需证 $\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\left(1+\frac{g}{f}\right) = 0$

在 γ 上：$|g(z)| < |f(z)| + |f(z)+g(z)|$

令 $w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$，故在 γ 上，$|(w-1)f| < |f| + |fw|$

故在 γ 上 $|w-1| < 1 + |w|$



$\Rightarrow w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$\Rightarrow w(\gamma)$ 不能绕着零点转.

从而 $\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, w(z) = 0$

即 $\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0$

总结：要验证 $F(z)$ 与 $G(z)$ 在 γ 内部有相同的零点，只要验证下面条件之一：

① $|F(z)-G(z)|<|F(z)|,\ \forall z\in\gamma$

② $|F(z)-G(z)|<|F(z)|+|G(z)|,\ \forall z\in\gamma$

注意将"−"换为"+"号也可以。

例：求方程 $z^4-6z+3=0$ 在圆 $|z|<1$ 与 $1<|z|<2$ 内根的个数。

证：① 当 $|z|=1$ 时，令 $G(z)=z^4-6z+3$，$F(z)=-6z$

在 γ 上：$|F-G|=|z^4+3|\le 4<6=|F(z)|$.

故 G 在 $|z|<1$ 内有 1 根.

② 当 $|z|=2$ 时. 令 $G(z)=z^4-6z+3$，$F(z)=z^4$

在 γ 上：$|F-G|=|6z-3|\le 15<16=2^4=|F(z)|$

故 $|F-G|<|F(z)|$

故 G 在 $|z|<2$ 内有 4 根.

结合①，G 在 $1<|z|<2$ 内有 3 根.

例：代数基本定理：n 次方程 $P(z)=a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ $(a_n \neq 0)$.
在 $\mathbb{C}$ 上恰有 n 个根.

证：令 $G(z) = p(z)$， $F(z) = a_n z^n$

$|F-G| = |a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0| < |a_n z^n| = |F(z)|$，当 $|z|=R$，R 大.

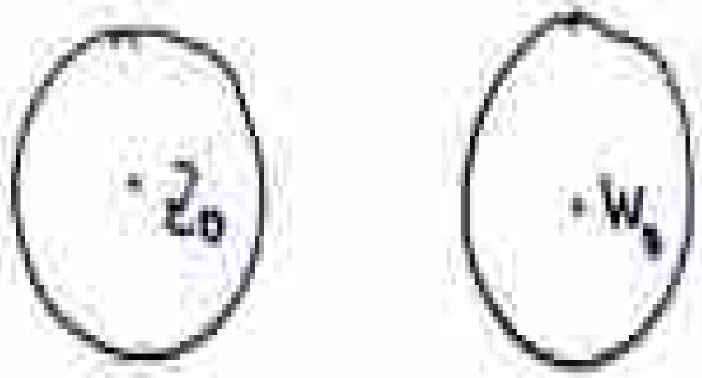
故 $p(z)$ 与 $a_n z^n$ 在 $|z|<R$ 中根个数相同

$\Rightarrow$ $p(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有 n 个根.

定理（开映射定理）若 f 在 Ω 内全纯，非常值，则 f 将开集映为开集.

只需证开球映为开球

证明：即证：若 $w_0=f(z_0)$，若 w_1 满足 $|w_1-w_0|<\varepsilon$，则存在 $z_1\in\Omega$，
$|z_1-z_0|<\delta$，使 $f(z_1)=w_1$.



只需证 $F(z)=f(z)-w_0$ 与 $G(z)=f(z)-w_1$

在 $|z-z_0|<\delta$ 中根的个数相同.

在 $|z-z_0|=\delta$ 上， $|F-G|=|w_1-w_0|$

$$|F|=|f(z)-w_0|$$

令 $\varepsilon_0=\min\limits_{|z-z_0|=\delta}|f(z)-w_0|>0$，取 w_1： $|w_1-w_0|<\varepsilon_0$，则

在 $|z-z_0|=\delta$ 上： $|F-G|=|w_1-w_0|<\varepsilon_0<|f(z)-w_0|=|F|$

故 $F(z)$ 与 $G(z)$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 中根个数相同.

由于 $F(z)$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 中有根 z_0，故 $G(z)=f(z)-w_1$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 中至少有一个根，设为 z_1，故 $f(z_1)=w_1$.

最大模原理：设 $f(z)$ 在区域 Ω 中全纯，非常值，则 $|f(z)|$ 在 Ω 内部不能达到最大值。

证明：设 f 在 Ω 中达到最大模 $z_0 \in \Omega$，$|f(z_0)|$ 最大。

则 $f(B(z_0,\delta))$ 是开集，且包含 $f(z_0)$。故存在 $z_1 \in B(z_0,\delta)$，使

$|f(z_1)| > |f(z_0)|$，矛盾。

例：求证：$p(z)=z^4+2z^3-2z+10=0$ 在每一象限中恰有一根.

证：① $p(x)=(x^2-1)(x+1)^2+11$

$|x|\geqslant 1$ 时 $p(x)\geqslant 11$

$|x|<1$ 时 $p(x)\geqslant 11-(1+1)^2=7$ 故 $p(z)=0$ 无实根.

② $p(x)$ 无虚根：令 $z=iy \quad (y\neq 0)$

$p(iy)=y^4+10-2iy(y^2+1)\neq 0$，故 $p(z)=0$ 无纯虚根.

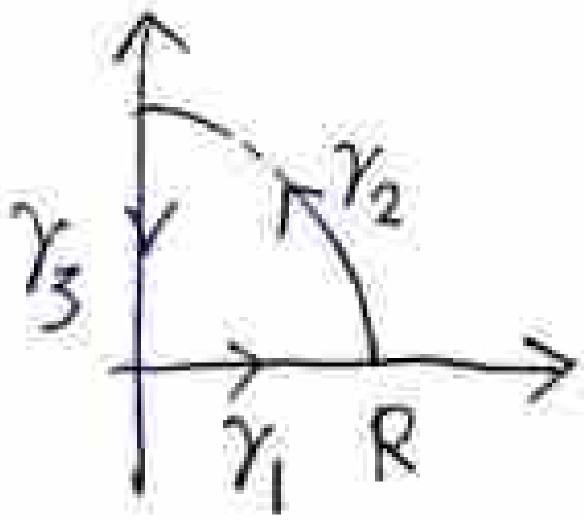
③ 若 $p(z)$ 在第一象限中只有一根，则在其它三象限中各有一个零点。

原因：若 z_0 为 $p(z)$ 在第一象限的根，则 $p(\bar{z_0})=0$.

而 $\bar{z_0}$ 为 $p(z)$ 在第4象限的根。由于 $p(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有4根，

而另外两根在第2,3象限。两根共轭，故在第2,3象限各有一根。

④ 下证 在第一象限仅有一根.



$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} P(z).$$

$$\Delta_{\gamma_1} \operatorname{Arg} P(z) = 0$$

$$\Delta_{\gamma_2} \operatorname{Arg} P(z) = \Delta_{\gamma_2} \operatorname{Arg} z^4\cdot\left(1 + \frac{2z^3 - 2z + 10}{z^4}\right)$$

$$= 4\cdot\frac{\pi}{2} + \varepsilon(R) = 2\pi + \varepsilon(R).$$

其中 $\lim\limits_{R\to\infty} \varepsilon(R) = 0.$

$$\Delta_{\gamma_3} \operatorname{Arg} P(z) = \operatorname{Arg} P(0) - \operatorname{Arg} P(iR)$$

$$= \operatorname{Arg} P(0) - \operatorname{Arg}\left(R^4 + 10 - 2iR(R^2+1)\right)$$

$$= \operatorname{Arg} P(0) - \operatorname{Arg}\left(1 - 2i\frac{R(R^2+1)}{R^4+10}\right)$$

$$= \varepsilon(R).$$

故 $\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} P(z) = 1 + \varepsilon(R)$. 由于 $\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} P(z)$ 为整数. 故为1.

例：设 $0<a_0<a_1<\cdots<a_n$. 求证：

$$a_0+a_1\cdot\cos\theta+a_2\cdot\cos 2\theta+\cdots+a_n\cos n\theta$$

在 $(0,2\pi)$ 中有 $2n$ 个不同的零点。

证. ① 多项式 $P_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 的全部零点在 $|z|<1$ 内，且无正实根。

由于 $(1-z)P_n(z)$

$$=(1-z)(a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n)$$

$$=a_0+(a_1-a_0)z+\cdots+(a_n-a_{n-1})z^n-a_nz^{n+1}$$

若 $z_0=x\geq 0$，则 z_0 不是 $P_n(z)$ 的零点。故若 z_0 是 $P_n(z)$ 的零点，则 z_0 不是非负实数。

$$0=(1-z_0)P_n(z_0)$$
$$=a_0+(a_1-a_0)z_0+\cdots+(a_n-a_{n-1})z_0^n-a_nz_0^{n+1}.$$

由于 z_0 不是非负实数，故 a_0，$(a_1-a_0)z_0$，……$(a_n-a_{n-1})z_0^n$ 幅角不可能全相等。故

$$a_n|z_0|^{n+1}=|a_nz_0^{n+1}|=|a_0+(a_1-a_0)z_0+\cdots+(a_n-a_{n-1})z_0^n|$$
$$<|a_0|+(a_1-a_0)|z_0|+\cdots+(a_n-a_{n-1})|z_0|^n$$

故 $a_n(|z_0|^{n+1}-|z_0|^n)+a_{n-1}(|z_0|^n-|z_0|^{n-1})+\cdots+a_0(|z_0|-1)<0$

若 $|z_0|\geq 1$，则上式左边 >0，矛盾。从而 $|z_0|<1$.

② 设 $C: |z|=1$, $N = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \operatorname{Arg} P_n(z)$.

令 $w = P_n(z)$, $\Gamma = P_n(C)$, 则曲线 Γ 绕 0 点 n 圈. 故 Γ 与虚轴至少相交 $2n$ 次. 由于每个交点对应一个幅角, 故至少有 $2n$ 个 θ, 使 $p(z) = p(e^{i\theta})$ 在虚轴上。故至少有 $2n$ 个不同的 θ, 使 $\operatorname{Re}(p(e^{i\theta})) = 0$.

③ 令 $z=e^{i\theta}$, $\cos k\theta=\dfrac{z^k+z^{-k}}{2}$

故 $\sum_{k=0}^{n}a_k\cos k\theta = a_0+\frac{1}{2}a_1\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2}a_2\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\cdots$

$\cdots+\frac{1}{2}a_n\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$

$=\frac{1}{2}z^{-n}\left(a_n+a_{n-1}z+\cdots 2a_0z^n+a_1z^{n+1}\right.$

$\left.+\cdots+a_nz^{2n}\right)$

右边至多有 $2n$ 个根 z_j $(1\le j\le 2n)$. 故在 $(0,2\pi)$ 内至多只有 $2n$ 个实数 θ_j $(1\le j\le 2n)$ 满足 $e^{i\theta}=z_j$ $(1\le j\le 2n)$

故 $\mathrm{Re}(P(e^{i\theta}))=0$ 在 $(0,2\pi)$ 上有且仅有 $2n$ 个不同的实根，无虚根.

单叶函数.

回忆：辐角原理：若 f 在 γ 上无零点和极点，则

$$N(f,\gamma)-p(f,\gamma)=\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z)$$

Rouché 定理：若 F 与 G 在 γ 上满足

$$|F \pm G| < |F|$$

则 F 与 G 在 γ 内部有相同的零点数.

定理：设$f(z)$在D中解析，$f(0)=0$，若0是$f(z)$的m级零点，则对任意充分小的$\rho>0$，存在$\delta>0$，当$0<|w_0|<\delta$时，$f(z)-w_0$在$|z|<\rho$中有m个不同的零点。

证明：① 由于$f(z)$，$f'(z)$为非常值解析函数，故对任意充分小的ρ，$f(z)$与$f'(z)$在$0<|z|<\rho$上无零点。

原因：$$f(z)=a_m z^m(1+h(z))$$

$$\begin{aligned}f'(z) &= m a_m z^{m-1}(1+h(z)) + a_m z^m h'(z)\\ &= a_m z^{m-1}\left[z h'(z) + m(1+h(z))\right]\\ &= m a_m z^{m-1}\left[1+h(z)+\frac{1}{m} z h'(z)\right].\end{aligned}$$

② 下证 $F(z)=f(z)$，$G(z)=f(z)-w_0$ 在 $|z|<\rho$ 内零点个数相同

令 $\delta=\min\limits_{|z|=\rho}|f(z)|>0$，当 $0<|w_0|<\delta$ 时，

$$|F-G|=|w_0|<|f(z)|=|F|，\quad 当\ z\in\{|z|=\rho\}上$$

故 $F(z)$ 与 $G(z)$ 在 $|z|<\rho$ 内有相同的零点……

③ $f(z)-w_0$ 在 $|z|<\rho$ 中无重根，这是因为 $f'(z)$ 在 $|z|<\rho$ 中无零点

推论：若 f 在 D 中全纯，非常数，$f(z_0)=w_0$，则对充分小的 $\rho>0$，存在 $\delta>0$，使得 $B(w_0,\delta)\subset f(B(z_0,\rho))$.

证：由上定理，$\forall w\in B(w_0,\delta)$，存在 $z\in B(z_0,\rho)$ 使得 $f(z)=w$. 故 $B(w_0,\delta)\subset f(B(z_0,\rho))$.

推论：若$f(z)$为D上全纯函数，且非常函，则

① 若D为开集，则$f(D)$为开集（开映射定理）.

② 若D为区域，则$f(D)$为区域.（保域性定理）.

证：① 设$w_0 \in f(D)$，则$\exists\ z_0 \in D$，$f(z_0)=w_0$. 由上推论.

$B(w_0, \delta) \subset f(B(z_0, \rho))$，故$f(D)$为开.

② 若$w_1, w_2 \in f(D)$，则存在$z_1, z_2 \in D$，$f(z_1)=w_1$，$f(z_2)=w_2$.

由D连通，故存在$\gamma \subset D$连接z_1, z_2，则$f(\gamma)$连接w_1, w_2.

故$f(D)$连通.

说明: $w=f(z)$ 在 z_0 点连续，

$\Leftrightarrow \forall \delta>0,\ \exists \rho>0,\ \forall z:\ |z-z_0|<\rho,\ \Rightarrow |w-w_0|<\delta.$

$\Leftrightarrow \forall B(w_0,\delta),\ \exists B(z_0,\rho)$, 使 $f(B(z_0,\rho))\subset B(w_0,\delta).$

定理：若 $f(z)$ 在 D 中单叶，全纯，则 $f'(z) \neq 0$，$\forall z \in D$.

充分非必要

证：若存在 $z_0 \in D$，$f'(z_0) = 0$. 则 $f(z) - f(z_0)$ 以 z_0 为 $m \geq 2$ 阶零点.

而当 $|w_1 - w_0| < \delta$ 时，$f(z) - w_1$ 在 $|z - z_0| < \rho$ 中有 $m \geq 2$ 个不同的零点

故 f 不单叶. 矛盾.

例：$f(z) = e^z$，$(e^z)' \neq 0$，但 f 在 $\mathbb{C}$ 上不单叶.

定理：若$f(z)$在D中全纯，$f'(z_0)\neq 0$，则$\exists\,\varepsilon>0$，f在$B(z_0,\varepsilon)$上单叶。

证明：

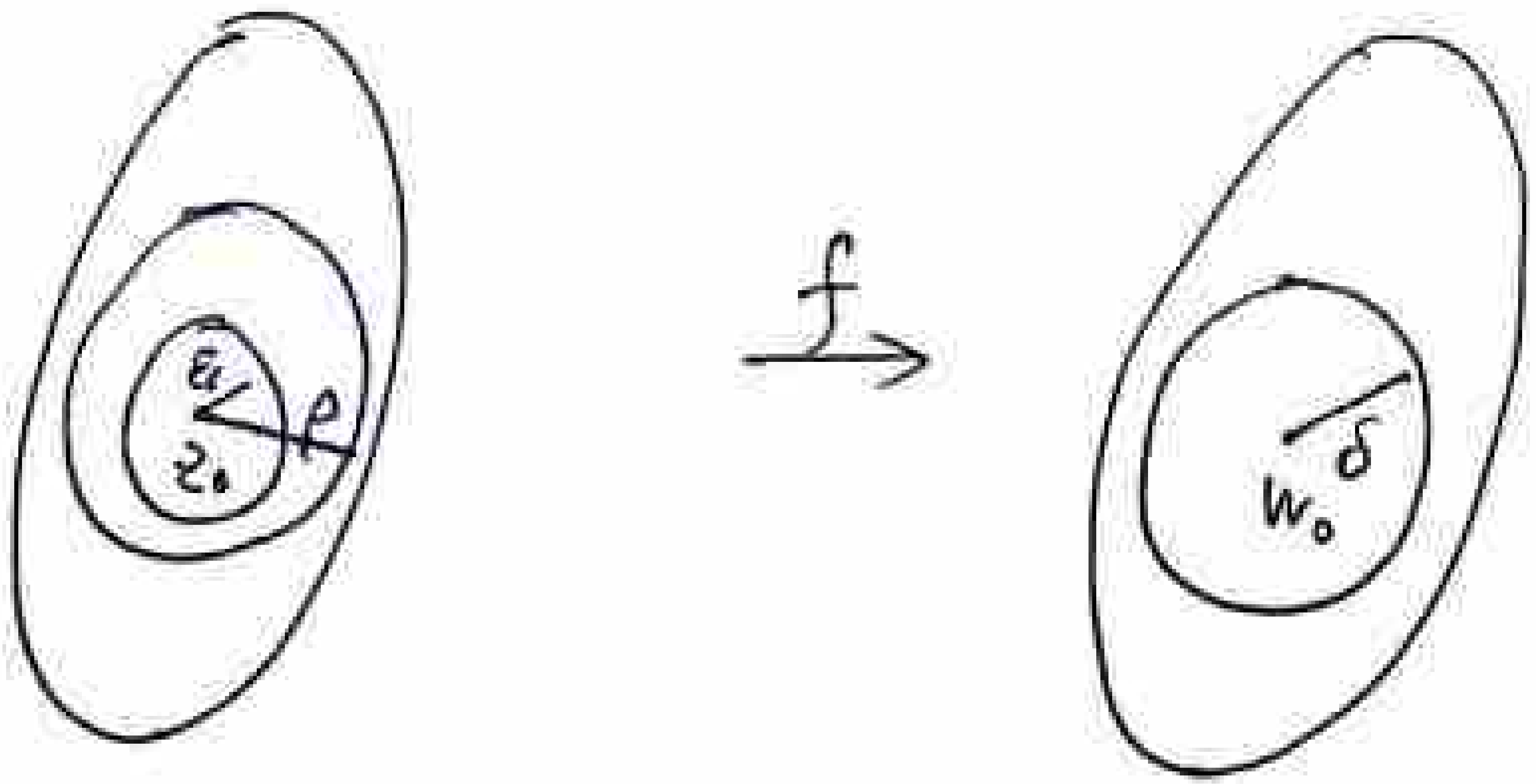
① 设$w_0=f(z_0)$，当$w_1\in B(z_0,\delta)$时，$f(z)-w_1$在$B(z_0,\rho)$中只有一个零点（因为z_0是$f(z)-f(z_0)$为一阶零点）。

② f连续，故$\exists\,\varepsilon_1>0$，$\varepsilon_1<\rho$，使$f(B(z_0,\varepsilon_1))\subset B(w_0,\delta)$。

③ 由①②知，$f(z)$在$B(z_0,\varepsilon_1)$上单叶。

原因. 若 $z_1, z_2 \in B(z_0, \varepsilon_1)$, $f(z_1) = f(z_2)$. 令 $w_1 = f(z_1) = f(z_2)$.

则由②知 $w_1 \in B(w_0, \delta)$. 由①知 $f(z) - w_1$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中只有一个零点。由于 $B(z_0, \rho) \supset B(z_0, \varepsilon_1)$. 故 $f(z) - w_1$ 在 $B(z_0, \varepsilon_1)$ 中至多只有一个零点. 这与 $z_1, z_2 \in B(z_0, \varepsilon_1)$ 矛盾.



证二：直接证明. 设 $z_0=0$. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z|<R$.

$a_1=f'(0)\neq 0$.

$f'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots+na_nz^{n-1}+\cdots$, $|z|<R$

$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1}$ 收敛, 当 $\rho\to 0$ 时趋于 0. $(\rho<R)$

故 $\exists\,\delta>0$, $\delta<R$ 当 $\rho\in(0,\delta)$ 时.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1}<\frac{|a_1|}{2}$$

$$|f(z_1)-f(z_2)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1^n - z_2^n)\right|$$

$$= \left| a_1(z_1-z_2) + a_2(z_1^2-z_2^2) + a_3(z_1^3-z_2^3) + \cdots \right|$$

$$= \left| (z_1-z_2)\left(a_1 + a_2(z_1+z_2) + a_3(z_1^2+z_1z_2+z_2^2) + \cdots \right.\right|$$

$$= |z_1-z_2| \cdot \left| a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z_1^{n-1} + \cdots + z_2^{n-1}) \right|$$

$|z_1|<\rho$

$|z_2|<\rho$

$\rho\in(0,\delta)$.

$$\geq |z_1-z_2| \cdot \left(|a_1| - \sum_{n=2}^{\infty} n\,|a_n|\,\rho^{n-1} \right)$$

$$\geq \frac{1}{2}|a_1| \cdot |z_1-z_2| .$$

故 $z_1 \neq z_2$ 时, $f(z_1) \neq f(z_2)$.

反函数定理. 若 $w=f(z)$ 在 D 上单叶, 全纯, $G=f(D)$, 则反函数 $z=g(w)$ 在 G 上单叶全纯, 且 $g'(w)=\dfrac{1}{f'(z)}$.

证. ① $g(w)$ 在 G 中连续.

原因. f 为开映射, 故 $B(w_0,\delta)\subset f(B(z_0,\rho))$.

从而 $g(B(w_0,\delta))\subset g\circ f(B(z_0,\rho))$

$= B(z_0,\rho)$.

上式表明 g 在 w_0 处连续.

② $g(w)$ 在 G 中可导.

$$\lim_{w\to w_0}\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}=\lim_{w\to w_0}\frac{1}{\dfrac{w-w_0}{g(w)-g(w_0)}}=\lim_{w\to w_0}\frac{1}{\dfrac{f(g(w))-f(g(w_0))}{g(w)-g(w_0)}}$$

当 $w\to w_0$ 时 $g(w)\to g(w_0)$. 令 $z_0=g(w_0)$, $z=g(w)$. 则 $w\to w_0$ $\Leftrightarrow z\to z_0$.

$$\text{上式}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}=\frac{1}{f'(z_0)}.$$

留数

定义：设 f 在 $0<|z-a|<r$ 上全纯，定义留数为

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} f(z)\,dz,\quad 0<\rho<r,$$ 与 ρ 的选取无关.

计算方法：① 若 f 级数为 $f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$

$$\int_{|z-a|=\rho} f(z)\,dz=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \int_{|z-a|=\rho}(z-a)^n = 2\pi i\, c_{-1}.$$

故 $c_{-1}=\operatorname{Res}(f,a)$.

② 若 a 是可去奇点，则 $\operatorname{Res}(f,a)=0$

③ 若 a 是 f 的一阶极点，则

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)\left(\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\cdots\right)$$

$$= c_{-1} = \operatorname{Res}(f,a).$$

④ 若 $f=\dfrac{\varphi}{\psi}$，$\varphi(a)\neq 0$，$\psi(a)=0$，$\psi'(a)\neq 0$

则 $$\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

⑤ 若 a 是 f 的 m 阶极点，则

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m},\quad g(a)\neq 0.$$

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{g(z)}{(z-a)^m}\,dz = \frac{1}{(m-1)!}g^{(m-1)}(a).$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\left((z-a)^m f(z)\right)^{(m-1)}\Big|_{z=a}$$

例：设 $f(z) = \sin\frac{1}{z}$，求 $\mathrm{Res}(f, 0)$.

解：$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots$

$\mathrm{Res}(f, 0) = 1$.

例：求 $f(z) = \frac{\sin z}{z^4-1}$. 求 $\mathrm{Res}(f, 1)$.

解：$\mathrm{Res}(f, 1) = \left.\frac{\sin z}{(z^4-1)'}\right|_{z=1} = \frac{\sin 1}{4}$

定理.（留数定理）. 设$f(z)$在γ内部$D\setminus\{z_1,\cdots z_k\}$全纯，且在$\overline{D}\setminus\{z_1,\cdots z_k\}$上连续，则

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f, z_k).$$

证：Cauchy定理：

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f, z_k).$$

其中 γ_k: $|z-z_k|=\varepsilon$. ε充分小.

例： $I = \oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^7 - 1}\, dz$.

解：设 $z_k = e^{\frac{i}{7}\cdot 2k\pi}$, $k = 0, 1, 2, \cdots 6$.

则 $I = 2\pi i \sum_{k=1}^{7} \mathrm{Res}(f, z_k) = \cdots$

∞远点留数.

定义: 若 f 在 $|z|>R$ 上全纯, 则

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} f(z)\,dz, \quad (\rho>R). \quad (\text{注意积分方向})$$

设 f 在 $z=\infty$ 处而展式, 则

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n z^n, \qquad C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz.$$

则 $\mathrm{Res}(f,\infty) = -C_{-1}$.

定理: 设$f(z)$在$\mathbb{C}\setminus\{z_1, z_2, \cdots z_n\}$上全纯, 则$f(z)$所有孤立奇点留数之和为0.

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0.$$

证明: 设 γ: $|z|=R$, R充分大.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f, z_k)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz = -\mathrm{Res}(f, \infty).$$

例：计算 $I=\int_{|z|=2}\frac{z^5}{1+z^6}dz.$

方法一：$1+z^6=0$ 的根为 $z_k=e^{\frac{\pi i}{6}+\frac{i}{6}\cdot 2k\pi}=e^{\frac{2k+1}{6}i}$，$k=0,1,2\cdots 5.$

故 $I=2\pi i\sum_{k=0}^{5}\mathrm{Res}(f,z_k)=\cdots$

方法二： $I = 2\pi i \sum_{k=1}^{5} \mathrm{Res}(f, z_k)$

$= -2\pi i\, \mathrm{Res}(f, \infty).$

$\frac{z^5}{1+z^6}$ 在 ∞ 处展开：

$$\frac{z^5}{1+z^6} = \frac{z^5}{z^6} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z^6}} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z^6} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z^7} + \cdots$$

故 $\mathrm{Res}(f, \infty) = -1.$

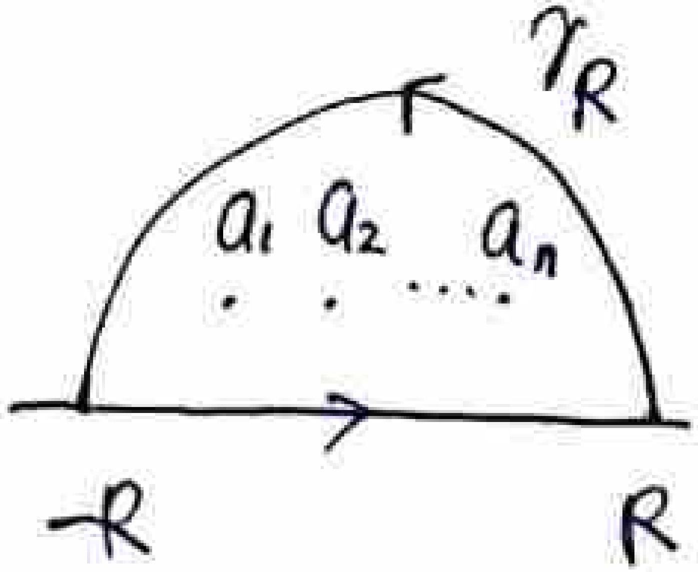
从而 $I = -2\pi i\, \mathrm{Res}(f, \infty) = 2\pi i.$

实积分计算

① $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

<u>定理:</u> 设 $f(z)$ 在 $\{\operatorname{Im} z>0\}\setminus\{a_1,\cdots a_n\}$ 全纯, 在 $\{\operatorname{Im} z\geq 0\}\setminus\{a_1,\cdots a_n\}$ 连续. 若 $\lim\limits_{z\to\infty} z f(z)=0$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,a_k)$.

证明:



$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,a_k)$$

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \leq \max_{\gamma_R}|f(z)|\cdot \pi R = \max_{\gamma_R}|z f(z)|\cdot\pi \to 0.$$

故 $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,a_k).$$

推论：若 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，P.Q 无公因子，Q无实根，$\deg Q-\deg P\geq 2$.

则 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, a_k\right),$$ a_k 为 $Q(z)$ 在上半平面中的根.

例：计算 $$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$$

解 $a=i$,

$$I=2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}, i\right)$$

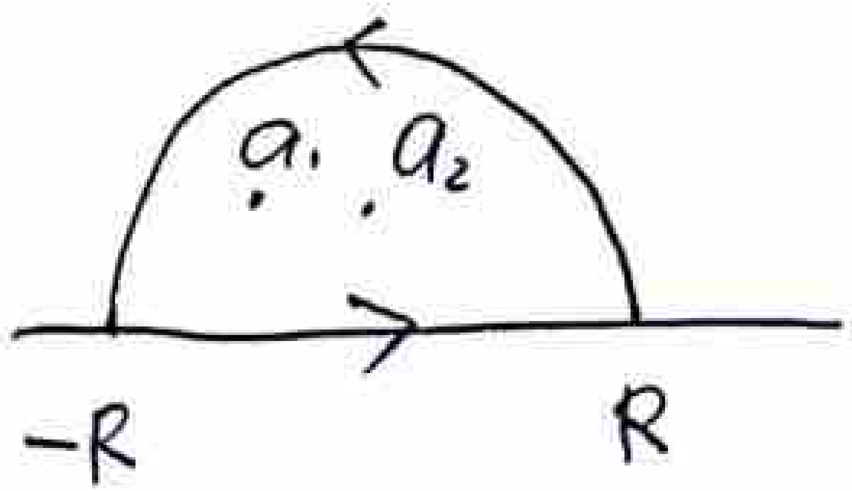
$$=2\pi i\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\right)^{(n)}\Bigg|_{z=i} = 2\pi\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$$

Ⅱ: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\sin\alpha x\,dx$

定理：设 $f(z)$ 在 $\{\operatorname{Im} z>0\}\setminus\{a_1,\cdots a_k\}$ 上全纯，在 $\{\operatorname{Im} z\geq 0\}\setminus\{a_1,\cdots a_k\}$ 上连续，若 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$，则对 $\forall\alpha>0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\alpha x}\, dx = 2\pi i \sum_{k} \operatorname{Res}\left(e^{i\alpha z} f(z),\ a_k\right);$$

证：



$$\int_{-R}^{R} e^{i\alpha x} f(x)\, dx + \int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)\, dz$$

$$= 2\pi i \sum_{k} \operatorname{Res}\left(e^{i\alpha z} f(z),\ a_k\right). \qquad (*)$$

引理：若 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$，$\alpha>0$，则 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z) = 0.$

证：令 $M_R = \max\limits_{\gamma_R} |f(z)| \to 0$.

则
$$\left|\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\pi} e^{i\alpha R(\cos\theta + i\sin\theta)} f(Re^{i\theta}) Ri e^{i\theta} d\theta\right|$$

$$= \left|\int_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\theta + i\alpha R\cos\theta} f(Re^{i\theta}) \cdot Ri e^{i\theta} d\theta\right|$$

$$\leq R \cdot M_R \cdot \int_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\theta} d\theta$$

$$\leq R \cdot M_R \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\sin\theta} d\theta. \quad (*)$$

当 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时，$\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$.

故 $(*) \leq R \cdot M_R \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin\theta} d\theta$

$$\leq R \cdot M_R \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \frac{2}{\pi}\theta} d\theta$$

$$= 2RM_R \cdot \frac{\pi}{2\alpha R} \cdot (1 - e^{-\alpha R})$$

$$= M_R \frac{\pi}{\alpha} (1 - e^{-\alpha R}) \to 0 \quad (R \to +\infty).$$

在 $(*)$ 中令 $R \to \infty$，故有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}\,(e^{i\alpha z} f(z), a_k).$$

在(*)中令$R\to\infty$，就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k} \operatorname{Res}\left(e^{i\alpha z} f(z),\ a_k\right).$$

故取实部和虚部知：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx = 2\pi \operatorname{Re}\left(i \sum_{k} \operatorname{Res}\left(e^{i\alpha z} f(z),\ a_k\right)\right).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx = 2\pi \operatorname{Im}\left(i \sum_{k} \operatorname{Res}\left(e^{i\alpha z} f(z),\ a_k\right)\right).$$

例: $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{b^2+x^2}dx$, $\quad a>0,\ b>0$

设: 令 $f(z)=\frac{1}{b^2+z^2}$, $\quad \lim_{z\to\infty} f(z)=0$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{iaz}dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f e^{iaz}, ib)$

$$I = \operatorname{Re}\left(2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iaz}}{b^2+z^2}, ib\right)\right)$$

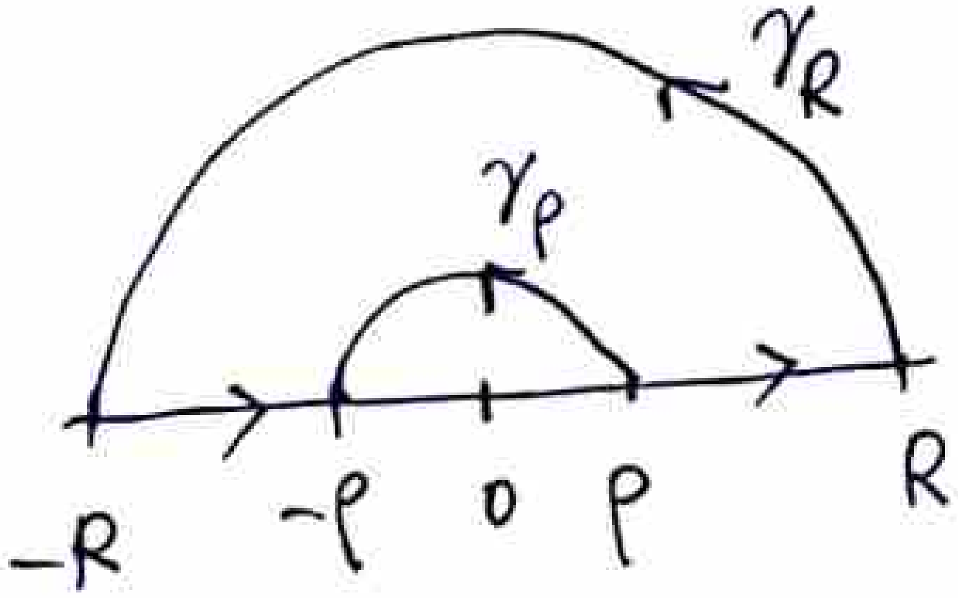
$$= \operatorname{Re}\left(2\pi i \cdot \frac{e^{iaz}}{z+bi}\Big|_{z=bi}\right)$$

$$= \frac{\pi}{b}e^{-ab}.$$

(III): $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有奇点

例: 计算 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

解: ① $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$



则

$$\left(\int_{-R}^{-\rho} - \int_{\gamma_\rho} + \int_{\rho}^{R} + \int_{\gamma_R}\right) \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0.$$

由上述引理 $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0.$

下求 $\lim\limits_{\rho\to 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z}\,dz.$

② $\widehat{z}$ $z=\rho e^{i\theta}$, $\theta: 0\to\pi$.

$$\int_{\gamma_\rho}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_0^{\pi}\frac{e^{i\rho e^{i\theta}}}{\rho e^{i\theta}}\rho i e^{i\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}e^{i\rho e^{i\theta}}\cdot i\,d\theta\to\pi i\quad(\rho\to0).$$

故 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx=\pi i$$

故 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx=0,\quad\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi.$$

例：计算 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx.$

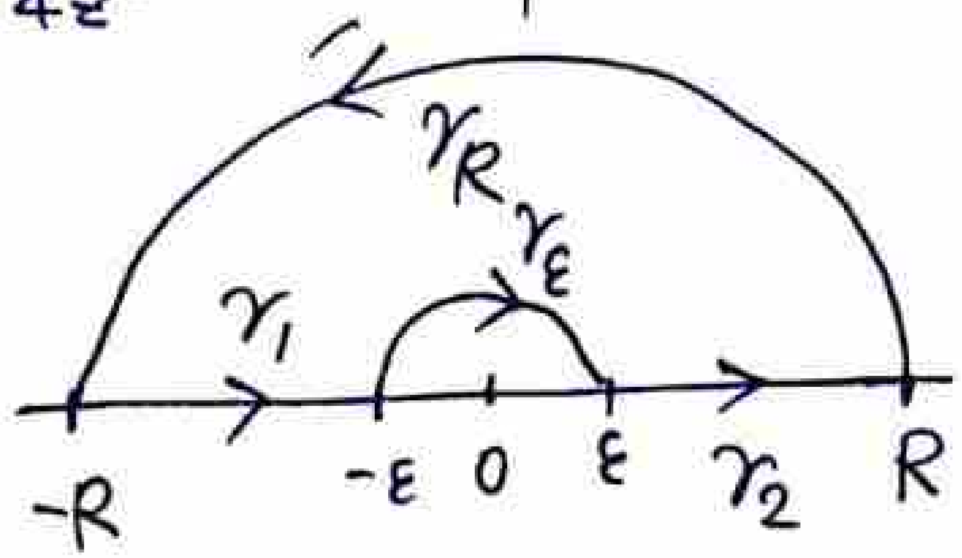
解：$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3\frac{1}{x^3}\,dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{-8ix^3}\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3\sin x-\sin 3x}{4x^3}\,dx$$

令 $F(z)=\frac{3e^{iz}-e^{3zi}}{4z^3}$ 则 $\cancel{\mathrm{Re}}\,\mathrm{Im}\,F(x)=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4x^3}$

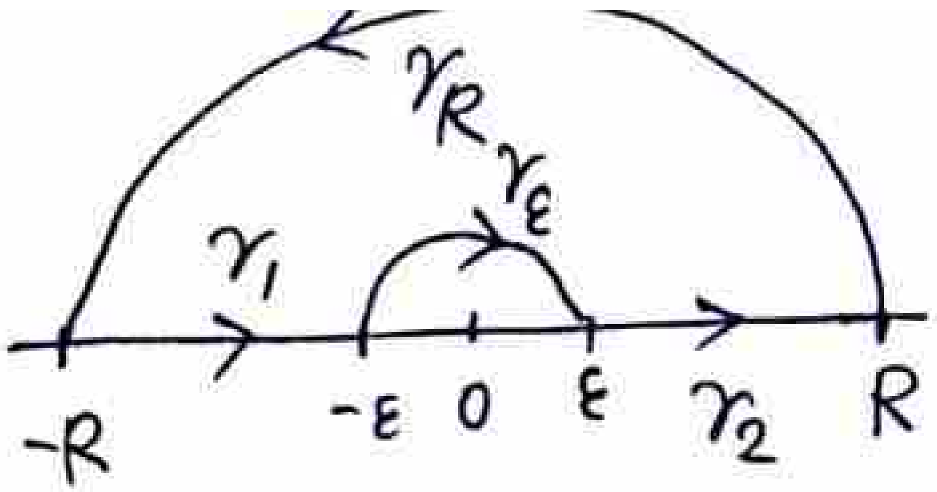
取积分曲线：



取 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_\varepsilon\cup\gamma_2\cup\gamma_R$. 则

$$\int_\gamma F(z)\,dz=0$$

取积分曲线：



取 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_\varepsilon\cup\gamma_2\cup\gamma_R$，则

$$\int_\gamma F(z)\,dz=0$$

注意

$$\left|\int_{\gamma_R}F(z)\,dz\right|\to 0.$$

$$\int_{\gamma_2}F(z)\,dz\to\int_0^{+\infty}F(x)\,dx$$

$$\int_{\gamma_1}F(z)\,dz\to\int_{-\infty}^{0}F(x)\,dx$$

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} F(z)\,dz + \int_{\varepsilon}^{R} F(z)\,dz$$

$$= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{3e^{ix} - e^{3xi}}{4x^3}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{3e^{ix} - e^{3xi}}{4x^3}\,dx$$

$$= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{3\cos x - \cos 3x}{4x^3}\,dx + i\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{3\sin x - \sin 3x}{4x^3}\,dx$$

$$+ \int_{\varepsilon}^{R} \frac{3\cos x - \cos 3x}{4x^3}\,dx + i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{3\sin x - \sin 3x}{4x^3}\,dx$$

$$= i\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R}\right) \frac{3\sin x - \sin 3x}{4x^3}\,dx \Rightarrow i\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3\sin x - \sin 3x}{4x^3}\,dx$$

下求 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} F(z)\,dz$.

首先求 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} z^k\,dz$. $(k\in\mathbb{Z})$

令 $z=\varepsilon e^{i\theta}$, $\theta:\pi\to 0$. 则

$$\int_{\gamma_\varepsilon} z^k dz = \int_\pi^0 \varepsilon^k e^{ik\theta}\,\varepsilon i e^{i\theta}\,d\theta = -\int_0^\pi i\varepsilon^{k+1} e^{i(k+1)\theta}\,d\theta. \quad (*)$$

若 $k=-1$, 则 $(*)=-\pi i$

若 $k\neq -1$, 则 $(*)=-i\varepsilon^{k+1}\int_0^\pi e^{i(k+1)\theta}\,d\theta$

$$= -\frac{\varepsilon^{k+1}}{k+1}\left((-1)^{k+1}-1\right) \to \begin{cases} 0, & \text{若 } k\geq 0 \text{ 或者 } k \text{ 为 } \leq -2 \text{ 的奇整数} \\ \text{不存在}, & \text{若 } k \text{ 为 } \leq -2 \text{ 的偶整数}. \end{cases}$$

下求 $F(z)$ 展开式.

$$e^{z} = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \cdots$$

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6}iz^3 + \cdots$$

$$e^{3zi} = 1 + 3zi - \frac{9}{2}z^2 - \frac{27}{6}iz^3 + \cdots$$

$$3e^{iz} - e^{3zi} = 2 + 3z^2 + 4iz^3 + \cdots$$

$$F(z) = \frac{3e^{iz} - e^{3zi}}{4z^3} = \frac{2 + 3z^2 + 4iz^3}{4z^3} = \frac{1}{2}\frac{1}{z^3} + \frac{3}{4}\frac{1}{z} + 4i + \cdots$$

故 $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} F(z)\,dz = -\frac{3}{4}\pi i.$

从而 $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3\sin x - \sin 3x}{4x^3}\,dx = \frac{3}{4}\pi$

(4). $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta.$

令 $z = e^{i\theta}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

当 $z = e^{i\theta}$, $dz = i e^{i\theta} d\theta = iz\, d\theta$, 故 $d\theta = \frac{dz}{iz}$.

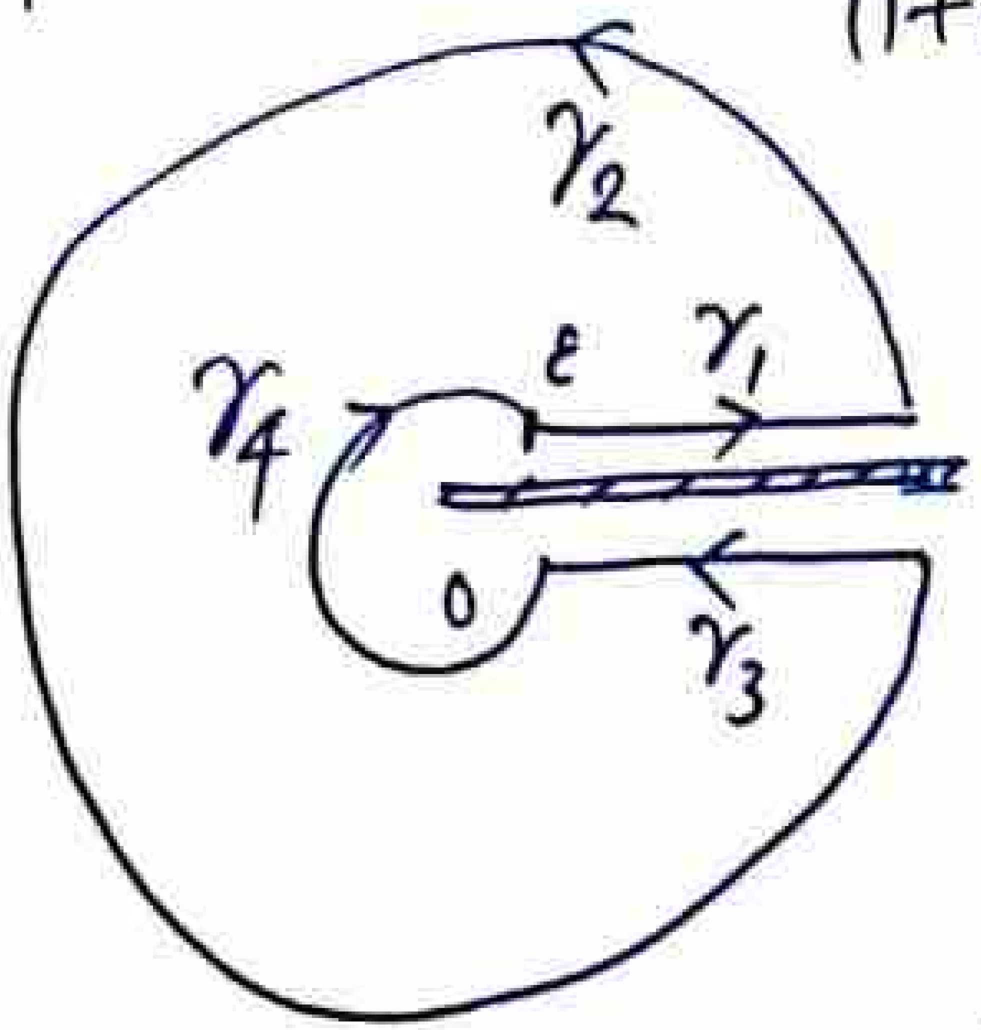
例: $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos\theta + 2\sin\theta} = \int_{|z|=1} \frac{1}{3 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz}$

$$= \pi.$$

(5) 多值函数相关积分.

例: 计算 $I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x)x^{\alpha}}$, $0<\alpha<1$.

解: ①考虑. $F(z)=\frac{1}{(1+z)z^{\alpha}}$, z^{α} 支点 $0,\infty$.



设 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$

$F(z)$ 在 γ 内部有奇点 $z=-1$.

$$\int_{\gamma}F(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(F(z),-1).$$

② $$\int_{\gamma_1} F(z)\,dz = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{dx}{(1+x)x^{\alpha}} \to \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)x^{\alpha}}, \quad (\varepsilon \to 0,\ R \to \infty)$$

③ $$\int_{\gamma_3} F(z)\,dz = \int_{R}^{\varepsilon} \frac{1}{(1+x)z^{\alpha}\Big|_{z=x_F}}$$

$$z^{\alpha}\Big|_{z=x_F} = |x|^{\alpha} e^{i\alpha \operatorname{Arg} x_F} = |x|^{\alpha} e^{i\alpha(\operatorname{Arg} x_I + \Delta_c \operatorname{Arg} z)}$$

$$= |x|^{\alpha} e^{i\alpha(0+2\pi)} = |x|^{\alpha} e^{i\alpha\cdot 2\pi}$$

故 $$\int_{\gamma_3} F(z)\,dz = \int_{R}^{\varepsilon} \frac{1}{(1+x)x^{\alpha}e^{2\pi\alpha i}} \to -e^{-2\pi\alpha i}\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)x^{\alpha}}$$

④ $$\left|\int_{\gamma_2} \frac{dz}{(1+z)z^\alpha}\right| \leq \int_{\gamma_2} \frac{|dz|}{|1+z|\,|z|^\alpha} \leq \frac{2\pi R}{R^\alpha\cdot(R-1)} \sim R^{-\alpha} \to 0.$$

$(R \to +\infty)$.

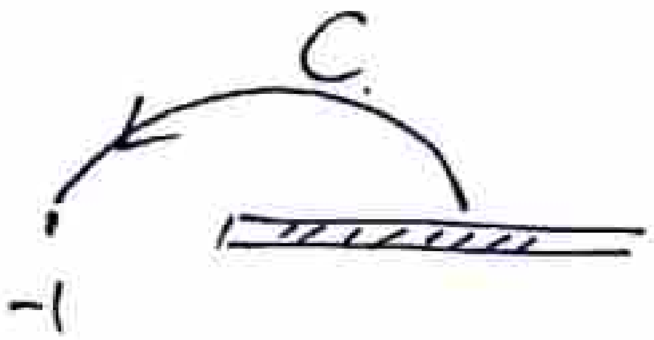
⑤ $$\left|\int_{\gamma_4} \frac{dz}{(1+z)z^\alpha}\right| \leq \int_{\gamma_4} \frac{|dz|}{|z|^\alpha\cdot|1+z|} \sim \frac{2\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon)\varepsilon^\alpha} \sim \varepsilon^{1-\alpha} \to 0$$

$(\varepsilon \to 0)$.

⑥ $$\operatorname{Res}(F,-1) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1+z)z^{\alpha}}, -1\right)$$

$$= \left.\frac{1}{z^{\alpha}}\right|_{z=-1}.$$

$$\left.z^{\alpha}\right|_{z=-1} = \left.|z|^{\alpha} e^{i\alpha \operatorname{Arg} z}\right|_{z=-1}$$



$$= \left.|z|^{\alpha} e^{i\alpha(0+\Delta_C \operatorname{Arg} z)}\right|_{z=-1}.$$

$$= e^{i\alpha\pi}$$

故 $\operatorname{Res}(F,-1) = e^{-\pi\alpha i}$

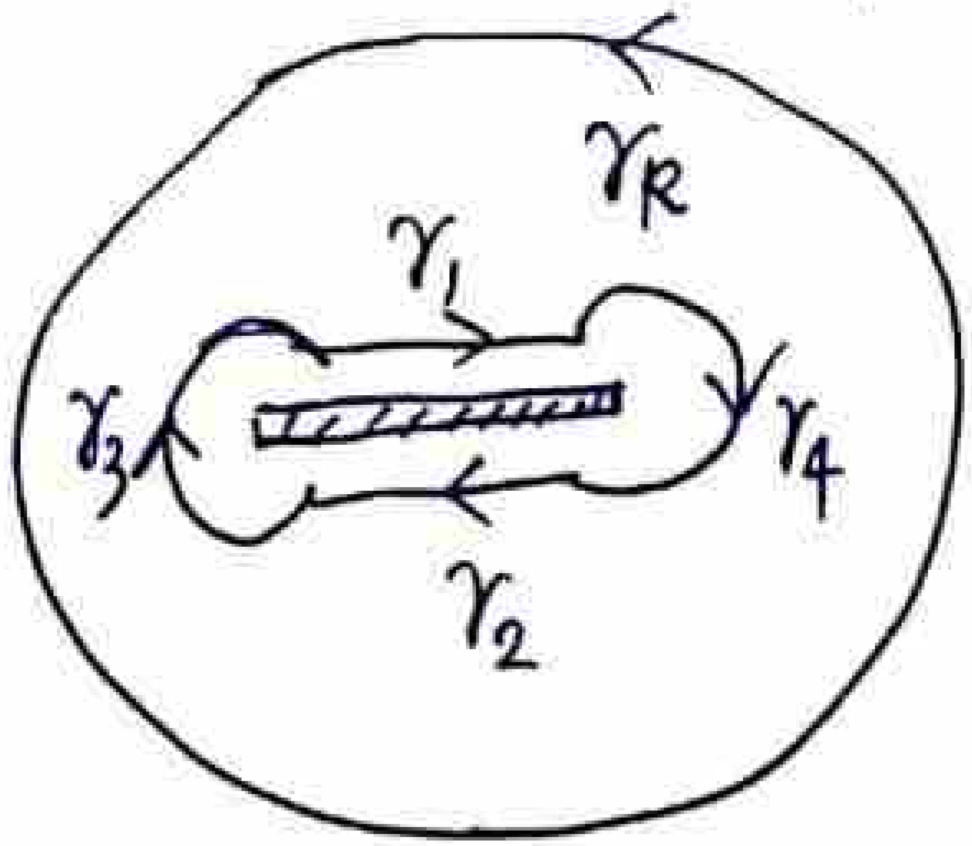
⑦ 综上：

$$\left(1-e^{-2\pi\alpha i}\right)\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x)x^{\alpha}} = 2\pi i\, e^{-i\alpha\pi}$$

故 $$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x)x^{\alpha}} = \frac{2\pi i\, e^{-i\alpha\pi}}{1-e^{-2\pi i\alpha}} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha} \qquad (0<\alpha<1).$$

例: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}\,dx$

解: ①令 $F(z)=\dfrac{\sqrt[3]{z^2(1-z)}}{(1+z)^3}$ 令 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4\cup\gamma_R$



则在γ内部, F只有一个极点 $z=-1$.

$$\int_\gamma F(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(F,-1).$$

② γ_3: $|z| = \varepsilon$.

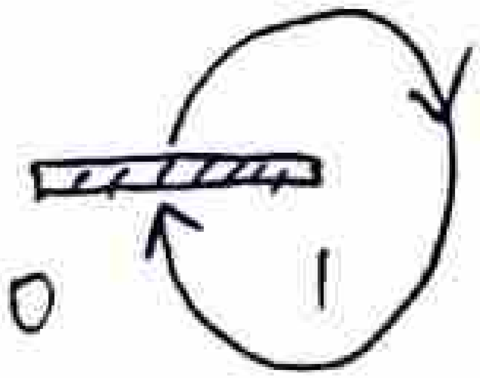
$$\left|\int_{\gamma_3} F(z)\,dz\right| \leq \int_0^1 \frac{|z|^{\frac{2}{3}}|1-z|^{\frac{1}{3}}}{|1+z|^3}|dz| \leq C\cdot\varepsilon^{\frac{2}{3}}\cdot 2\pi\varepsilon \to 0 \quad (\varepsilon\to 0)$$

③ γ_4: $|z-1| = \varepsilon$.

$$\left|\int_{\gamma_4} F(z)\,dz\right| \leq \int_0^1 \frac{|z|^{\frac{2}{3}}|1-z|^{\frac{1}{3}}}{|1+z|^3}|dz| \leq C\cdot\varepsilon^{\frac{1}{3}}\cdot 2\pi\varepsilon \to 0 \quad (\varepsilon\to 0).$$

④ $$\int_{\gamma_1} F(z)\,dz \to \int_0^1 F(x)\,dx \qquad (\varepsilon\to 0).$$

(5) $$\int_{\gamma_2} F(z)\,dz \to \int_1^0 F(x)\, e^{i \operatorname{Arg} F(z)\big|_{z=x_F}}\, dx.$$



$$\begin{aligned}
\operatorname{Arg} F(z)\Big|_{z=x_F} &= \operatorname{Arg} F(z)\Big|_{z=x_L} + \Delta_c \operatorname{Arg} F(z) \\
&= \frac{1}{3}\left(2\,\Delta_c \operatorname{Arg} z + \Delta_c \operatorname{Arg}(z-1)\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2\cdot 0 + (-2\pi)\right) = -\frac{2}{3}\pi
\end{aligned}$$

$$\int_{\gamma_2} F(z)\,dz \to \int_1^0 F(x)\, e^{-\frac{2}{3}\pi i}\, dx = -\int_0^1 F(x)\,dx \cdot e^{\frac{1}{3}\pi i}$$

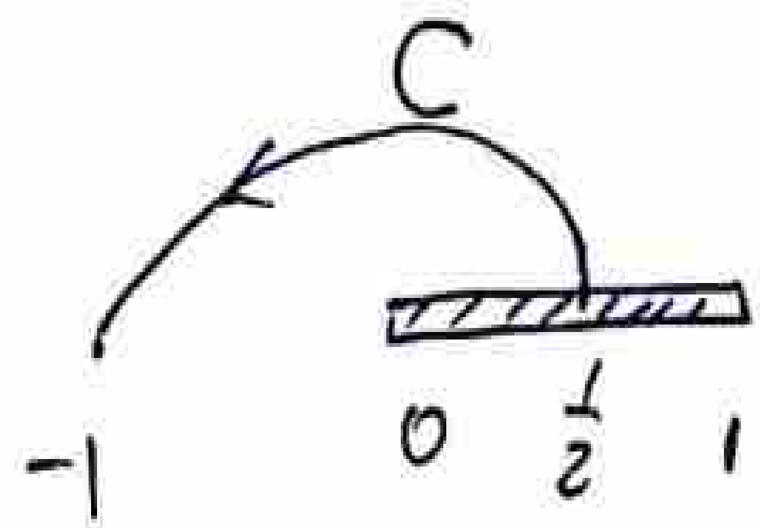
(6) $$\left|\int_{\gamma_R} F(z)\,dz\right| \le \int_{\gamma_R} \frac{|z|^{\frac{2}{3}}\cdot|1-z|^{\frac{1}{3}}}{|1+z|^{3}}\,|dz| \sim \frac{R^{\frac{2}{3}}\cdot R^{\frac{1}{3}}}{R^{3}}\cdot 2\pi R \sim \frac{1}{R} \to 0.$$

综上: $\left(1-e^{\frac{4}{3}\pi i}\right)\int_0^1 F(x)\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}(F,-1)$.

下求 $\operatorname{Res}(F,-1)$

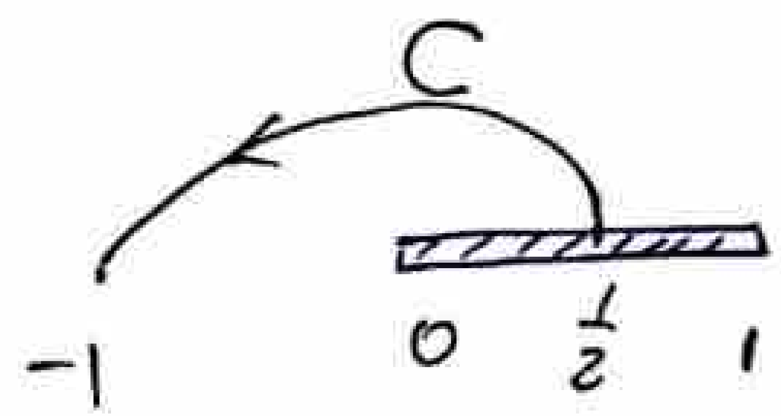
$$F(z)=\frac{\sqrt[3]{z^2(1-z)}}{(1+z)^3}.$$

而 $\operatorname{Res}(F,-1)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{z^2(1-z)}\right)''\Big|_{z=-1}.$



令 $G(z)=\sqrt[3]{R(z)}$, $R(z)=z^2(1-z)$.

故 $\mathrm{Res}(F,-1)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{z^2(1-z)}\right)''\Big|_{z=-1}.$



令 $G(z)=\sqrt[3]{R(z)}$, $\quad R(z)=z^2(1-z)$.

则 $$G(-1)=|R(-1)|^{\frac13}\,e^{\frac{i}{3}\operatorname{Arg}R(z)}\Big|_{z=-1}$$
$$=|R(-1)|^{\frac13}\,e^{\frac{i}{3}\left(\operatorname{Arg}R\left(\left(\frac12\right)_+\right)+\Delta_C\operatorname{Arg}R(z)\right)}$$
$$=2^{\frac13}\,e^{\frac{i}{3}\cdot\left(2\Delta_C\operatorname{Arg}z+\Delta_C\operatorname{Arg}(z-1)\right)}$$
$$=2^{\frac13}\,e^{\frac{i}{3}(2\cdot\pi+0)}=2^{\frac13}\,e^{\frac23\pi i}$$

$$G'(z)=\frac13\,R(z)^{\frac13-1}\,(R(z))'=\frac13\,R(z)^{-\frac23}(R(z))'=\frac13\,G(z)^{-2}\cdot(R(z))'$$

$$G''(z)=\frac13\cdot(-2)\cdot G(z)^{-3}\cdot G'(z)\,(R(z))'+\frac13\,G(z)^{-2}(R(z))''$$
$$=-\frac23\,G(z)^{-3}\cdot\left(\frac13\,G(z)^{-2}(R(z))'\right)R'(z)+\frac13\,G(z)^{-2}(R(z))''$$
$$=-\frac29\,G(z)^{-5}(R'(z))^2+\frac13\,G(z)^{-2}(R(z))''$$

由于 $R(z)=z^2(1-z)$，故

$$R'(z)=2z(1-z)+z^2\cdot(-1)=2z-3z^2,\quad R'(-1)=-5$$

$$R''(z)=2-6z,\quad R''(-1)=8.$$

注意 $G(-1)=2^{\frac{1}{3}}e^{\frac{2}{3}\pi i}$ 故

$$G''(-1)=-\frac{2}{9}\left(2^{\frac{1}{3}}e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)^{-5}\cdot 25+\frac{1}{3}\cdot\left(2^{\frac{1}{3}}e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)^{-2}\cdot 8$$

$$=-\frac{50}{9}2^{-\frac{5}{3}}e^{-\frac{10}{3}\pi i}+\frac{8}{3}2^{-\frac{2}{3}}\cdot e^{-\frac{4}{3}\pi i}$$

$$=-\frac{50}{9}2^{-\frac{5}{3}}e^{\frac{2}{3}\pi i}+\frac{8}{3}\cdot 2^{-\frac{2}{3}}\cdot e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

$$=\left(-\frac{50}{9}2^{-\frac{5}{3}}+\frac{8}{3}\cdot 2^{-\frac{2}{3}}\right)e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

$$=-\frac{1}{18}2^{\frac{1}{3}}e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

故 $$\int_0^1 F(x)\,dx = \frac{2\pi i \operatorname{Res}(F,-1)}{1-e^{\frac{4}{3}\pi i}}$$

$$= \frac{2\pi i}{1-e^{\frac{4}{3}\pi i}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{18}\, 2^{\frac{1}{3}}\, e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)$$

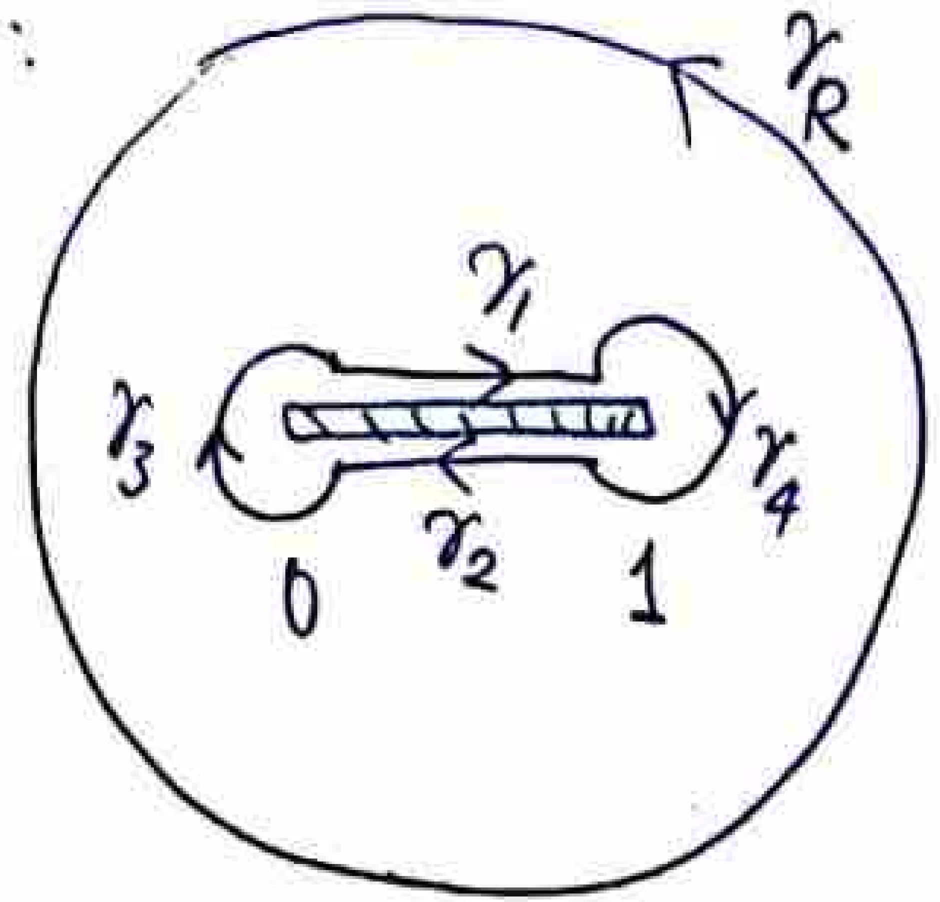
$$= \frac{\sqrt[3]{2}\,\pi}{18\sqrt{3}}$$

例：求 $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{(1-x)^3}{x}}\,dx$

解：令 $F(z) = \frac{1}{(1+z)^2}\sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}}$，支点 0，1，$\infty$ 不是支点

故取单值域 $\mathbb{C}\setminus[0,1]$.

取积分曲线：



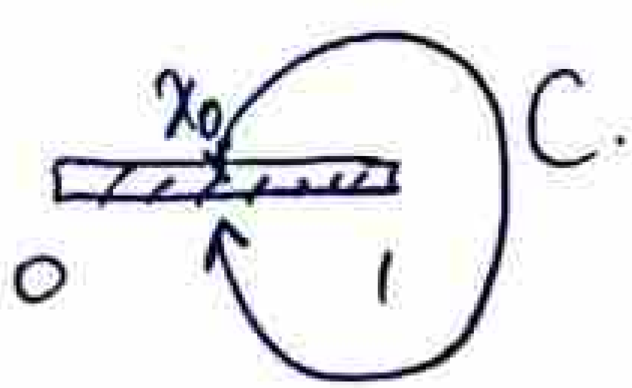
$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \gamma_R$

$$\int_\gamma F(z)\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(F(z), -1).$$

① $$\left|\int_{\gamma_3} F(z)\,dz\right| \le \int_{\gamma_3} |1-z|^{\frac{3}{2}}\,|z|^{-\frac{1}{2}}\,|dz| \le C\cdot\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\cdot\varepsilon^{1} \to 0$$

② $$\left|\int_{\gamma_4} F(z)\,dz\right| \le \int_{\gamma_4} |1-z|^{\frac{3}{2}}\,|z|^{-\frac{1}{2}}\,|dz| \le C\cdot\varepsilon^{\frac{3}{2}}\cdot\varepsilon^{1} \to 0.$$

③ $$\int_{\gamma_1} F(z)\,dz \to \int_0^1 F(x)\,dx$$



令 $R(z)=\dfrac{(1-z)^3}{z}$

$$\sqrt{R(z)} = |R(z)|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}\operatorname{Arg}R(z)}$$

$$\operatorname{Arg}R(z) = \operatorname{Arg}R(z)\Big|_{z=x_0\text{上}} + \Delta_C \operatorname{Arg}R(z)$$

$$= 3\Delta_C \operatorname{Arg}(z-1) - \Delta_C \operatorname{Arg} z.$$

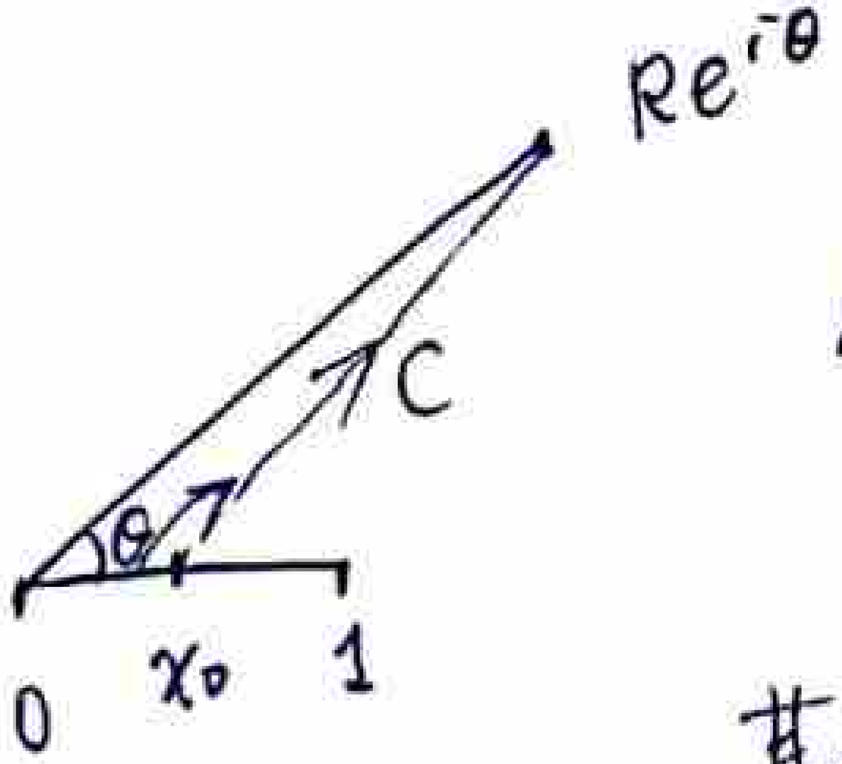
当 $z=x_{0\text{下}}$ 时

$$\operatorname{Arg}R(z)\Big|_{z=x_0\text{下}} = 3\cdot(-2\pi-0) = -6\pi$$

故 $\sqrt{R(z)} = |R(z)|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(-6\pi)} = -|R(z)|^{\frac{1}{2}}.$

从而 $\displaystyle\int_{\gamma_2} F(z)\,dz = \int_1^0 -F(x)\,dx = \int_0^1 F(x)\,dx$

⑤ 求 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} F(z)\,dz$. $F(z)=\dfrac{1}{(1+z)^2}\sqrt{\tilde{R}(z)}$; $\tilde{R}(z)=\dfrac{(1-z)^3}{z}$.



$$\left.\operatorname{Arg} R(z)\right|_{z=Re^{i\theta}} = 3\Delta_C \operatorname{Arg}(z-1) - \Delta_C \operatorname{Arg} z.$$

$$\Rightarrow 3\alpha_R(\theta) - \theta$$

其中 $\lim\limits_{R\to\infty}\alpha_R(\theta) = -(\pi-\theta)$.

故 $\left.\operatorname{Arg} R(z)\right|_{z=Re^{i\theta}} \to -3(\pi-\theta)-\theta = 2\theta-3\pi$.

$$F(z)\Big|_{z=Re^{i\theta}} = \frac{1}{(1+Re^{i\theta})^2}\cdot\left|\tilde{R}(Re^{i\theta})\right|^{\frac{1}{2}}\cdot e^{(\theta-\frac{3}{2}\pi)i}$$

故

$$\int_{\gamma_R} F(z)\,dz = \int_0^{2\pi}\frac{1}{(1+Re^{i\theta})^2}\,R\cdot e^{i(\theta-\frac{3}{2}\pi)}\cdot Rie^{i\theta}\,d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{2i\theta}}\cdot e^{i(\theta-\frac{3}{2}\pi)}\cdot i\,e^{i\theta}\,d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{-\frac{3}{2}\pi i}\,d\theta = -\int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi.$$

⑥ $\operatorname{Res}(F,-1) = \left(\sqrt{R(z)}\right)'\Big|_{z=-1}$. $\quad R(z) = \dfrac{(1-z)^3}{z}$.

令 $G(z) = \sqrt{R(z)}$.

$G(-1) = |R(-1)|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} \operatorname{Arg} R(z)}\Big|_{z=-1}$.

$\operatorname{Arg} R(-1) = 3 \cdot 0 - \pi = -\pi$, $\quad R(-1) = -8$.

$G(-1) = \sqrt{8} \cdot e^{-\frac{i}{2}\pi} = -2i\sqrt{2}$

$G(z) = \sqrt{R(z)}$,

$G'(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{R(z)}} R'(z) = \dfrac{1}{2G} R'(z)$.

$R'(-1) = 4$, 故 $G'(-1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} i$. $\quad$ 故 $\operatorname{Res}(F,-1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} i$

⑨ 综上：

$$2\int_0^1 F(x)\,dx - 2\pi = 2\pi i \operatorname{Res}(F,-1) = 2\pi i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} i = -\sqrt{2}\pi$$

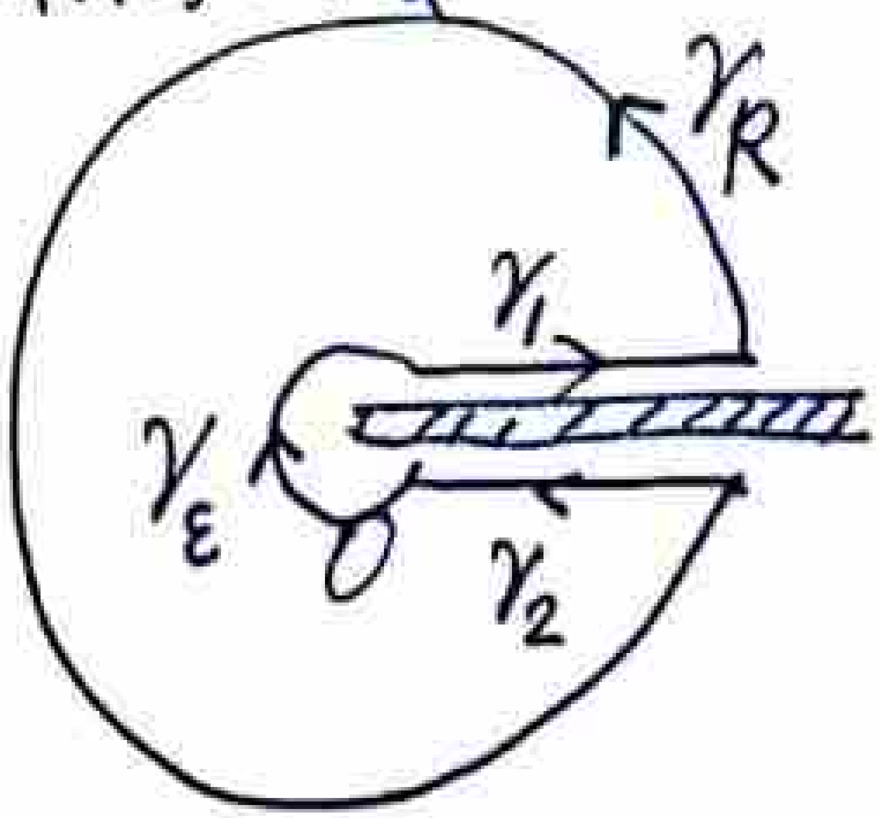
故 $\int_0^1 F(x)\,dx = \pi - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

例：计算 $I = \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

支点 $0, \infty$ 取积分曲线.

$$F(z) = \frac{\operatorname{Log} z}{(1+z^2)^2}$$

(*)



取 $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_\varepsilon \cup \gamma_R$. 则

$$\int_\gamma F(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(F, i) + \operatorname{Res}(F, -i)\right).$$

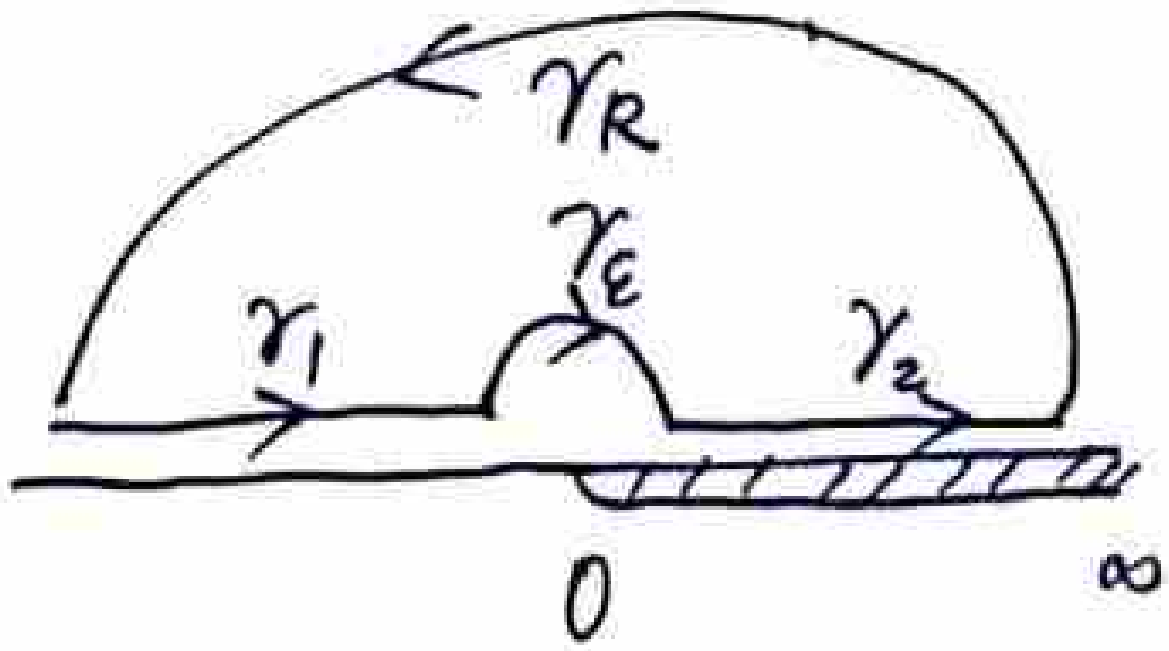
$$\int_{\gamma_1} F(z)\,dz \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

$$\int_{\gamma_2} F(z)\,dz \rightarrow \int_{+\infty}^{0} \frac{\operatorname{Log} z\big|_{z=x_{下}}}{(1+x^2)^2}\,dx = -\int_0^{\infty} \frac{\log x + 2\pi i}{(1+x^2)^2}\,dx$$

故 $\left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}\right) F(z)\,dz \rightarrow -\int_0^{\infty} \frac{2\pi i}{(1+x^2)^2}\,dx$ 算不出 I.

—— 表达式与I无关

解：取曲线：



$$F(z) = \frac{\mathrm{Log}\, z}{(1+z^2)^2}.$$

故 $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_\varepsilon \cup \gamma_R$

$$\int_{\gamma_1} F(z)\,dz \to \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{Log}\, z\big|_{z=x}}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{\log|x| + \pi i}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\log x + \pi i}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon} F(z)dz\right| \leq \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{|\operatorname{Log} z|}{|1+z^2|^2}|dz| \leq \frac{|\log\varepsilon|+\pi}{C}\,\pi\varepsilon \to 0.$$

$$\left|\int_{\gamma_R} F(z)dz\right| \leq \int_{\gamma_R} \frac{\log R+\pi}{|1+z^2|^2}|dz| \sim \frac{\log R+\pi}{R^4}\cdot 2\pi R \to 0.$$

$$\int_{\gamma_2} F(z)dz \to \int_0^\infty F(x)\,dx.$$

- $$2\int_0^\infty F(x)\,dx + \pi i\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2\pi i\operatorname{Res}(F,i) = -\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}i$$

故 $\displaystyle\int_0^\infty F(x)\,dx = -\frac{\pi}{4}.$

说明：若设 $F(z)=\dfrac{(\mathrm{Log}\,z)^2}{(1+z^2)^2}$，取积分曲线(*)可算出 I 值.

在积分曲线(*)下：

$$\int_{\gamma_1} F(z)\,dz \to \int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(1+x^2)^2}.$$

$$\int_{\gamma_2} F(z)\,dz = \int_R^\varepsilon \frac{(\log x+2\pi i)^2}{(1+x^2)^2}\,dx \to -\int_0^\infty \frac{(\log x+2\pi i)^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= -\int_0^\infty \frac{(\log x)^2+4\pi i\log x-4\pi^2}{(1+x^2)^2}.$$

相加：

$$-4\pi i\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} + 4\pi^2\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(F,i)+\mathrm{Res}(F,-i)\right)$$

$$= \pi^3+\pi^2 i$$

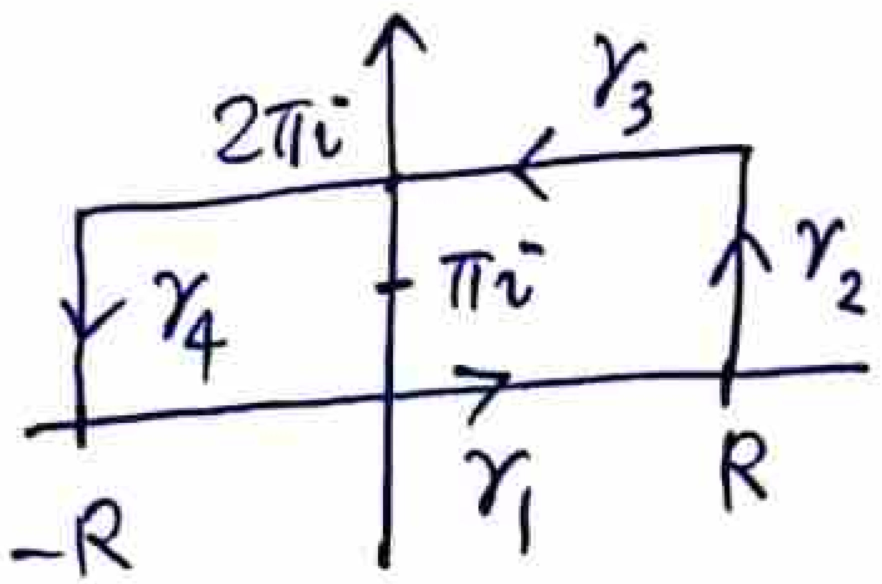
故 $$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi^3}{4\pi^2} = \frac{\pi}{4}$$

例: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx$, $(0<a<1)$

解: 令 $F(z)=\dfrac{e^{az}}{1+e^{z}}$, 则 $F(z)$ 有奇点 $z=\pi i+2k\pi i$

$=(2k+1)\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$.



$$\left(\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}+\int_{\gamma_3}+\int_{\gamma_4}\right)F(z)\,dz = 2\pi i\,\operatorname{Res}(F(z),\pi i)$$

① $\displaystyle\int_{\gamma_1} F(z)\,dz \to \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx$

$\gamma_2: z = R+it,\ t: 0 \to 2\pi$

② $$\left| \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+it)}}{1+e^{R+it}}\, i\,dt \right|$$

$$= \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR} e^{iat}}{1+e^{R+it}}\, i\,dt \right|$$

$$\leq C \cdot e^{(a-1)R} \to 0$$

$\gamma_4: z = -R+it,$
$t: 2\pi \to 0.$

③ $$\left| \int_{\gamma_4} f(z)\,dz \right| = \left| \int_{2\pi}^{0} \frac{e^{a(-R+it)}}{1+e^{-R+it}}\, i\,dt \right|$$

$$\leq C e^{-aR} \to 0.$$

④ $$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_R^{-R} \frac{e^{a(t+2\pi i)}}{1+e^{t+2\pi i}}\,dt.$$

γ_3: $z = t + 2\pi i$,

t: $R \to -R$

$$= -e^{2\pi a i}\int_{-R}^{R} \frac{e^{at}}{1+e^t}\,dt \to -e^{2\pi a i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}}{1+e^t}\,dt$$

综上：
$$\left(1-e^{2\pi i a}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\,dt = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(F(z),\pi i\right)$$
$$= 2\pi i\cdot\left(-e^{\pi a i}\right)$$

故
$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\,dt = -\frac{2\pi i\, e^{\pi a i}}{1-e^{2\pi i a}} = \frac{\pi}{\sin\pi a}.$$

例: $\int_0^{\pi} \log\sin x \, dx = -\pi \log 2$.

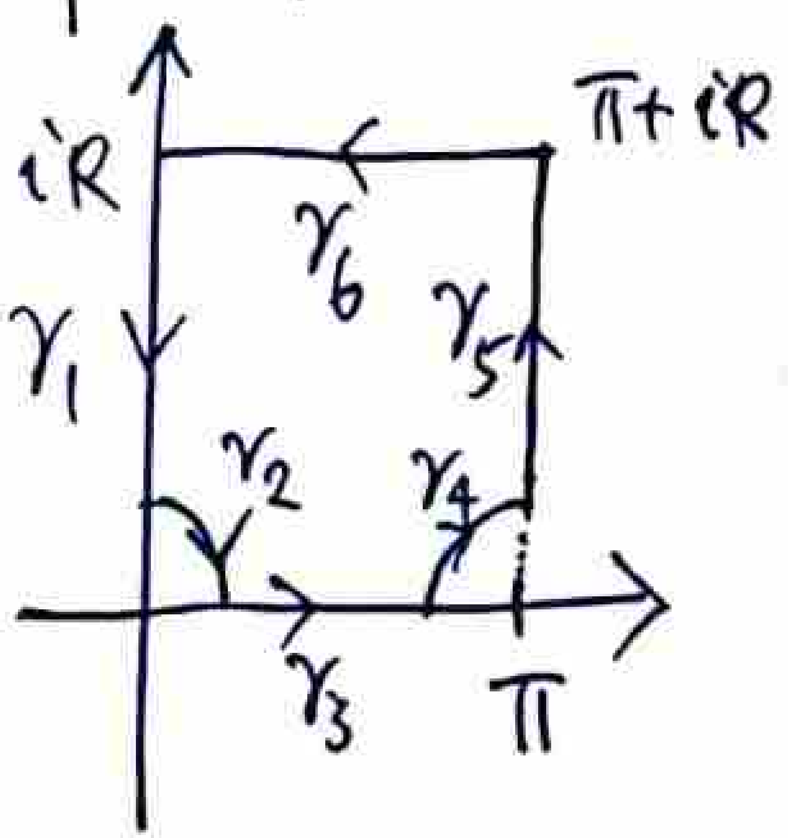
证: ① 积分有限: 当 $x \sim 0$ 时, $\log\sin x \sim \log x$ 可积.

② $\sin z$ 在 $\mathbb{C}$ 上零点为 $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = 0 \iff e^{2iz} = 1$$

$$\iff z = k\pi.$$

作曲线:



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \gamma_5 \cup \gamma_6$.

γ 所围区域为 D.

$\log\sin z$ 在 D 中全纯. 故

$$\int_{\partial D} \log\sin z \, dz = 0.$$

③ $\sin(x+iy)$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left((e^{-y} - e^{y})\cos x + i(e^{-y} + e^{y})\sin x\right)$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y})\sin x + \frac{1}{2}i(e^{y} - e^{-y})\cos x.$$

若 $x \in [0, \pi]$, $y > 0$, 则 $\mathrm{Re}(\sin(x+iy)) \geq 0$,

$$|\sin(x+iy)| \leq \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) + \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y})$$

$$= e^{-y} + e^{y}.$$

故 $\log|\sin(x+iy)| \leq C|y|.$

④. γ_2: $z = \varepsilon e^{i\theta}$, $\theta : \frac{\pi}{2} \to 0$. , $dz = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$

$$\left| \int_{\gamma_2} \log \sin z \, dz \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \left| \log \sin (\varepsilon e^{i\theta}) \right| d\theta$$

$$\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \cdot \varepsilon \, d\theta \to 0 .$$

⑤ γ_4: $z = \pi + \varepsilon e^{i\theta}$, $\theta : \pi \to \frac{\pi}{2}$

$$\left| \int_{\gamma_4} \log \sin z \, dz \right| \leq \left| \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \log \sin (\pi + \varepsilon e^{i\theta}) \, \varepsilon i e^{i\theta} d\theta \right|$$

$$\leq \varepsilon \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left| \log \sin (\pi + \varepsilon e^{i\theta}) \right| d\theta$$

$\pi + \varepsilon \cos\theta + i \varepsilon \sin\theta .$

$$\leq C \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon \to 0 .$$

(6) $\gamma_3: \ z = t, \quad t: \varepsilon \to \pi - \varepsilon$

$$\int_{\gamma_3} \log \sin z \, dz = \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \log \sin x \, dx \to \int_0^{\pi} \log \sin x \, dx.$$

⑦ γ_6: $z = t + iR$, $t: \pi \to 0$.

$$\int_{\gamma_6} \log \sin z \, dz = \int_{\pi}^{0} \log \sin (t + iR) \, dt \qquad (*)$$

$$\sin(t+iR) = \frac{1}{2}(e^{-R} + e^{R}) \sin t + i \cdot \frac{1}{2}(e^{R} - e^{-R}) \cos t$$

$$|\sin(t+iR)|^2 = \frac{1}{4}(e^{-R}+e^{R})^2 \sin^2 t + \frac{1}{4}(e^{R} - e^{-R})^2 \cos^2 t$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2R}(\sin^2 t + \cos^2 t) + \sin^2 t - \cos^2 t + \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{4} e^{2R} (1 + \mu(R)), \qquad \lim_{R \to \infty} \mu(R) = 0.$$

$$\log |\sin(t+iR)|^2 = \log \left(\frac{1}{4} e^{2R} \right) + \log (1 + \mu(R)).$$

$$\to 2R - 2 \log 2.$$

从而

$$\mathrm{Re}\int_{\gamma_6} \log\sin z\,dz = -\int_0^{\pi} \log\left|\sin(t+iR)\right| dt \qquad (\text{由}(*)).$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}(2R - 2\log 2)\cdot\pi$$

$$\Rightarrow -\pi R + \pi\log 2. \qquad (\text{当 } R\to\infty \text{ 时}).$$

(8) γ_1: $\quad z = it, \quad t: R \to \varepsilon.$

$$\sin z = \sin(it) = \frac{1}{2} i \left(e^{t} - e^{-t} \right).$$

故 $\arg \sin(iy) = \frac{\pi}{2}$.

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma_1} \log \sin z \, dz = \operatorname{Re} \int_R^{\varepsilon} \log \sin(it)\, i\, dt = -\operatorname{Re} \int_{\varepsilon}^{R} i \log \sin(it)\, dt$$

$$= \int_{\varepsilon}^{R} \operatorname{Im} \log \sin(it)\, dt = \frac{\pi}{2}(R - \varepsilon).$$

(9) $\displaystyle\int_{\gamma_5}$: $\quad \gamma_5 : \ z = \pi + it, \quad t : \varepsilon \to R.$

$$\sin z = \sin(\pi + it) = \frac{1}{2} i \left(e^{t} - e^{-t} \right) \cos \pi$$

$$= -\frac{1}{2} i \left(e^{t} - e^{-t} \right).$$

$$\arg \sin(\pi + it) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\mathrm{Re} \int_{\gamma_5} \log \sin z \, dz = \mathrm{Re} \int_{\varepsilon}^{R} \log \sin(\pi + it) \cdot i \, dt$$

$$= - \int_{\varepsilon}^{R} \mathrm{Im} \left(\log \sin(\pi + it) \right) dt$$

$$= + \frac{\pi}{2} (R - \varepsilon).$$

⑩ 综上：由 $\mathrm{Re}\int_{\partial D} \log\sin z\,dz = 0$ 知：

$$\int_0^{\pi} \log\sin x\,dx + \left(-\pi R + \pi\log 2 + \varepsilon(R)\right) + \pi(R-\varepsilon) = 0.$$

故 $\int_0^{\pi} \log\sin x\,dx = -\pi\log 2 + \varepsilon(R) + \pi\varepsilon \to \underline{-\pi\log 2}.$

全纯开拓

定义：设 f 在区域 D 上全纯，若存在比 D 大的区域 G，$D \subsetneq G$，及 G 上全纯函数 F，使 $F(z)\big|_D = f(z)$，则称 F 为 f 在 G 上的全纯开拓。

例：$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$，　$D = \{ |z| < 1 \}$

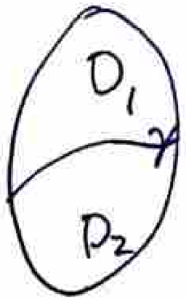
$F(z) = \dfrac{1}{1-z}$，　$G = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

则 $F(z)$ 为 $f(z)$ 在 G 上全纯开拓.

问题：全纯函数在哪些情况下可开拓？

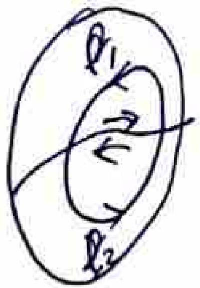
定理（Painlevé 原理）. 设 Ω 被 γ 分为两区域 Ω_1, Ω_2, f 在 Ω 内连续，在 D_1, D_2 内全纯，则 $f(z)$ 在 Ω 上全纯.

证：只需证对任何闭 $l \subset D$, $\int_l f(z)\,dz = 0$.



① 若 $l \subset D_1 \cup \gamma$ 或 $l \subset D_2 \cup \gamma$，则由 Cauchy 定理知

$$\int_l f(z)\,dz = 0$$



② $$\int_l f(z)\,dz = \int_{l_1 \cup \gamma_1} f(z)\,dz + \int_{l_2 \cup \gamma_1^-} f(z)\,dz = 0.$$

由 Morera 定理知 f 在 Ω 上全纯.

推论：若 f_1, f_2 分别在 D_1, D_2 上解析，分别在 $D_1 \cup l$，$D_2 \cup l$ 上连续.

且 $f_1|_l = f_2|_l$，则

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & \forall z \in D_1 \cup l \\ f_2(z), & \forall z \in D_2 \end{cases}$$

是 $D = D_1 \cup l \cup D_2$ 上解析函数.

定理：(Schwarz 对称原理)，

设 D 关于实轴对称，若 f 满足：

① f 在 $D\cap\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z>0\}$ 上全纯

② f 在 $D\cap\{\operatorname{Im} z\geq 0\}$ 连续.

③ f 在 $D\cap\{\operatorname{Im} z=0\}$ 上取实值.

则

$$F(z)=\begin{cases} f(z), & \forall z\in D\cap\{\operatorname{Im} z\geq 0\} \\ \overline{f(\bar{z})} & \forall z\in D\cap\{\operatorname{Im} z<0\}. \end{cases}$$

是 f 在 D 上全纯开拓.

证：① F 在 $\{\operatorname{Im} z<0\}$ 上全纯。设 $z \in D \cap \{\operatorname{Im} z<0\}$.

则 $w=\bar{z} \in D \cap \{\operatorname{Im} z>0\}$.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} F(z)=\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \overline{f(\bar{z})}=\overline{\frac{\partial}{\partial z} f(\bar{z})}=\overline{\frac{\partial}{\partial \bar{w}} f(w)}=0.$$

用第一章的定义去验证即可

② F 在 D 上连续，即证 $F(z)$ 在 $D \cap \{\operatorname{Im} z=0\}$ 上连续.

设 $z \in \Omega \cap \{\operatorname{Im} z<0\}$, $x_0 \in D \cap \{\operatorname{Im} z=0\}$ 是实数.

$$\lim_{z \to x_0} F(z)=\lim_{\bar{z} \to x_0} \overline{f(\bar{z})}=\lim_{\substack{w \to x_0 \\ w \in D^{+}}} \overline{f(w)}=\overline{f(x_0)}=F(x_0)$$

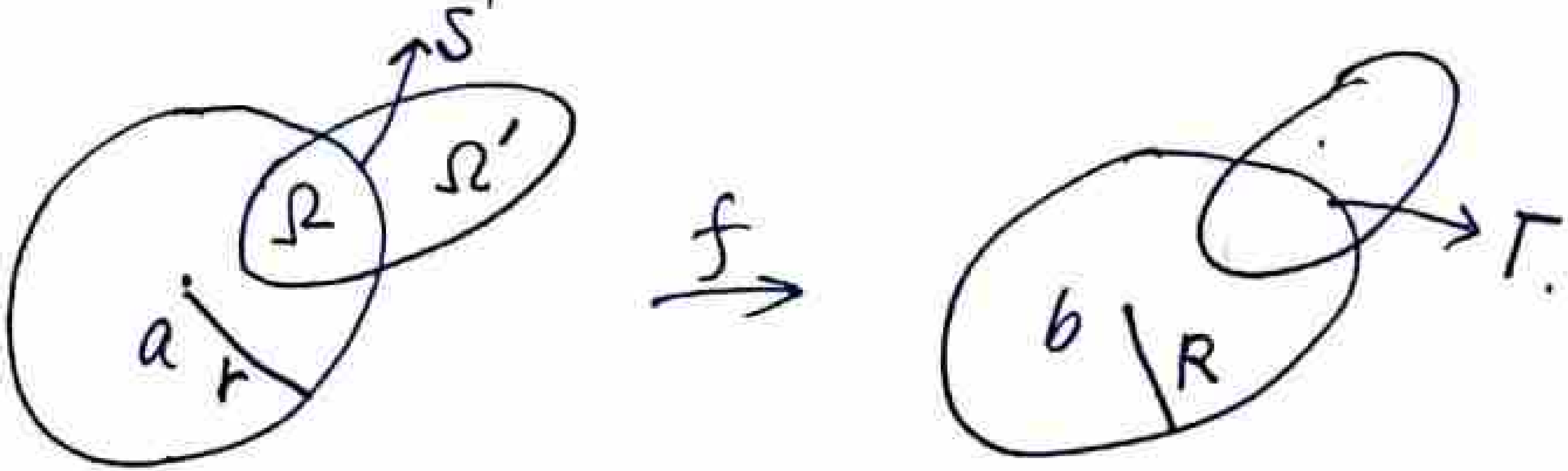
定理：设 ① Ω 与 Ω' 关于圆 $|z|=r$ 对称

② $f(z)$ 在 Ω 内全纯，在 $\Omega \cup S$ 上连续

③ $f(S)$ 为一段圆弧 Γ

④ Γ 而圆心 b 在 $\cancel{f(\Omega)}$ $f(\Omega)$

则 $f(z)$ 可全纯开拓到 $\Omega \cup S \cup \Omega'$.



圆的对称点：点 z 关于 $|z-a|=R$ 的对称点为

$$z^* = a + \frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}}$$

证：① 设 $z\in\Omega'$，则其对称点 $z^*\in\Omega$，定义 $F(z)$ 的值为 z^* 的像点的对称点。

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r, "F"] \arrow[d, "对称"'] & F(z) \\ z^* \arrow[r, "f"] & f(z^*) \arrow[u, "对称"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} F(z) &= f(z^*) \text{ 的对称点} \\ &= \left(f(z^*)\right)^* \\ &= b + \frac{R^2}{\overline{f(z^*)} - \bar{b}} \\ &= b + \frac{R^2}{\overline{f\left(a+\frac{r^2}{\bar{z}-\bar{a}}\right)} - \bar{b}}, \quad (z\in\Omega') \end{aligned}$$

② 下证 ⓐ $F(z)$ 在 S 附近连续

ⓑ $F(z)$ 在 Ω' 内全纯.

证ⓐ: 即证 若 $z'\in\Omega'$, $z_0\in S$, 则 $\lim\limits_{z'\to z_0} F(z') = F(z_0) = f(z_0)$.

由于 $z'\to z_0$, 故 $z'^{*} = a + \dfrac{r^2}{\overline{z'}-\bar{a}} \to a + \dfrac{r^2}{\overline{z_0}-\bar{a}} = z_0 \in S$

$$F(z') \to b + \frac{R^2}{\overline{f(z_0)}-\bar{b}} = \cancel{f(z_0)} = F(z_0) \in \Gamma$$

ⓑ 若 $z \in \Omega'$，则 $z^* \in \Omega$.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} F(z) = R^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{\overline{f(z^*)} - \bar{b}} \right)$$

$$= R^2 \left(- \frac{1}{(\bar{f} - \bar{b})^2} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \overline{f(z^*)}$$

$$= - \frac{R^2}{(\bar{f} - \bar{b})^2} \overline{\frac{\partial}{\partial z} f(z^*)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z^*) = f'(z^*) \cdot \frac{\partial}{\partial z} z^* = f'(z^*) \cdot 0 = 0.$$

这是因为 $\frac{\partial}{\partial z} z^* = \frac{\partial}{\partial z} \left(a + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} \right) = 0$.

故 F 在 Ω' 内全纯.

四种 Schwarz 原理：

① 直线 → 直线

② 圆 → 圆

③ 直线 → 圆

④ 圆 → 直线.

幂级数全纯开拓

设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$，收敛半径为$R$，则$f$在 $D=\{|z|<R\}$上全纯.

定义：① 正则点：若 $\xi_0\in\partial D$，存在ξ_0的邻域 $B(\xi_0,\delta)$ 及其上的全纯函数 $g(z)$，使得 $f(z)=g(z)$，$\forall z\in D\cap B(\xi_0,\delta)$.

② 奇异点：若 $\xi_0\in\partial D$，ξ_0不是f的正则点，则称ξ_0为奇异点.

③ 若 f在D_1中全纯，g在D_2中全纯，且 $D_1\cap D_2\neq\phi$，

$g|_{D_1\cap D_2}=f|_{D_1\cap D_2}$，则记 $(f,D_1)\sim(g,D_2)$.

定理：在幂级数的收敛圆周上至少有一个奇异点，

证明：若 $C_R: |z|=R$ 的点都是正则点，则存在有限个点 $z_i \in C_R$

使 $$C_R \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(z_k, \delta_k)$$

与全纯函数 $f_i(z)$，使得

$$(f(z), D) \sim (f_i(z), B(z_i, \delta_i)), \quad D_i = B(z_i, \delta_i).$$

若 $D_i \cap D_j \neq \phi$，由于 $D_i \cap D_j \cap D$ 有公共部分，则

$$(f_i, D_i) \sim (f_j, D_j)$$

定义：$$g(z) = \begin{cases} f(z), & \forall z \in D \\ f_k(z), & \forall z \in D_k. \end{cases}$$

则 $g(z)$ 是 $\Omega = D \cup D_1 \cup D_2 \cdots \cup D_m$ 上的全纯函数.

由于 $\bar{D} = \{|z| \le R\} \subset \Omega$，$\Omega$ 开集.

则 $g(z)$ 是 $\Omega = D \cup D_1 \cup D_2 \cdots \cup D_m$ 上的全纯函数.

由于 $\overline{D} = \{|z| \le R\} \subset \Omega$, Ω 开集.

故存在 $\varepsilon > 0$, $\{|z| < R + \varepsilon\} \subset \Omega$.

故 $g(z)$ 在 $|z| < R + \varepsilon$ 可展开成幂级数, 与 R 是收敛半径矛盾.

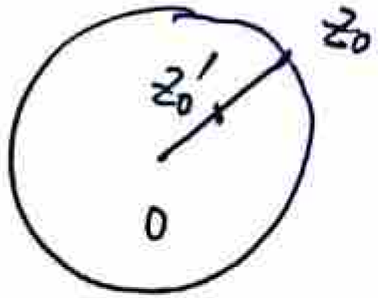
问题. 如何求幂级数在 $|z|=R$ 上奇异点?

① 若 $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$, 则 z_0 是奇异点.

② 若 $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|\neq\infty$, 如何判断?

将 $f(z)=\sum a_n z^n$ 在 z_0' 处展开,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0')}{n!}(z-z_0')^n$$



则收敛半径 $\rho\geq R-|z_0'|$.

若 $\rho>R-|z_0'|$, 则 $f(z)$ 在 z_0 处可解析开拓.

若 $\rho=R-|z_0'|$, 则 z_0 是 $f(z)$ 的奇异点.

原因：若 z_0 是 $f(z)=\sum a_n z^n$ 的正则点，则存在 $B(z_0,\delta)$，及函数 $g(z)$，使

全纯 $\left(f(z),\ B(0,R)\right) \sim \left(g(z),\ B(z_0,\delta)\right)$.

由于 $\left(\sum a_n z^n\right|_{B(z_0',\rho)} = \sum a_n' (z-z_0')^n \Big|_{B(z_0',\rho)}$，$a_n' = \dfrac{f^{(n)}(z_0')}{n!}$

$\rho = R-|z_0'|$

故 $\left(\sum a_n'(z-z_0')^n,\ B(z_0',\rho)\right) \sim \left(g(z),\ B(z_0,\delta)\right)$. $(*)$

另一方面，$\sum a_n'(z-z_0')^n$ 在 $|z-z_0'|=\rho$ 上至少有一个奇异点，而 $\partial B(z_0',\rho)\setminus\{z_0\}$ 上任何点都是正则点，故 z_0 是 $\sum a_n'(z-z_0')^n$ 的奇异点，

这与 $(*)$ 矛盾.

③ $f(z)$与$f'(z)$在$|z|=R$上有相同的正则点与奇异点。

④ $f(z)$在$|z|=R$上收敛/发散与正则/奇异无必然关系。

例: $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$，在$z=1$处发散，但$z=-1$是正则点。

$f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n}$ 在$z=1$处收敛，但$z=1$是正则点。

$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 在$z=1$处发散，$z=1$是奇异点。

$f(z)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{z^n}{n(n-1)}$，在$z=1$处收敛，且$z=1$是奇异点。

例：$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$ 在 $|z|=1$ 上每点都是奇异点.

证：① $z=1$ 是奇异点，只要证 $\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$.

$f(x)=x^2+x^4+x^8+\cdots x^{2^n}+\cdots > x^2+x^4+\cdots+x^{2^n}\to n$

n 任意，故 $\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$.

② $f(z)=z^2+\left((z^2)^2+(z^2)^4+(z^2)^8+\cdots\right)$

$=z^2+f(z^2)$

则 $z^2=1$ 的根是奇异点

③ $f(z)=z^2+z^4+f(z^4)$

则 $z^4=1$ 的根是奇异点.

类似地，对 $\forall n\in\mathbb{N}$，$z^{2^n}=1$ 的根都是奇异点，故 f 的奇异点集合在 $|z|=1$ 上稠密.

④ 若 $|z|=1$ 上有正则点，设为 z_0，则存在 δ，$\partial B(0,1)\cap B(z_0,\delta)$ 中的点都是正则点，与奇异点稠密矛盾.

例：设 $f(z)=\sum a_n z^n$ 而收敛半径为 R，$0<R<\infty$. 若 $a_n \geq 0$，则 $z=R$ 是奇异点.

证：① 若 $z=R$ 不是奇异点，则 f 在 $\frac{R}{2}$ 处展开而收敛半径 $\rho>\frac{R}{2}$

$$f(z)=\sum \frac{f^{(n)}(\frac{R}{2})}{n!}\left(z-\frac{R}{2}\right)^n$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(\frac{R}{2})|}{n!}}=\frac{1}{\rho}<\frac{2}{R}$$

$$f^{(n)}\left(\frac{R}{2}\right)=\sum_{m\geq n} m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)\,a_m\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^{m-n}$$

$$f'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots$$

故 $f^{(n)}(\frac{R}{2})\geq 0$.

② $\left|f^{(n)}\left(\frac{1}{2}Re^{i\theta}\right)\right| = \left|\sum_{m\geq n} m(m-1)\cdots(m-n+1)\, a_m\cdot\left(\frac{1}{2}e^{i\theta}R\right)^{m-n}\right|$

$$\leq f^{(n)}\left(\frac{R}{2}\right).$$

故 f 在 $\frac{1}{2}e^{i\theta}R$ 处展开

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(\frac{1}{2}Re^{i\theta}\right)}{n!}\left(z-\frac{1}{2}e^{i\theta}R\right)^n$$

而收敛半径.

$$\rho' = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{\left|f^{(n)}\left(\frac{R}{2}e^{i\theta}\right)\right|}{n!}}} \geq \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{f^{(n)}\left(\frac{1}{2}R\right)}{n!}}} = \rho > \frac{R}{2}.$$

故 $\partial B(0,R)$ 上任何点都是正则点, 矛盾.

例：设 $f(z)$ 在 $\Omega\setminus\{z_0\}$ 上全纯，$\Omega\supset\{|z|\le 1\}$，$|z_0|=1$。设 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点。求证：若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 是 $f(z)$ 在 $\{|z|<1\}$ 的展式，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=z_0.$$

证：① z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，故 $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$，$g(z_0)\neq 0$，$g$ 在 Ω 上全纯，

将 $g(z)$ 在 z_0 处展式成幂级数，故

$$f(z)=\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k}{(z-z_0)^k}+h(z),\quad A_m\neq 0,\quad \forall z\in\Omega.$$

且 $h(z)$ 在 Ω 上全纯。设 $h(z)$ 在 $z=0$ 处展式

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,\quad \forall z\in\mathbb{D},\quad \mathbb{D}=\{|z|<1\}.$$

② 求 $\frac{1}{(z-z_0)^k}$ 在 $z=0$ 处展式中 z^n 的系数 C_k.

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{-1}{z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{z_0}} = -\frac{1}{z_0}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\alpha}$$

两边求 $k-1$ 次导数.

$$(-1)(-2)\cdots(-k+1)\frac{1}{(z-z_0)^k} = -\frac{1}{z_0}\sum \underbrace{\frac{\alpha}{z_0}\cdot\frac{\alpha-1}{z_0}\cdot\cdots\cdot\frac{\alpha-(k-2)}{z_0}}_{k-1\text{个}}\cdot\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\alpha-(k-1)}$$

$$= -\frac{1}{z_0}\sum\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-2))}{z_0^{k-1}}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\alpha-k+1}$$

令 $\alpha-k+1=n$, $\alpha = n+k-1$.

故 z^n 的系数为 C_k:

$$C_k = \frac{1}{(-1)(-2)\cdots(-k+1)}\cdot\left(-\frac{1}{z_0}\right)\cdot(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+k-1-k+2)\cdot\frac{1}{z_0^{n+k-1}}$$

$$= \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\cdot\frac{(n+k-1)\cdots(n+2)(n+1)}{z_0^{n+k}}$$

③ $$a_n = \sum_{k=1}^{m} A_k C_k + b_n$$

$$= b_n + \sum_{k=1}^{m} A_k \cdot (-1)^k \cdot \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+2)(n+1)}{(k-1)!\, z_0^{n+k}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n + \sum_{k=1}^{m} A_k \cdot (-1)^k \cdot \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+2)(n+1)}{(k-1)!\, z_0^{n+k}}}{b_{n+1} + \sum_{k=1}^{m} A_k \cdot (-1)^k \cdot \frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+2)(n+1)}{(k-1)!\, z_0^{n+k+1}}} \quad (*)$$

设 $m=1$.

$$(*)式 = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n - A_1 \frac{1}{z_0^{n+1}}}{b_n - A_1 \cdot \frac{1}{z_0^{n+2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n z_0^n - \frac{A_1}{z_0}}{b_n z_0^n - \frac{A_1}{z_0^2}}$$

分母是b｛n+1｝

(由于 $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 在 z_0 收敛，故 $\lim_{n\to\infty} b_n z_0^n = 0$.

故 $(*)$式 $= z_0$.

黎曼映照

问题：当开集 Ω 满足什么条件时，存在共形 $F: \Omega \to \mathbb{D}$，$\mathbb{D} = \{|z|<1\}$？

例：若 $\Omega = \mathbb{C}$，则不存在共形 $F: \Omega \to \mathbb{D}$

定理（Hurwitz）

设 ① $f_n(z)$ 在区域 D 中全纯，在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$，$f(z)$ 不恒为 0.

② γ 闭，不经过 $f(z)$ 的零点

则存在 N，当 $n \geq N$ 时，f_n 与 f 在 γ 内部零点个数相同.

定理(Hurwitz)

设① $f_n(z)$ 在区域 D 中全纯，在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$，$f(z)$ 不恒为 0.

② γ 闭，不经过 $f(z)$ 的零点

则 存在 N，当 $n \geq N$ 时，f_n 与 f 在 γ 内部零点个数相同.

证：由② $\delta := \min\limits_{\gamma} |f(z)| > 0$.

当 n 充分大时 $\max\limits_{\gamma} |f_n(z) - f(z)| < \delta$.

故 $\forall z \in \gamma$，有 $|f_n(z) - f(z)| < |f(z)|$

由 Rouché 定理知 f_n 与 f 在 γ 内部零点个数相同.

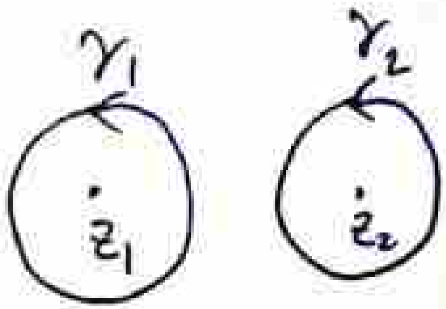
定理：若 ① f_n 在区域D中全纯单叶.

② f_n 内闭一致收敛到 $f(z)$, $f(z)$ 非常数.

则 $f(z)$ 在D中单叶全纯.

证：$f(z)$ 全纯显然. 下证 $f(z)$ 单叶.

若 $w_0=f(z_1)=f(z_2)$, 则当 n 大时, 在 γ_1 与 γ_2 内部



$f_n(z)-w_0$ 与 $f(z)-w_0$ 的零点个数相同, 即存在

z_1' 在 γ_1 内部, z_2' 在 γ_2 内部, 使

$$f_n(z_1')=w_0,\quad f_n(z_2')=w_0$$

与 f_n 单叶矛盾.

问题：全纯函数"有界" ⇒ "子列收敛"？（Montel定理）

定义：设 $F=\{f_n\}$ 为 D 上一簇函数列.

① F 称为内闭一致有界，若对任何紧集 $K\subset D$，$\exists M=M(K)>0$，使 $\forall n\in\mathbb{N}$，$\forall z\in K$，有 $|f_n(z)|\le M$.

② F 称为内闭等度连续，若对任何紧集 $K\subset D$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon,K)>0$ 使当 $|z_1-z_2|<\delta$ 时，有 $|f_n(z_1)-f_n(z_2)|<\varepsilon$.

Arzela-Ascoli：设 $K\subset\mathbb{C}$ 是紧集，若 $\{f_n\}$ 在 K 上一致有界，且等度连续，则 $\{f_n\}$ 在 K 上有子列一致收敛到连续函数 $f(z)$.

Montel定理：设 $\{f_n(z)\}$ 在区域 D 中全纯，且在 D 中内闭一致有界，则存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 D 中内闭一致收敛.

证明：① 设 $K \subset\subset D$ 为 D 中紧集，则 $\{f_n\}$ 在 K 中一致有界.

下证 $\{f_n\}$ 在 K 上等度连续.

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f_n(\xi)\left(\frac{1}{\xi - z_1} - \frac{1}{\xi - z_2}\right)d\xi\right|$$

$$= \left|\frac{z_1 - z_2}{2\pi}\int_\gamma \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z_1)(\xi - z_2)}d\xi\right|$$

$$\leq \frac{|z_1 - z_2|}{2\pi}\cdot\frac{M}{r\cdot r}\cdot C\cdot r \leq \frac{C}{r}M|z_1 - z_2|. \quad (*)$$

设 $r>0$ 满足 $B(z, 3r) \subset \Omega$，$\forall z \in K$.

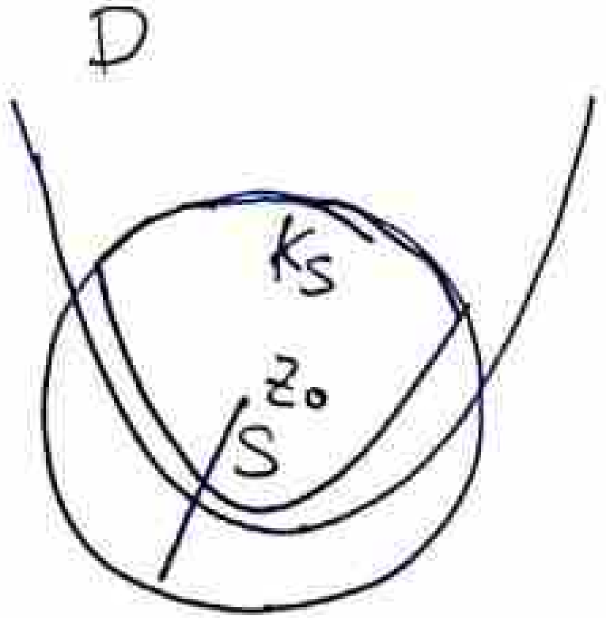
故由 $(*)$ 知 f 在 K 上等度连续.

② 下证：存在一列紧集 $\{K_s\}_{s=1}^{\infty}$ 使得 $K_s \subseteq K_{s+1}$ 且 $D = \bigcup_{s=1}^{\infty} K_s$.

证：固定 $z_0 \in K$，令

$$K_s = \{ z \in D \cap \overline{B(z_0, s)} \mid d(z, \partial D) \geq \frac{1}{s} \}.$$

则 $K_s \subset K_{s+1} \subset \cdots$ 且 D 中任何紧集都包含在某个 K_s 上.



③ 定理证明：

$\{f_n\}$ 在 K_1 上一致有界 $\Rightarrow$ 存在子列 $\{f_{n,1}(z)\}$ 在 K_1 上一致收敛.

$\{f_{n,1}(z)\}$ 在 K_2 上一致有界 $\Rightarrow$ 存在子列 $\{f_{n,2}(z)\}$ 在 K_2 上一致收敛.

$\{f_{n,2}(z)\}$ 在 K_3 上一致有界 $\Rightarrow$ 存在子列 $\{f_{n,3}(z)\}$ 在 K_3 上一致收敛.

…… ……

根据构造：(3.1) $\{f_{n,s}\}$ 在 K_s 上一致收敛.

(3.2) $\{f_{n,s+1}\}$ 是 $\{f_{n,s}\}$ 的子列，即 $\{f_{n,s+1}\} \subseteq \{f_{n,s}\}$，$\forall s$

(3.3) $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 去掉有限项 $\{f_{1,1}, f_{2,2} \cdots f_{s-1,s-1}\}$ 后是 $\{f_{n,s}\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列.

故 $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 在任何 K_s 上一致收敛，即在 D 上内闭一致收敛.

黎曼映照定理：设 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$，且单连通，则 Ω 与 $\mathbb{D}$ 全纯同构，即对任何 $z_0 \in \Omega$，存在唯一的共形映射 $F: \Omega \to \mathbb{D}$，使得

$$F(z_0)=0, \quad F'(z_0)>0$$

推论：若 $\Omega_1, \Omega_2 \subsetneq \mathbb{C}$，$\Omega_1, \Omega_2$ 单连通，则 Ω_1, Ω_2 共形等价。

定理证明思路：

① 考虑集合 $\mathcal{F}=\{$全纯 $f: \Omega \to \mathbb{D} \mid f(z_0)=0$，$f$ 单叶$\}$

则 $\mathcal{F}$ 非空，一致有界。

② 存在 $\mathcal{F}$ 中元素 f，使 $|f'(z_0)|$ 取到最大，则 f 是 $\Omega \to \mathbb{D}$ 的全纯同构。

Riemann定理证明：

① 要证：设 Ω 与 $\mathbb{C}$ 单连通，则存在 $G\subseteq\mathbb{D}$，$0\in G$，使得 G 与 Ω 全纯同构，且将 $z_0\to 0$。

证明：设 $\alpha\in\mathbb{C}$，$\alpha\notin\Omega$，令 $g(z)=\log(z-\alpha)$，则 g 在 Ω 上有单值分支。

(1.1) g 在 Ω 上单叶：若 $z_1, z_2\in\Omega$，$g(z_1)=g(z_2)$，则

$$e^{g(z_1)}=e^{g(z_2)},\quad\Rightarrow\quad z_1-\alpha=z_2-\alpha$$

故 $z_1=z_2$.

(1.2) 令 $w_0=g(z_0)$，则 $w_0+2\pi i\notin g(\Omega)$.

令 $\tilde{w}_0=w_0+2\pi i$，若 $\tilde{w}_0\in g(\Omega)$，则存在 $\tilde{z}_0\in\Omega$，使 $g(\tilde{z}_0)=\tilde{w}_0$.

从而 $g(\tilde{z}_0)=w_0+2\pi i=g(z_0)+2\pi i$，

$$e^{g(\tilde{z}_0)}=e^{g(z_0)}\quad\Rightarrow\quad\tilde{z}_0=z_0\quad 矛盾.$$

(1.3) 存在 $\delta>0$，$B(\tilde{w}_0,\delta)$ 不在 g 的值域中，即 $B(\tilde{w}_0,\delta)\cap g(\Omega)=\phi$.

否则存在 $z_n\in\Omega$，$g(z_n)\to\tilde{w}_0$.

$$z_n-\alpha=e^{g(z_n)}\to e^{\tilde{w}_0}=e^{w_0}=z_0-\alpha$$

故 $z_n\to z_0$，从而 $g(z_n)\to g(z_0)=w_0\neq\tilde{w}_0$ 矛盾.

(1.4) 令 $f(z)=\dfrac{1}{g(z)-\tilde{w}_0}$，因为 $|g(z)-\tilde{w}_0|\geq\delta$，$(\forall z\in\Omega)$

故 $f(z)$ 在 Ω 上有界，定义 $\hat{f}(z)=f(z)-f(z_0)$，则 $\hat{f}(z_0)=0$.

且 $|\hat{f}(z)|\leq C$，$\forall z\in\Omega$.

令 $h(z)=\dfrac{1}{2C}\hat{f}(z)$，则 $h(z_0)=0$，$|h(z)|<1$，$\forall z\in\Omega$.

故 $h(z)$ 满足要求.

② 由①，只要考虑 $0\in\Omega$，$\Omega\subset\mathbb{D}$ 中情形定义：

$\mathcal{F}=\{$单叶全纯 $f:\Omega\to\mathbb{D}\mid f(0)=0\}$

则 $\mathcal{F}$ 非空（由①恒等映射）

$\mathcal{F}$ 一致有界.

②.1 $\forall f\in\mathcal{F}$，$|f'(0)|$ 有一致上界.

证：由于 $0\in\Omega$，存在 $\delta>0$，使 $B(0,\delta)\subset\Omega$.

由 Cauchy 不等式，$|f'(0)|\le\frac{1}{\delta}$，$\forall f\in\mathcal{F}$

(2.2) 设 $\lambda = \sup\limits_{f\in\mathcal{F}} |f'(0)|$，则存在 $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n'(0)| = \lambda$.

由 Montel 定理，$\{f_n\}$ 有子列内闭一致收敛到 f_∞ 全纯.

- f_∞ 不为常数，因为 $|f_\infty'(0)| = \lambda \neq 0$，$f_\infty(0) = 0$.
- $|f_\infty(z)| < 1$，$\forall z \in \Omega$. 这是因为 $|f_\infty(z)| \le 1$.

由最大模原理，若 $\exists z_1 \in \Omega$，$|f_\infty(z_1)| = 1$，则 f_∞ 为常数.

- $f_\infty(z)$ 为单叶函数，这是因为 f_n 单叶，内闭一致收敛到 f_∞.

故 $f_\infty(z)$ 为 $G \to f_\infty(G)$ 的全纯同构，且 $f_\infty \in \mathcal{F}$.

(2.3) 下证 $f_\infty(G)=\mathbb{D}$.

(想法：若 $f_\infty(G)\neq\mathbb{D}$，要构造 $F\in\mathcal{F}$，使 $|F'(0)|>|f_\infty'(0)|$ 矛盾)

证：若 $f_\infty(G)\neq\mathbb{D}$，则存在 $\alpha\in\mathbb{D}$，$\alpha\notin f_\infty(G)$.

令 $\gamma_\alpha(z)=\dfrac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z}$，$\mathbb{D}\to\mathbb{D}$
$\alpha\to 0$.

则 $\gamma_\alpha\circ f_\infty: G\to\gamma_\alpha\circ f_\infty(G)$ 是全纯同构，且満足

① $\gamma_\alpha\circ f_\infty(G)$ 是单连通的

② $\gamma_\alpha\circ f_\infty(G)$ 不包含 0.

定义：$R(z)=\sqrt{\gamma_\alpha\circ f_\infty(z)}$，$\forall z\in G$.

由于①,② 知 $R(z)$ 在 G 上有单值分支，且在 G 上单叶.

单叶原因：若 $R(z_1)=R(z_2)$，则 $f_\infty(z_1)=f_\infty(z_2)$，$\Rightarrow z_1=z_2$.

令 $\beta = \sqrt{\alpha}$, $\quad \varphi_\beta(z) = \dfrac{\beta - z}{1 - \bar{\beta} z}$, $\quad \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $\beta \to 0$.

定义:

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{R} & \mathbb{D} & \xrightarrow{\varphi_\beta} & \mathbb{D} \\ 0 & \longrightarrow & \beta & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

令 $F(z) = \varphi_\beta \circ R(z)$: $G \to \mathbb{D}$ 单叶, 全纯.

$$= \varphi_\beta \circ S \circ \varphi_\alpha \circ f_\infty(z).$$

其中 $S(w) = \sqrt{w}$.

故 $f_\infty(z) = \underbrace{\varphi_\alpha^{-1} \circ S^{-1} \circ \varphi_\beta^{-1}}_{T} \circ F(z) = T \circ F(z)$

故 $f_\infty(z) = \underbrace{\gamma_\alpha^{-1} \circ S^{-1} \circ \gamma_\beta^{-1}}_{T} \circ F(z) = T \circ F(z)$

注意 $S^{-1}(z) = z^2 : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 是全纯函数，故 T 全纯.

$T: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 全纯，在 $\mathbb{D}$ 上不是单叶函数，且 $T(0) = 0$.

由 Schwarz 引理，$|T'(0)| < 1$. 从而

$\lambda = |f_\infty'(0)| = |T'(0)| \cdot |F'(0)| < |F'(0)|$.

与 λ 的定义矛盾.

③ 设 $G' \subsetneq \mathbb{C}$ 为一般的单连通，$K: G' \to G \subseteq \mathbb{D}$ 为①中所构造的共形映射，则

$$G' \xrightarrow{K} G \xrightarrow{f_\infty} \mathbb{D}$$

则 $f_\infty \circ K: G' \to \mathbb{D}$ 为 G' 到 $\mathbb{D}$ 的共形映射，且 $f_\infty \circ K(z_0) = 0$.

令 $F = f_\infty \circ K$. $F'(z_0) = r_0 e^{i\theta_0}$，则令 $f(z) = e^{-i\theta_0} F(z)$，

则 $f(z_0) = 0$，$f'(z_0) > 0$. 满足定理条件.

④ 唯一性：若 $f: G \to \mathbb{D}$ 是全纯同构，且 $f(z_0)=0$，$f'(z_0)>0$，

则 f 是唯一的。

证：若 $f_1, f_2: G \to \mathbb{D}$ 都满足上述条件。

令 $F(w) = f_2 \circ f_1^{-1}(w): \mathbb{D} \to \mathbb{D}$，$0 \to 0$

则 $F: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 全纯，且 $F(0)=0$，故 $|F(w)| \le |w|$，$|F'(0)| \le 1$。

又因为 $F^{-1}: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$，$0 \to 0$。故 $|(F^{-1})'(0)| \le 1$。

从而 $|F'(0)| = 1$，$F(w) = e^{i\theta} w$. $(w \in \mathbb{D})$.

从而 $f_2(z) = e^{i\theta} f_1(z)$.

由初始条件知 $\theta = 0$，从而 $f_1(z) = f_2(z)$，$(\forall z \in \mathbb{D})$.

说明：若 U, V 共形等价，且 U 单连通，则 V 单连通。

若 U 单连通，且 f 在 U 上全纯，则 $f(U)$ 不一定单连通。

例：$\mathbb{H} = \{ \operatorname{Im} z > 0 \}$，$f(z) = e^{2\pi i z}$

则 $f(z) = e^{2\pi i (x+iy)} = e^{-2\pi y} e^{2\pi i x}$

从而 $\begin{cases} r = e^{-2\pi y}, & y > 0 \\ \theta = 2\pi x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$

即 $f(\mathbb{H}) = \{ (r, \theta) \mid \theta \in \mathbb{R},\ 0 < r < 1 \}$ 不是单连通的。

边界对应.

定理：设 $F: \mathbb{D} \to P$（P 为一闭多边形）是共形映射，则

① F 可连续延拓到边界，成为 $\overline{\mathbb{D}} \to \overline{P}$ 而双射

② F 为 $\partial \mathbb{D} \to \partial P$ 的双射.

证：① 若 $f: U \to f(U)$ 为共形，则 $\text{Area}(f(U)) = \iint_U |f'(z)|^2 dxdy$

证明：令 $f: (x,y) \to (u,v)$

则面积 $\text{Area}(f(U)) = \iint_{f(U)} dudv = \iint_U \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} dxdy$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

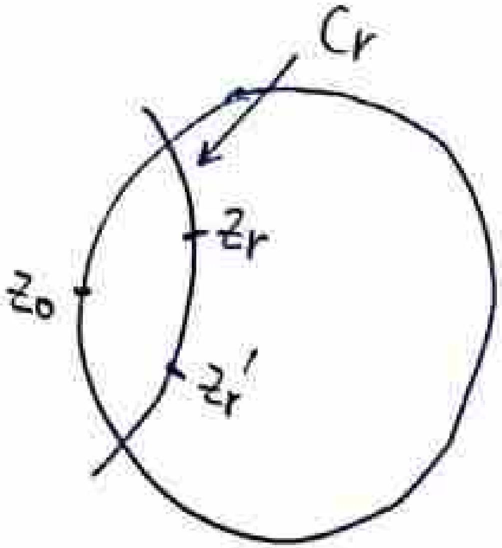
$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 = \left|\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)\right|^2$$

$$= \frac{1}{4}\left|\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|^2$$

$$= \left|\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

② 设 $\rho(r) = \sup\limits_{z,w \in C_r} |f(z) - f(w)|$，则存在 $r_n \to 0$，使

$\lim\limits_{n\to\infty} \rho(r_n) = 0$，其中 $C_r = \{ z \mid \underset{z\in D}{|z - z_0| = r} \}$，$z_0 \in \partial D$，



证. 否则，存在 $\varepsilon_0 > 0$，$R > 0$，使 $\rho(r) \geq \varepsilon_0 > 0$

$$|f(z_r) - f(z_r')|$$

$$= \left| \int_\gamma f'(\xi)\, d\xi \right| ,\quad \xi = z_0 + re^{i\theta}$$

$$\leq \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |f'(z_0 + re^{i\theta})| \, r \, d\theta.$$

故 $$\rho(r) \leq \left| \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |f'(z)| \, r \, d\theta \right|$$

$$\leq \left(\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |f'(z)|^2 r \, d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} r \, d\theta \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\rho(r)^2}{r} \leq 2\pi \cdot \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |f'(z)|^2 r \, d\theta$$

$$\varepsilon_0^2 \int_0^R \frac{dr}{r} \leq \int_0^R \frac{\rho(r)^2}{r} dr \leq 2\pi \int_0^R \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |f'(z)|^2 r \, d\theta \, dr$$

$$= 2\pi \iint_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \, dx\, dy$$

$$= 2\pi \operatorname{Area}(f(\mathbb{D})).$$

但左边 $= \varepsilon_0^2 (\log R - \log 0)$

$= +\infty$ 矛盾.

③ 设 $z_0 \in \partial D$, 则 $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D}} f(z)$ 存在.

③'

证: 否则, 取 $z_i \to z_0$, $z_i' \to z_0$, 使 $f(z_i) \to \xi$, $f(z_i') \to \xi'$, $(\xi \neq \xi')$

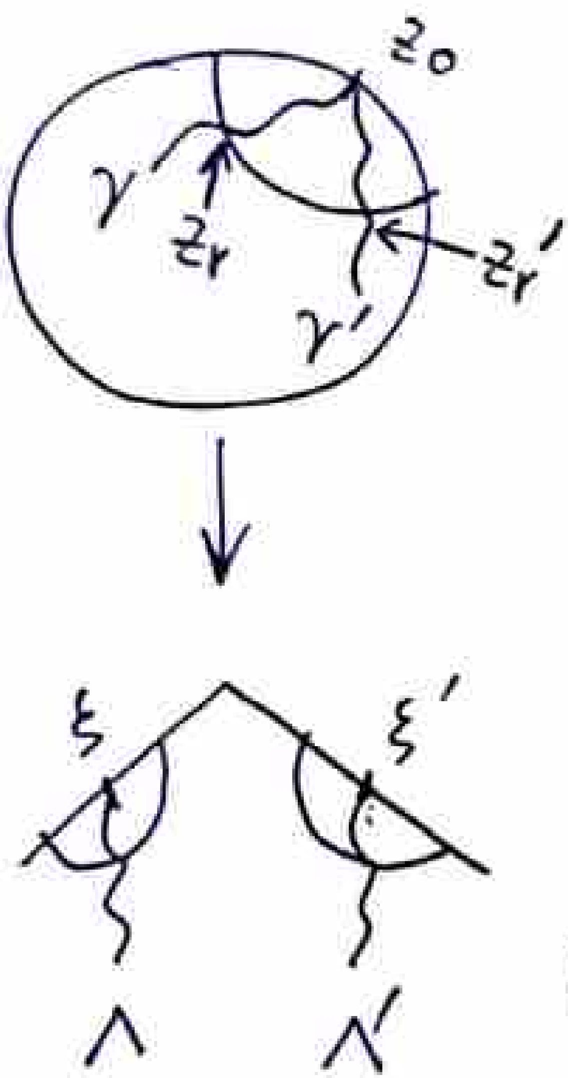
则 $\xi, \xi' \in \partial P$.

原因: 若 ξ 在 P 内部, 由 $f(z_i) \to \xi \in P$, f 共形, 故

$$z_i = f^{-1}(f(z_i)) \to f^{-1}(\xi) \in D$$

即 $z_i \to f^{-1}(\xi) \in D$, 与 $z_0 \in \partial D$ 矛盾.

③.2 令 $d=|\xi-\xi'|$. 取 δ 小，使 $B(\xi,\delta)\cap B(\xi',\delta)=\phi$.



取连续曲线 Λ, Λ', 使 $f(z_i)\in\Lambda$, $f(z_i')\in\Lambda'$ (当n大时)

令 $\gamma=f^{-1}(\Lambda)$, $\gamma'=f^{-1}(\Lambda')$

由于 $z_i\in\gamma$, $z_i\to z_0$

$z_i'\in\gamma'$, $z_i'\to z_0$

对小r, C_r 与 γ, γ' 都相交，设交点为 z_r, z_r'

由②知 $|f(z_r)-f(z_r')|\to 0$.

但 $f(z_r)\in\Lambda$, $f(z_r')\in\Lambda'$, Λ 与 Λ' 不交，矛盾.

④ $f: \bar{D} \to \bar{P}$ 连续.

证：定义：$\forall z_0 \in \partial D$, $f(z_0) = \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D}} f(z)$.

只需证：若 $z_0' \in \partial D$, $|z_0 - z_0'| < \delta$, 则

$$|f(z_0') - f(z_0)| < \varepsilon.$$

由定义，$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall z \in D \cap B(z_0, 2\delta)$, $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

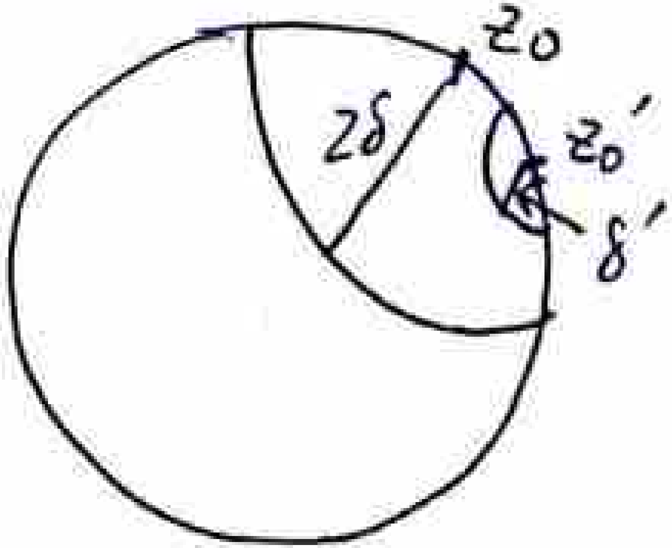
若 $z_0' \in \partial \mathbb{D}$，$|z_0' - z_0| < \delta$，则存在 $\delta' > 0$，使 $\forall z \in \mathbb{D} \cap B(z_0', \delta')$

有 $|f(z) - f(z_0')| < \varepsilon$.

故取 $w \in (B(z_0', \delta') \cap \mathbb{D}) \subset (B(z_0, 2\delta) \cap \mathbb{D})$ 有

$$|f(z_0') - f(z_0)| \le |f(z_0') - f(w)| + |f(w) - f(z_0)|$$

$$\le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$



⑤ 设 $f: D \to P$ 的反函数为 $g: P \to D$，则 g 可延拓为 $\overline{P} \to \overline{D}$ 的连续函数.

下证：f 与 g 延拓后仍为反函数. 即证 $\forall z \in \overline{D}$，$g(f(z)) = z$.

原因：设 $z_0 \in \overline{D}$，$z_k \to z_0$，$z_k \in D$.

$$g(f(z_k)) = z_k$$

令 $k \to \infty$，由 g 与 f 的连续性知 $g(f(z_0)) = z_0$.

同理可证 $\forall w \in \overline{P}$，$f(g(w)) = w$.

说明：上述定理可推广到 $f: \mathbb{D}\to\Omega$ 情形，其中 Ω 是单连通的，

且边界满足条件：

$\forall \alpha\in\partial\Omega$，任何给定 $z_n\in\Omega$，$z_n\to\alpha$，存在连续曲线 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$，

使 $\gamma(b)=\alpha$，$\gamma(t)\in\Omega\ (t\neq b)$，且 $\exists\, t_n\in[a,b]$，使 $\gamma(t_n)=z_n$，

$a<t_1<t_2<\cdots<b$，$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = b$.

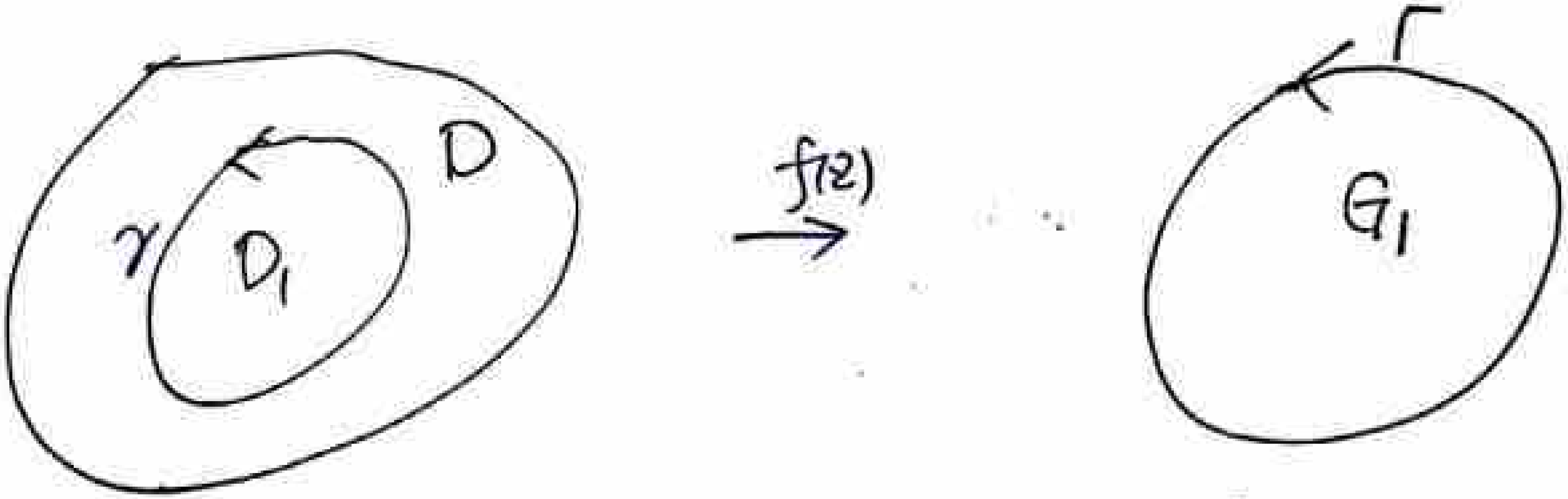
例：$\Omega = \left((0,1)\times(0,1)\right) \setminus \left(\bigcup\limits_{n=2}^{\infty} \{\tfrac{1}{n}\}\times(0,\tfrac{1}{2}]\right)$

单连通，但不满足上述条件.

例：$\Omega = \mathbb{D}\setminus\{x \mid 0\le x<1\}$ 而边界点 $\{0<x\le 1\}$

不满足条件.

定理：设简单闭 $\gamma \subset D$，γ 内部 $D_1 \subset D$. 若 $f(z)$ 在 D 上全纯，且将 γ 双方单值映为简单闭 Γ，则 $f(z)$ 在 D_1 内单叶，且将 D_1 映为 Γ 的内部 G_1，将 γ 的正定向映为 Γ 的正定向.



证明：由辐角原理，$\forall w_0 \notin \Gamma$，$f(z)-w_0$ 的零点个数为

$$N=\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \mathrm{Arg}(f(z)-w_0).$$

若 w_0 在 Γ 外，则 $N=0$，即 $f(z)=w_0$ 在 γ 内无解

若 w_0 在 Γ 内部，则 $N=\pm 1 \Rightarrow N=1$. 故 f 将 γ 正定向映为 Γ 正定向

故 $G_1 \subseteq f(D_1)$.

若 $w_0 \in \Gamma$，若 $f(z)=w_0$ 在 γ 内部有根 $z_0 \in D_1$，

由于 f 是开映射，$f(z)$ 将 z_0 邻域映为 w_0 邻域 V.

但 V 有一部分在 Γ 外，这与 Γ 外无像点矛盾.

故 $f(D_1) \subseteq G_1$.

综上 $f(D_1) = G_1$.

整函数.

调和函数：$u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$

平均值公式：若 u 在 $B(z_0, R)$ 内调和，则

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta.$$

Jensen 公式：

定理：设 ①：$\Omega \supset \overline{B(0,R)} = \{z \mid |z| \le R\}$，$f$ 在 Ω 中全纯，$f(0) \neq 0$.

f 在 $\{|z| = R\}$ 上无零点.

② f 在 $B(0,R)$ 内的零点为 $z_1, \cdots z_N$.（可以重复）

则 $$\log|f(0)| = \sum_{k=1}^{N} \log\frac{|z_k|}{R} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\,d\theta.$$

证明：① 若定理对 f_1, f_2 成立，则对 $f_1 f_2$ 成立.

② 令 $g(z) = \dfrac{f(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_N)}$，则 g 在 $\overset{B(0,R)}{\Omega}$ 内无零点，且全纯

由①，只要证对 $g(z)$ 与 $z-z_i$ 成立即可.

③ $g(z)$ 在 $\overline{B(0,R)}$ 全纯，且无零点，故有

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(e^{i\theta}R)|\, d\theta \quad (*)$$

原因：$h(z) = \log g(z)$ 在 $\Omega' \supset B(0,R)$ 中全纯，

故 $\operatorname{Re} h(z) = \log|g(z)|$ 在 Ω' 中调和，故 $(*)$ 成立.

④ 固定 $w \in B(0,R)$，则 $f(z) = z-w$ 满足.

$$\log|w| = \log\frac{|w|}{R} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|Re^{i\theta}-w|\,d\theta \quad (**)$$

证：(**) $\Leftrightarrow$ $\log|w| = \log|w| - \log R + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|e^{i\theta}-\frac{w}{R}\right|d\theta + \log R$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|e^{i\theta}-\frac{w}{R}\right|d\theta = 0$$

故只需证对 $|a|<1$ 时有

$$\int_0^{2\pi}\log|e^{i\theta}-a|\,d\theta = 0, \quad (***)$$

左边 $= \int_0^{2\pi}\log|1-ae^{-i\theta}|\,d\theta$

$\overset{\theta\to-\theta}{=} \int_0^{-2\pi}\log|1-ae^{i\theta}|\,d\theta$

$\overset{\theta\to\theta+2\pi}{=} \int_{2\pi}^{0}\log|1-ae^{i\theta}|\,d\theta$

故 (***) $\Leftrightarrow$ $\int_0^{2\pi}\log|1-ae^{i\theta}|\,d\theta = 0.$

故 $(***) \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \log|1-ae^{i\theta}|\,d\theta = 0.$

令 $F(z)=1-az$，则 $F(z)$ 在 $\overline{B(0,1)}$ 上全纯，且无零点，故

$$\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(e^{i\theta})|\,d\theta$$

即 $$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|1-ae^{i\theta}|\,d\theta.$$

证明2：设 $a\in\mathbb{D}$，定义：

$$B_a(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z},\quad \mathbb{D}\to\mathbb{D}$$

则 ① 当 $|z|=1$ 时，$|B_a(z)|=1$.

② $B_a(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 中有唯一的一阶零点 $z=a$.

令
$$g(z)=\frac{f(z)}{\prod_{j=1}^{K}B_{\frac{z_j}{R}}\left(\frac{z}{R}\right)}$$

则 $g(z)$ 在 $\overline{B(0,R)}$ 中全纯，且无零点.

当 $z=z_j$ 时，$B_{\frac{z_j}{R}}\left(\frac{z_j}{R}\right)=0$

当 $|z|=R$ 时，$\left|B_{\frac{z_j}{R}}\left(\frac{z}{R}\right)\right|=1$.

代入 $\log|g(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(Re^{i\theta})|\,d\theta$.

得
$$\log\left|\frac{|f(0)|}{\prod_{j=1}^{K}\left(-\frac{z_j}{R}\right)}\right|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\,d\theta.$$

定义：$n(r)$：为全纯函数 $f(z)$ 在 $B(0,r)$ 中的零点个数（包含重数）、

引理：在上述定理条件下，若 $z_1, \cdots z_N$ 为 f 在 $B(0,R)$ 内的根，则

$$\int_0^R n(r)\frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^{N} \log \frac{R}{|z_k|}$$

推论：在上述定理条件下，有

$$\log|f(0)| = -\int_0^R n(r)\frac{dr}{r} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\,d\theta.$$

引理：定义 $\eta_k(r) = \begin{cases} 1, & 若\ r > |z_k| \\ 0, & 若\ r \leq |z_k| \end{cases}$.

若 $B(0,r)$ 包含 z_k，则 $\eta_k(r)$ 取值为 1. 若 $B(0,r)$ 不包含 z_k，则 $\eta_k(r)$ 取值为 0. 故 $B(0,r)$ 中 f 的零点个数为 $\sum_{k=1}^{N} \eta_k(r) = \eta(r)$.

注意. $\int_{|z_k|}^{R} \frac{dr}{r} = \int_0^R \eta_k(r) \frac{dr}{r}$.

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{|z_k|}^{R}\frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^{N}\int_{0}^{R} n_k(r)\frac{dr}{r}$$

$$\|$$

$$\sum_{k=1}^{N}\log\frac{R}{|z_k|} \qquad = \int_{0}^{R}\sum_{k=1}^{N} n_k(r)\frac{dr}{r} = \int_{0}^{R} n(r)\frac{dr}{r}$$

$$\|$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\log\frac{|z_k|}{R}.$$

故 $\displaystyle\int_{0}^{R} n(r)\frac{dr}{r} = -\log|f(0)| + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\,d\theta. \geq 0.$

定义：设 f 是一个整函数，若存在 ρ，$A, B > 0$，使得

$$|f(z)| \leq A e^{B|z|^\rho}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

则称 f 的增长次数 $\leq \rho$，定义 $\rho_f = \inf \rho$.

例：e^{e^z}，$\rho_f = +\infty$

e^{z^m}，$\rho_f = m$.

定理：设 f 为整函数，增长阶数 $\leq \rho$，则

① $n(r) \leq C r^{\rho}$，（当 r 大时）

② 若 f 的零点为 $z_1, z_2, \cdots z_n, \cdots$，所有 $z_k \neq 0$，则 $\forall s > \rho$ 有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^s} < +\infty$$

证明：① 可设 $f(0) \neq 0$，否则令 0 为 f 的 N 阶零点，令 $g(z) = \dfrac{f(z)}{z^N}$

则 $g(z)$ 为整函数，且 $n_g(r) = n_f(r) - N$ 相差一常数.

设 $f(0) \neq 0$，$\displaystyle\int_0^R n(r) \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \, d\theta - \log |f(0)|$

令 $R=2r$,

$$\int_r^{2r} n(x)\frac{dx}{x} \geq n(r)\int_r^{2r}\frac{dx}{x} = n(r)\left(\log(2r)-\log r\right)$$

$$= \log 2 \cdot n(r)$$

$$\int_r^{2r} n(x)\frac{dx}{x} \leq \int_0^{2r} n(x)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(Re^{i\theta})\right| d\theta - C.$$

由于 f 的增长次数 $\leq \rho$, 故 $|f(z)| \leq A e^{B|z|^{\rho}}$.

故 $$\log 2 \cdot n(r) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|Ae^{Br^{\rho}}\right| d\theta - C$$

$$\leq c\cdot r^{\rho} - C.$$

$$\Rightarrow n(r) \leq c\cdot r^{\rho}, \quad (r\text{ 大时})$$

② $$\sum_{|z_k|\geq 1} |z_k|^{-s} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{2^j \leq |z_k| \leq 2^{j+1}} |z_k|^{-s} \right)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-js}\, n(2^{j+1})$$

$$\leq C \cdot \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-js} \cdot 2^{(j+1)\rho}$$

若 $\rho < s$.
$$\leq C \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (2^{\rho - s})^{j} < +\infty$$

定理：设 f 是 $D=\{|z|<1\}$ 中非常值有界全纯函数，零点为 $a_1, a_2, \cdots$ (可重复)，则 $\sum_{j=1}^{\infty}(1-|a_j|)<\infty$.

证明：设 $f(0)\neq 0$，取 $r<1$ 接近于 1，使 $|a_j|\neq r$，在 $\overline{B(0,r)}$ 上用 Jensen 公式有

$$\log|f(0)|+\sum_{j=1}^{n(r)}\log\left|\frac{r}{a_j}\right|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta.$$

令 $r\to 1^-$，有：

$$\sum_{j=1}^{\infty}\log\frac{1}{|a_j|}\leqslant \log M-\log|f(0)|.$$

$\forall\ \alpha\in(0,1)$，

$$\begin{aligned}\log\frac{1}{\alpha}=-\log\alpha&=-\log(1-(1-\alpha))\\&=(1-\alpha)+\frac{1}{2}(1-\alpha)^2+\frac{1}{3}(1-\alpha)^3+\cdots\\&>1-\alpha.\end{aligned}$$

故 $\sum_{j=1}^{\infty}(1-|a_j|)<+\infty$.

说明：若f在$|z|=R$上有零点，则Jensen公式仍成立.

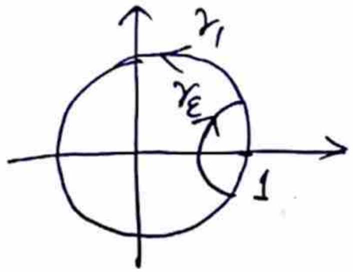
只要证：若$|a|=1$，则 $\int_0^{2\pi}\log|1-ae^{i\theta}|\,d\theta=0$.

设 $a=e^{i\alpha}$，则上式 $\Leftrightarrow \int_0^{2\pi}\log|1-e^{i(\theta+\alpha)}|\,d\theta=0$

$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi}\log|1-e^{i\theta}|\,d\theta=0$.

由于 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \log|1-e^{i\theta}|\,d\theta = \mathrm{Re}\left(\int_{\partial\mathbb{D}} \log(1-z)\frac{dz}{iz}\right)$

当 $\mathrm{Re}\, z<1$ 时, $\dfrac{\log(1-z)}{iz}$ 全纯. 故



$$\left(\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_\varepsilon}\right)\frac{\log(1-z)}{iz}\,dz = 0.$$

γ_ε: $z=1+\varepsilon e^{i\theta}$, θ: $\frac{3}{2}\pi \to \frac{\pi}{2}$

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{\log(1-z)}{iz}\,dz\right| \le \left|\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\log(-\varepsilon e^{i\theta})|}{i(1+\varepsilon e^{i\theta})}\cdot \varepsilon i e^{i\theta}\,d\theta\right|$$

$$\le C\cdot\varepsilon\left(|\log\varepsilon| + C\right) \to 0 \quad (\varepsilon\to 0).$$

故 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\log(1-z)}{iz}\,dz = 0.$

说明：整函数 ρ_f 可以不是整数.

$$\cos(z^{\frac{1}{2}}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!}$$

$$\left|\cos(z^{\frac{1}{2}})\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(2n)!} \leq e^{|z|^{\frac{1}{2}}}$$

故 $\rho_f \leq \frac{1}{2}$ 不是整数.

例：$f(z) = \sin \pi z$, $\quad f(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right)$

$|f(z)| \leq e^{\pi|z|} \qquad \rho_f \leq 1.$

$z = ix$, $\quad f(ix) = \frac{1}{2i}\left(e^{-\pi x} - e^{\pi x}\right)$ 知 $\rho_f = 1.$

$f(z)$ 的零点为 $z_n = n$, 故 $\sum\limits_{n \neq 0} \frac{1}{|n|^s} < \infty$, 当 $s > 1$ 时.

$\sum\limits_{n \geq 1}$

无穷乘积.

定义：设复数 $\{u_n\}$，若 $P_n = \prod_{j=1}^{n}(1+u_j)$ 有极限，$\lim_{n\to\infty} P_n = P \in \mathbb{C}$.

则称 $\prod_{j=1}^{\infty}(1+u_j)$ 收敛.

例：若 $u_1=-1$，则任何 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ 都收敛.

命题：若 $\sum|a_n|<\infty$，则 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛，且收敛到 0 当且仅当某个 $a_i=0$.

证明：若 $\sum |a_n| < +\infty$，则当 n 大时 $|a_n| < \frac{1}{2}$.

$$\prod_{n=1}^{N}(1+a_n) = \prod_{n=1}^{N} e^{\log(1+a_n)} = e^{B_N}$$

其中 $B_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$，$b_n = \log(1+a_n)$.

由于 $|\log(1+z)| \leq 2|z|$，若 $|z| < \frac{1}{2}$

故 $|b_n| \leq 2|a_n|$. 由于 $\sum |a_n|$ 收敛，故 $\sum b_n$ 收敛.

故 $\lim\limits_{N\to\infty} B_N = B \in \mathbb{C}$. 从而 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = e^B$.

命题：设 $\{F_n\}$ 是 Ω 上一列全纯函数，若存在 $C_n > 0$ 使得

$$\sum C_n < \infty, \qquad |F_n - 1| \le C_n, \quad (\forall z \in \Omega)$$

则 ① $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ 在 Ω 上一致收敛到全纯函数 $F(z)$

② 若 $F_n(z) \neq 0$，$\forall n$，则 $\dfrac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{F_n'(z)}{F_n(z)}$.

证明：① $F_n(z) = 1 + a_n(z)$，$\quad |a_n(z)| \le c_n$，

由 $\sum c_n < +\infty$ 知 $\prod (1+a_n(z))$ 一致收敛.

由一致收敛性知 极限 $F(z)$ 为全纯函数.

② 设 K 是 Ω 中紧集，令

$$G_N(z) = \prod_{n=1}^{N} F_n(z)$$

由于 $G_N(z)$ 在 K 上一致收敛 $F(z)$，则 $G_N'(z)$ 在 K 上一致收敛到 $F'(z)$.

由于 $F_n(z) \neq 0$，$(\forall n)$，故 $F(z) \neq 0$. 故

$$\frac{G_N'(z)}{G_N(z)} \to \frac{F'}{F} \text{ on } K.$$

左式 $= \sum_{n=1}^{N} \frac{F_n'(z)}{F_n(z)}$.

例：$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}.$$

证：① 设 $F(z) = \pi \operatorname{ctg} \pi z$，则 $F(z)$ 满足如下：

(a) $F(z+1) = F(z)$，$\forall z \in \mathbb{C}$，$z \notin \mathbb{Z}$.

(b) $F(z) = \frac{1}{z} + F_0(z)$，$F_0(z)$ 在 $z=0$ 处全纯.

(c) $F(z)$ 在任何 $z \in \mathbb{Z}$ 上是单极点，且无其它奇点. .

② 设 $G(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$

则 $G(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{|n|\leq N}\frac{1}{z+n}$

将 $z\to z+1$, 则

$$\sum_{|n|\leq N}\frac{1}{z+1+n}=\frac{1}{z+1+N}+\left(\frac{1}{z+N}+\cdots+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{z-1}+\cdots+\frac{1}{(z+1)-(N-1)}+\frac{1}{z+1-N}\right)$$

$$\sum_{|n|\leq N}\frac{1}{z+n}=\left(\frac{1}{z+N}+\frac{1}{z+N-1}+\cdots+\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{1}{z-(N-1)}\right)+\frac{1}{z-N}.$$

故 $\sum_{|n|\leq N}\frac{1}{z+1+n}=\frac{1}{z+1+N}-\frac{1}{z-N}+\sum_{|n|\leq N}\frac{1}{z+n}$

令 $N\to+\infty$, 故 $G(z+1)=G(z)$. 故 $G(z)$ 满足 (a).

故 $\displaystyle\sum_{|n|\le N} \frac{1}{z+1+n} = \frac{1}{z+1+N} - \frac{1}{z-N} + \sum_{|n|\le N} \frac{1}{z+n}$

令 $N \to +\infty$，故 $G(z+1) = G(z)$. 故 $G(z)$ 满足 (a).

当 $|z| \le \frac{1}{2}$ 时，$|z^2 - n^2| \ge n^2 - \frac{1}{4}$.

故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{z^2-n^2} \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$ 故绝对收敛，一致收敛.

极限为全纯函数. 故 $G(z)$ 满足 (b)

③ 定义 $\Delta(z) = F(z) - G(z)$,

则 $\Delta(z+1) = \Delta(z)$. 且 $\Delta(z)$ 在 $z=0$ 处可去奇点.

由周期性, $\Delta(z)$ 在任何整数点处均为可去奇点.

故 $\Delta(z)$ 为整函数.

④ $\Delta(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界.

由周期性, 只需证 $\Delta(z)$ 在 $|\mathrm{Re}\, z| \le \frac{1}{2}$ 有界.

(原因: 设 $z \in \mathbb{C}$, 则存在 $z' \in \Omega = \{|\mathrm{Re}\, z| \le \frac{1}{2}\}$, 使 $z - z' \in \mathbb{Z}$).

由于 Δ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯, 则 Δ 在 $\Omega \cap \{|\mathrm{Im}\, z| \le 1\}$ 有界.

设 $z = x + iy$, $|x| \le \frac{1}{2}$, $|y| > 1$.

则 $$\cot \pi z = i \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = i \cdot \frac{e^{i\pi(x+iy)} - e^{-i\pi(x+iy)}}{e^{i\pi(x+iy)} - e^{-i\pi(x+iy)}}$$

$$= i \frac{e^{-2\pi y} + e^{-2\pi i x}}{e^{-2\pi y} - e^{-2\pi i x}}.$$

再 $y>1$, $|x|\le\frac{1}{2}$ 时 $\operatorname{ctg}\pi z$ 有界.

注意 $$\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}=\frac{1}{x+iy}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(x+iy)}{x^2-y^2-n^2+2ixy}$$

若 $y>1$, 则
$$\left|\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\right|\le c+c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y}{y^2+n^2}\ \text{收敛}.$$

由于 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y}{y^2+n^2}\sim\int_1^{\infty}\frac{y\,dx}{y^2+x^2}=\int_1^{\infty}\frac{d(\frac{x}{y})}{1+(\frac{x}{y})^2}=\int_{\frac{1}{y}}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}$$
$$\le\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}<+\infty.$$

若 $y<-1$ 可类似证明

综上 $\Delta(z)=F(z)-G(z)$ 在 $\mathbb{C}$上有解.

$$|x^2-y^2-n^2+2ixy| \geq y^2+n^2-x^2 \geq y^2+n^2-\frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}(y^2+n^2)$$

$$|2(x+iy)| \leq 1+2y \leq 3y.$$

⑤ $\Delta(z)$为常数. 由于 $\Delta(z)$为奇函数 故 $\Delta(z)$恒为0.

从而 $F(z)=G(z)$. $(\forall z\in\mathbb{C})$.

⑥. 令 $A(z)=\dfrac{\sin\pi z}{\pi}$, $\quad P(z)=z\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z^2}{n^2}\right)$.

由于 $\sum\frac{1}{n^2}<\infty$, 则 $P(z)$ 收敛. 且

$$\frac{P'(z)}{P(z)}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2},\quad \forall z\notin\mathbb{Z}.$$

又 $\dfrac{A'(z)}{A(z)}=\pi\operatorname{ctg}\pi z=\dfrac{P'(z)}{P(z)}$. 故

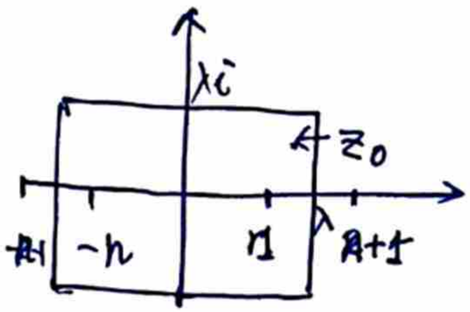
$$\left(\frac{P(z)}{A(z)}\right)'=\frac{P'}{A}-\frac{1}{A^2}PA'=\frac{P}{A}\left[\frac{P'}{P}-\frac{A'}{A}\right]=0.$$

故 $P(z)=C\cdot A(z)$.

$\dfrac{P(z)}{z}=C\cdot\dfrac{A(z)}{z}$ 令 $z\to 0$ 有 $1=C$, 故 $P(z)=A(z)$ $(\forall z\in\mathbb{C})$.

例. $\operatorname{ctg}\pi z = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\right]$, $z\in$

证明: $\forall z_0\in\mathbb{C}$, 固定 z_0, γ_n: 为 $|x|\le n+\frac{1}{2}$, $|y|\le\lambda$ 的边界. 且 γ_n 包含 z_0.



$z=n\in\mathbb{Z}$ 和 z_0 为 $\operatorname{ctg}\pi z$ 的一级极点.

留数: $\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z-z_0}, z_0\right)=\operatorname{ctg}\pi z_0$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z-z_0}, n\right)=\frac{1}{\pi(n-z_0)}$$

$$\int_{\gamma_n}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\left[\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{\pi(k-z_0)}+\operatorname{ctg}\pi z_0\right].$$

$$=2\pi i\left[\operatorname{ctg}\pi z_0-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{z_0}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2z_0}{z_0^2-k^2}\right)\right] \quad (*)$$

上式左边：

$$|\operatorname{ctg}\pi(\lambda+iy)|^2 = \left|\frac{\cos\pi(\lambda+iy)}{\sin\pi(\lambda+iy)}\right|^2$$

$$= \left|\frac{e^{i\pi(\lambda+iy)}+e^{-i\pi(\lambda+iy)}}{e^{i\pi(\lambda+iy)}-e^{-\pi i(\lambda+iy)}}\right|^2.$$

$$= \left|\frac{e^{2\pi i(\lambda+iy)}+e^{-2\pi i(\lambda+iy)}+2}{e^{2\pi i(\lambda+iy)}+e^{-2\pi i(\lambda+iy)}-2}\right|$$

$$e^{2\pi i\lambda} = e^{2\pi i(n+\frac{1}{2})} = -1$$

$$= \frac{+e^{-2\pi y}+e^{2\pi y}-2}{e^{-2\pi y}-e^{2\pi y}+2} \leq 1.$$

同样：$|\operatorname{ctg}(-\lambda+iy)|^2 \leq 1.$

注意 $\lambda = n + \frac{1}{2} \to +\infty$，故

$$|\operatorname{ctg}\pi(x+\lambda i)|^2 \leq \frac{e^{2\pi\lambda} + e^{-2\pi\lambda} + 2}{e^{2\pi\lambda} + e^{-2\pi\lambda} - 2} \to 1.$$

故当 n 充分大时，在 γ_n 上有 $|\operatorname{ctg}\pi z| \leq 2$.

由于 $\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z} + \frac{z_0}{z(z-z_0)}$

故 $$\int_{\gamma_n} \frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma_n} \frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z}\,dz + \int_{\gamma_n} \frac{z_0 \operatorname{ctg}\pi z}{z(z-z_0)}\,dz.$$

第一个积分：$\displaystyle\int_{\gamma_n} \frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z}\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \frac{1}{\pi k} = 0.$

第二个积分：

$$\left| \int_{\gamma_n} \frac{z_0 \operatorname{ctg}\pi z}{z(z-z_0)}\,dz \right| \leq \frac{2|z_0|}{\lambda(\lambda-|z_0|)} \cdot 8\lambda \to 0.$$

故 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\gamma_n} \frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z-z_0}\,dz = 0.$

代入(*)中：

$$\operatorname{ctg}\pi z_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{z_0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2z_0}{z_0^2-k^2} \right).$$

引理：若 $f(z)$ 为 $\mathbb{C}$ 上整函数，且没有零点，则存在整函数 $g(z)$ 使 $f(z) = e^{g(z)}$.

证明：由于 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上无零点，故 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯.

定义 $g(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi + c_0$, $\quad e^{c_0} = f(z_0)$.

则 $g(z)$ 为 $\mathbb{C}$ 上单值函数，且 $g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$

$$(f e^{-g})' = f' e^{-g} - f g' e^{-g}$$

$$= (f' - f g') e^{-g} = 0$$

故 $f e^{-g}$ 在 $\mathbb{C}$ 上为常数. 又 $f(z_0) e^{-g(z_0)} = e^{c_0} \cdot e^{-c_0} = 1$.

故 $f e^{-g} = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow f = e^{g}, \ \forall z \in \mathbb{C}$.

定理：给定复数 $\{a_n\}$，$|a_n| \to +\infty$，则存在整函数恰好以 $\{a_n\}$ 为零点，所有这些整函数可写为 $f(z)\,e^{g(z)}$，g 为整函数.

证明：① 若 f_1, f_2 满足恰好以 $\{a_n\}$ 为零点，则 $\frac{f_1}{f_2}$ 在 $\mathbb{C}$ 上整，且无零点，故 $\frac{f_1(z)}{f_2(z)} = e^{g(z)}$.

② 构造 f：注意 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$ 可能不收敛.

令 $E_0(z)=1-z$，$E_k(z)=(1-z)\,e^{z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{k}z^k}$，$(k\geq 1)$

引理：若 $|z|\leq\frac{1}{2}$，则 $|1-E_k(z)| \leq c\,|z|^{k+1}$.

引理：若 $|z|\le\frac{1}{2}$，则 $\left||1-E_k(z)|\right| \le C|z|^{k+1}$.

证：

$$E_k(z) = e^{\log(1-z)+z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{k}z^k}$$

$$= e^{-\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n}z^n}$$

$$\left|\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n}z^n\right| \le |z|^{k+1}\left|\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n}|z|^{n-k-1}\right|$$

$$\le |z|^{k+1}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j} \le C\cdot|z|^{k+1}, \quad (|z|\le\tfrac{1}{2})$$

故 $\left|1-E_k(z)\right| \le \left|(1-e^w)\right| \le c\cdot|w| \le C\cdot|z|^{k+1}$.

③ 定义 $f(z)=z^m\prod_{n=1}^{\infty}E_n\left(\frac{z}{a_n}\right)$，$m$ 为 0 的零点重数.

设 $z\in\mathbb{C}$，则 $|z|<R$（对充分大 R）. 当 $|a_n|>2R$ 时，$\left|\frac{z}{a_n}\right|<\frac{1}{2}$.

故 $\prod_{|a_n|>2R}E_n\left(\frac{z}{a_n}\right)$ 收敛到一全纯函数.

（原因：$\left|1-E_n\left(\frac{z}{a_n}\right)\right|\le C\cdot\left|\frac{z}{a_n}\right|^{n+1}\le\frac{C}{2^{n+1}}$）

故 $f(z)=z^m\prod_{n=1}^{\infty}E_n\left(\frac{z}{a_n}\right)$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯.

定理（Hadamard 分解定理）

设 ① f 是整函数，增长次数 ρ_0，$k=[\rho_0]$，（$k \le \rho_0 < k+1$，$k \in \mathbb{Z}$）

② $z=0$ 是 f 的 m 阶零点

③ $\{a_i\}$ 是 f 的非零零点

则 $f(z) = e^{p(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)$，$\deg p(z) \le k$.

Hadamard 定理应用:

例: 设 $f(z)$ 为整函数, 增长速度有限, 则 $f(z)$ 可取到每一个有穷复数, 至多可能除一个例外值.

证: 假设有两个 $\alpha \neq \beta$, $f(z) \neq \alpha$, $f(z) \neq \beta$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

则 $f(z)-\alpha = e^{g(z)}$, $g(z)$ 为整函数. 由 Hadamard 定理,

$\deg g(z) \leq \rho_f < +\infty$. 但 $e^{g(z)}$ 不取值 $\beta-\alpha$, 故 $g(z) = \log(\beta-\alpha)$

在 C 上无解, 与代数基本定理矛盾.

例：若 $f(z)$ 为整函数，$\rho_f \notin \mathbb{Z}$ 且有限，则 f 有无穷多个零点.

证：否则，若 $f(z)$ 的零点只有有穷多个，$a_1, a_2, \cdots a_n$，则

$$f(z) = e^{g(z)}(z-a_1)\cdots(z-a_n)$$

$m = \deg g(z) \le \rho_f < +\infty$，$f$ 的增长速度与 e^g 的相同，故

$\rho_f = m \in \mathbb{Z}$，与 $\rho_f \notin \mathbb{Z}$ 矛盾.

例：将 $f(z)=\sin \pi z$ 展成乘积.

解：① 求 ρ_f： $\sin \pi z = \frac{1}{2i}\left(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right)$

故 $|\sin \pi z| \le \frac{1}{2}\left(e^{\pi|z|} + e^{\pi|z|}\right) \le e^{\pi|z|}$

故 $\rho_f \le 1$.

令 $z=iy$， $|\sin \pi i y| = \left|\frac{1}{2i}\left(e^{-\pi y} - e^{\pi y}\right)\right| \sim e^{\pi y}$

故 $\rho_f \ge 1$.

综上 $\rho_f = 1$.

② 求 $\sin\pi z$ 的零点. $z=0, \pm1, \pm2, \cdots$

令 $a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=-1,\ a_3=2,\ a_4=-2, \cdots\ a_{2n-1}=n,$

$a_{2n}=-n.$

故 $\sin\pi z = z\cdot e^{Az+B}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}}$

$$= z\, e^{Az+B}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

令 $z\to -z$, 则

$$-\sin\pi z = -z\, e^{-Az+B}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$ 故 $A=0$.

即 $\frac{\sin\pi z}{z} = e^{B}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$

令 $z\to0$. $\pi = e^{B}$. 故 $\sin\pi z = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$

Hadamard 分解定理:

定理:设 f 为整函数,增长次数 ρ_0,设 $k=[\rho_0]$,若 $a_1, a_2, \cdots$ 为 f 的非零零点,则 $f(z)=e^{P(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)$,$\deg P \leq k$.

证:想法:令 $E(z)=z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)$,

(a) 证 $E(z)$ 为 $\mathbb{C}$ 上整函数

(b) $\frac{f}{E(z)}=e^{g(z)}$,$g(z)$ 为 $\mathbb{C}$ 上整函数.

(c) g 是次数 $\leq k$ 的多项式.

引理1：若 $|z| \le \frac{1}{2}$，则 $|E_k(z)| \ge e^{-c|z|^{k+1}}$

若 $|z| \ge \frac{1}{2}$，则 $|E_k(z)| \ge |1-z| e^{-c'|z|^k}$.

证：若 $|z| \le \frac{1}{2}$，则

$$E_k(z) = (1-z)\, e^{z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{k}z^k}$$

$$= e^{-\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{z^n}{n}} = e^{w}, \quad w = -\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$$

注意 $|e^w| \ge e^{-|w|}$，$|w| \le c|z|^{k+1}$

（原因：令 $w = u+iv$，

$$|e^w| = e^u \ge e^{-|w|}$$

$$|w| = |z|^{k+1}\left|\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{z^{n-k-1}}{n}\right| \le |z|^{k+1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j} \le c\cdot|z|^{k+1}.\ )$$

故 $|E_k(z)| \ge e^{-|w|} \ge e^{-c|z|^{k+1}}$.

若 $|z| \geq \frac{1}{2}$，则

$$\left|e^{z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{k}z^k}\right| \geq e^{-\left|z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{k}z^k\right|}$$

$$\geq e^{-\left(|z|+\frac{1}{2}|z|^2+\cdots+\frac{1}{k}|z|^k\right)}$$

$$\geq e^{-C'|z|^k}$$

故 $|E_k(z)| \geq |1-z|\, e^{-C'|z|^k}$.

(这里，由于 $|z| \geq \frac{1}{2}$，故 $2^{k+1}|z|^{k+1} \geq 1$

$2^{k+1}|z|^k \geq |z|$.).

引理2. 对任何 s, $\rho_0 < s < k+1$, 若 $|z - a_n| \geq \frac{1}{|a_n|^{k+1}}$,

则 $\left| \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| \geq e^{-c|z|^s}$.

证明:

① $\prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) = \prod_{|a_n| \leq 2|z|} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \cdot \prod_{|a_n| > 2|z|} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)$

$$\left| \prod_{|a_n| > 2|z|} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| \geq \prod_{|a_n| > 2|z|} e^{-c\left|\frac{z}{a_n}\right|^{k+1}}$$

$$\geq e^{-c|z|^{k+1} \sum_{|a_n| > 2|z|} \frac{1}{|a_n|^{k+1}}}$$

由于 $|a_n| > 2|z|$, 故 $\frac{1}{|a_n|} < c \cdot \frac{1}{|z|}$.

$$\frac{1}{|a_n|^{k+1}} = \frac{1}{|a_n|^s} \cdot \frac{1}{|a_n|^{k+1-s}} \leq \frac{1}{|a_n|^s} \cdot \frac{c}{|z|^{k+1-s}}$$

故 $\left| \prod_{|a_n| > 2|z|} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| \geq e^{-c|z|^{k+1} \cdot \frac{c}{|z|^{k+1-s}} \cdot \sum_{|a_n| > 2|z|} \frac{1}{|a_n|^s}} \geq e^{-c|z|^s}$.

② $$\left|\prod_{|a_n|\le 2|z|} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \ge \prod_{|a_n|\le 2|z|}\left|1-\frac{z}{a_n}\right|\cdot\prod_{|a_n|\le 2|z|} e^{-c'\left|\frac{z}{a_n}\right|^k}$$

$$= \prod_{|a_n|\le 2|z|}\left|1-\frac{z}{a_n}\right|\cdot e^{-c'|z|^k\cdot\sum_{|a_n|\le 2|z|}\frac{1}{|a_n|^k}}$$

注意 $$\frac{1}{|a_n|^k} = \frac{1}{|a_n|^s}\cdot\frac{1}{|a_n|^{k-s}} \le c\cdot\frac{1}{|a_n|^s}\cdot|z|^{s-k}, \quad (s>k)$$

故 $$\left|\prod_{|a_n|\le 2|z|} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \ge \prod_{|a_n|\le 2|z|}\left|1-\frac{z}{a_n}\right|\cdot e^{-c'|z|^k\cdot|z|^{s-k}\cdot\sum_{|a_n|\le 2|z|}\frac{1}{|a_n|^s}}$$

注意:

$$\prod_{|a_n|\leq 2|z|}\left|1-\frac{z}{a_n}\right| = \prod_{|a_n|\leq 2|z|}\left|\frac{a_n-z}{a_n}\right| , \quad \left(由条件\ |z-a_n| \geq \frac{1}{|a_n|^{K+1}}\right)$$

$$\geq \prod_{|a_n|\leq 2|z|} |a_n|^{-K-1}\cdot\frac{1}{|a_n|}$$

$$= \prod_{|a_n|\leq 2|z|} |a_n|^{-K-2} = A.$$

③ $$\log A = -(K+2)\sum_{|a_n|\leq 2|z|}\log|a_n|$$

$$\geq -(K+2)\sum_{|a_n|\leq 2|z|}\log(2|z|)$$

$$\geq -(K+2)\log(2|z|)\cdot n(2|z|)$$

$$\geq -(K+1)\log(2|z|)\cdot c\cdot |z|^{s}$$

$$\geq -c'|z|^{s'} \quad (\forall s'>s)$$

故 $A \geq e^{-c'|z|^{s'}}$.

④ 综上：$\left|\prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \geq e^{-c|z|^s - c'|z|^{s'}}$

$$\geq e^{-c'|z|^{s'}}, \quad (\forall s' > s).$$

引理3：存在半径 $r_1, r_2, \cdots r_m \to \infty$，使得

$$\left|\prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \geq e^{-c|z|^s}, \quad |z| = r_m.$$

证：由于 $\sum |a_n|^{-k-1} < \infty$，故 $\exists N$，

$$\sum_{n=N}^{+\infty} |a_n|^{-k-1} < \frac{1}{10}.$$

令 $I_n = \left[\,|a_n| - \frac{1}{|a_n|^{k+1}},\ |a_n| + \frac{1}{|a_n|^{k+1}}\right].$

则 I_n 的长度 $\frac{2}{|a_n|^{k+1}}$.

设 L 为正整数，当 L 充分大时，$\bigcup_{n=N}^{+\infty} I_n$ 不能覆盖 $[L, L+1]$.

因为 $\bigcup_{n=N}^{+\infty} I_n$ 的长度和 $= 2\cdot\sum_{n=N}^{+\infty} |a_n|^{-k-1} < \frac{1}{5}$.

故当存在 $r_m \to +\infty$，使得

$$\{|z|=r_m\} \cap \left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} I_n\right) = \phi$$

又当 r_m 大时，有 $\{|z|=r_m\} \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N-1} I_n\right) = \phi$.

故 $\{|z|=r_m\} \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \phi$.

由引理 2 知结论成立.

引理4：设 g 是整函数，$u=\mathrm{Re}(g)$，且当 $r_m \to +\infty$，

$u(z) \leq C r_m^s$，若 $|z| = r_m \to +\infty$.

则 g 是次数 $\leq s$ 的多项式.

证明：设 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

则 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m e^{im\theta}\right) e^{-in\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta}\, d\theta$$

$$= \begin{cases} a_n r^n, & \text{若 } n \geq 0 \\ 0 & \text{若 } n < 0. \end{cases} \qquad (*)$$

类似：$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{g(re^{i\theta})}\, e^{-in\theta}\, d\theta = 0,\ (n>0)$

故 $a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\overline{g(re^{i\theta})} + g(re^{i\theta})\right) e^{-in\theta}\, d\theta$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta,\ (n>0)$$

若 $n=0$，则 $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})\, d\theta$ (由(*)知)

故 $2\,\mathrm{Re}\, a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta.$

故 $a_n = \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} \left(u(re^{i\theta}) - c\cdot r^s\right) e^{-in\theta}\, d\theta,\ (n>0)$

故 $|a_n| \leq \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} \left|c r^s - u(re^{i\theta})\right| \left|e^{-in\theta}\right| d\theta.$

$$\leq \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} \left(c r_m^s - u(r_m e^{i\theta})\right) d\theta,$$ 取 $r = r_m \to +\infty.$

故 $|a_n| \le \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} \left| c r^s - u(re^{i\theta}) \right| |e^{-in\theta}| \, d\theta.$

$$\le \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} \left(c r_m^s - u(r_m e^{i\theta}) \right) d\theta,$$ 取 $r = r_m \to +\infty.$

$$\le 2C r_m^{s-n} - 2\,\mathrm{Re}(a_0)\, r_m^{-n}$$

If $n > s$, 则 $a_n = 0$. 故 $\deg g \le s$.

证明 2：$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

由 Cauchy 不等式：

$$|a_n| = \left|\frac{1}{n!} g^{(n)}(0)\right| \le \frac{1}{n!} \frac{n!}{r^n} \max_{|z|=r} |g(z)|$$

令 $M(r)=\max_{|z|=r} |g(z)|$，$A(r)=\max_{|z|=r} \mathrm{Re}\, g(z)$.

则当 $r<R$ 时

$$M(r) \le \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |g(0)|.$$

令 $R=2r$，则

$$M(r) \le 2 \cdot A(2r) + 3|g(0)|$$

当 $r=\frac{1}{2}r_m$ 时，

$$M\left(\frac{1}{2}r_m\right) \le 2A(r_m) + 3|g(0)| \le C \cdot r_m^s + C.$$

故 $|a_n| \le \frac{1}{\left(\frac{1}{2}r_m\right)^n} \cdot (C \cdot r_m^s + C) = C \cdot r_m^{s-n} + C \cdot r_m^{-n} \to 0.$

（当 $n>s$ 时）.

Hadamard 定理证明：

令 $E_k(z) = z^m \cdot \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)$，则 E_k 为整函数.

(原因：$\left|E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) - 1\right| \leq c \cdot \left|\frac{z}{a_n}\right|^{k+1}$，$\rho_0 < s < k+1$，

且 $\sum \frac{1}{|a_n|^{k+1}}$ 收敛.)

从而 $\frac{f(z)}{E_k(z)} = e^{g(z)}$，$g(z)$ 整函数.

注意 $|f(z)| \leq c \cdot e^{c|z|^s}$

且当 $r = r_m$ 时，$|E_k(z)| \geq e^{-c r_m^s}$

故 $e^{\mathrm{Re}\, g(z)} = \left|\frac{f(z)}{E_k(z)}\right| \leq c \cdot e^{c \cdot |z|^s} \cdot e^{c|z|^s}$，$(|z| = r_m)$

$\Rightarrow \mathrm{Re}\, g(z) \leq c \cdot |z|^s$，$(|z| = r_m)$

故 $g(z)$ 为次数 $\leq s$ 的多项式.

调和函数.

全纯函数	调和函数
$f(z)$	$u(z) = \mathrm{Re} f(z)$
Cauchy 公式	Poisson 公式
平均值性质	平均值性质
最大模原理	极值原理.
可去奇点	可去奇点.
	Dirichlet 问题.
	Harnack 不等式.

定义：设 $u\in C^2(\Omega)$，$\Delta u=0 \iff \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial \bar z}=0$

$\iff \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

称为调和函数.

平均值性质：若 u 在 $|z|<R$ 上调和，则

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})\,d\theta,\quad (0<r<R).$$

证：u 调和，$|z|<R$ 单连通，$u=\mathrm{Re} f$，f 全纯.

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}\,dz$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})\,d\theta$$

取实部：$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})\,d\theta$.

证明二：

引理：$$\iint\limits_D \Delta u \, dx\,dy = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$ $\vec{n}$ 为 ∂D 的外法向量

设引理成立，令 $$G(r) = \int_0^{2\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta.$$

$$G'(r) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \sin\theta \right) d\theta.$$

$$\vec{n} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right) = (\cos\theta, \sin\theta).$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \vec{n} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin\theta$$

故 $G'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} d\theta.$

$$= \frac{1}{r} \int_{|z|=r} \frac{\partial u}{\partial n} ds. = \frac{1}{r} \iint_{D} \Delta u \, dx dy = 0.$$

故 $G(r)$ 是常数. 从而

$$G(r) = \lim_{r \to 0} G(r) = u(0) \cdot 2\pi$$

故 $u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta.$

推论：若 u 调和，非常值，则在区域内部达不到最大值与最小值.

定理（Schwarz 公式）. 设 $f=u+iv$ 在 $|z|<R$ 全纯，在 $|z|\le R$ 连续，

则 $$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=R}\frac{\xi+z}{\xi-z}u(\xi)\,d\theta+i\,\mathrm{Im}\,f(0).\qquad \xi=Re^{i\theta}.$$

证明：当 $\xi=Re^{i\theta}$，$d\xi=Rie^{i\theta}d\theta=i\xi\,d\theta$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=R}\frac{\xi f(\xi)}{\xi-z}d\theta.\qquad ①$$

由于当 $|z|<R$ 时, $\left|\frac{R^2}{\bar z}\right| > R$, 故 $\frac{f(\xi)}{\xi-\frac{R^2}{\bar z}}$ 是 ξ 的在 $|\xi|<R$ 中全纯函数.

故 $$\int_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)}{\xi-\frac{R^2}{\bar z}}\, d\xi = 0.$$

即 $$\int_{|\xi|=R} \frac{\bar z f(\xi)}{\xi \bar z - R^2}\, i\xi\, d\theta = 0.$$

由于 $\xi\bar\xi = R^2$, 故 $$\int_{|\xi|=R} \frac{\bar z f(\xi)}{\bar z - \bar\xi}\, d\theta = 0$$

取共轭: $$\int_{|\xi|=R} \frac{z\,\overline{f(\xi)}}{z-\xi}\, d\theta = 0 \quad ②.$$

①与②相加.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=R}\frac{\xi f(\xi)+z\overline{f(\xi)}}{\xi-z}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=R}\frac{(\xi+z)u(\xi)+i(\xi-z)v(\xi)}{\xi-z}d\theta.$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=R}\frac{\xi+z}{\xi-z}u(\xi)d\theta+\frac{i}{2\pi}\int_{|\xi|=R}v(\xi)d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=R}\frac{\xi+z}{\xi-z}u(\xi)d\theta+i\,\mathrm{Im}f(0).$$

推论：设 $u(z)$ 在 $|z|<R$ 调和，则当 $|z|<r<R$ 时，

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=r}\frac{r^2-|z|^2}{|\xi-z|^2}u(\xi)\,d\theta,\qquad \xi=re^{i\theta}.$$

证：

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=r}\left(\mathrm{Re}\,\frac{\xi+z}{\xi-z}\right)u(\xi)\,d\theta.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\frac{\xi+z}{\xi-z}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\xi+z}{\xi-z}+\frac{\bar\xi+\bar z}{\bar\xi-\bar z}\right)\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{(\xi+z)(\bar\xi-\bar z)+(\xi-z)(\bar\xi+\bar z)}{(\xi-z)(\bar\xi-\bar z)}\\
&=\frac{|\xi|^2-|z|^2}{|\xi-z|^2}=\frac{r^2-|z|^2}{|\xi-z|^2}
\end{aligned}$$

故结论成立。

推论：令 $u(z)\equiv 1$，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=r}\frac{r^2-|z|^2}{|\xi-z|^2}\,d\theta=1,\qquad \xi=re^{i\theta},\qquad \forall r>0.$$

定理（Poisson公式）设函数 $u(z)$ 在 $|z|<R$ 内调和，在 $|z|\le R$ 上连续，则当 $|z|<R$ 时，

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=R}\frac{R^2-|z|^2}{|\xi-z|^2}\,u(\xi)\,d\theta,\qquad \xi=Re^{i\theta}.$$

证: $\forall\, r\in(0,1)$, $u(rz)$ 在 $|z|<\frac{R}{r}=R_1$ 调和, $R_1>R$.

故当 $|z|<R$ 时

$$u(rz)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=R}\frac{R^2-|z|^2}{|\xi-z|^2}\,u(r\xi)\,d\theta,\quad \xi=Re^{i\theta}.$$

取极限 $r\to1^-$. 固定 z:

$$\frac{R^2-|z|^2}{|\xi-z|^2}\le\frac{R^2-|z|^2}{(R-|z|)^2}=\frac{R+|z|}{R-|z|}\quad \text{一致有界.}$$

$$u(r\xi)\to u(\xi).$$

故

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\lim_{r\to1}\int_{|\xi|=R}\frac{R^2-|z|^2}{|\xi-z|^2}\,u(r\xi)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=R}\frac{R^2-|z|^2}{|\xi-z|^2}\,u(\xi)\,d\theta.$$

说明：当 $|z|<R$ 换成 $|z-a|<R$ 时.

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi-a|=R} \frac{R^2-|z-a|^2}{|\xi-z|^2} u(\xi)\, d\theta, \quad \xi = a+Re^{i\theta}.$$

说明：当 $z = re^{i\theta}$, $\xi = e^{i\varphi}$,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} \frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2} u(\xi)\, d\varphi.$$

$$\frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2} = \frac{1-r^2}{|e^{i\varphi}-re^{i\theta}|^2} = \frac{1-r^2}{(\cos\varphi - r\cos\theta)^2 + (\sin\varphi - r\sin\theta)^2}$$

$$= \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}.$$

故 $$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)} \cdot u(e^{i\varphi})\, d\varphi.$$

定理：设函数 $u(\xi)$ 在 $|\xi|=1$ 上逐段连续，则函数

$$G_u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} \frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2} u(\xi)\, d\theta, \quad \xi = e^{i\theta}.$$

在 $|z|<1$ 内调和，在 $u(\xi)$ 的连续点 ξ_0，有

$$\lim_{\substack{\xi\to\xi_0 \\ |z|<1}} G_u(z) = u(\xi_0).$$

证：① $G(z)$ 在 $|z|<1$ 时可积。

$G(z)$ 调和：

$$G(z) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} \frac{\xi+z}{\xi-z} u(\xi)\, d\theta \right), \qquad d\theta = \frac{d\xi}{i\xi}$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} \frac{\xi+z}{\xi-z} u(\xi) \frac{d\xi}{i\xi} \right).$$

由于 $\dfrac{\xi+z}{\xi(\xi-z)} = \dfrac{1}{\xi-z} + \dfrac{z}{\xi(\xi-z)}.$

故 $$G(z)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{u(\xi)d\xi}{\xi-z}+\frac{z}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{u(\xi)/\xi}{\xi-z}d\xi\right).$$

由于 $u(\xi)$, $u(\xi)/\xi$, 在 $|\xi|$ 上分段连续, 故积分合理. 故 $G(z)$ 调和.

② 设 $|\xi_0|=1$,

$$G(z)-u(\xi_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=1}\frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2}\left(u(\xi)-u(\xi_0)\right)d\theta$$

$$=\left(\int_{C_\delta}+\int_{C\setminus C_\delta}\right)\frac{1}{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2}\left(u(\xi)-u(\xi_0)\right)d\theta.$$

$$=I_1+I_2.$$

估计 I_1：由于 u 在 ξ_0 点连续，当 δ 很小时，

$$|u(\xi)-u(\xi_0)|<\varepsilon, \quad \forall\, \xi\in C_\delta\cap\{|z|=1\}.$$

$$\text{故 } |I_1| \le \frac{1}{2\pi}\int_{C_\delta}\frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2}\cdot\varepsilon\, d\theta \le \varepsilon.$$

估计 I_2：由于 $z\to\xi_0$，故设 $|z-\xi_0|\le\frac{\delta}{2}$.

当 $\xi\in C\setminus C_\delta$ 时，$|\xi-z|\ge\frac{1}{2}\delta$.

令 $M=\max\limits_{|\xi|=1}|u(\xi)|$，

$$|I_2|\le\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{C\setminus C_\delta}\frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2}\cdot 2M\cdot d\theta = \frac{M}{\pi}\int_{C\setminus C_\delta}\frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2}\,d\theta$$

$$\le\frac{M}{\pi\cdot\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}\cdot\int_{C\setminus C_\delta}(1-|z|^2)\,d\theta \le \frac{M}{\pi\cdot\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}\cdot 2M\cdot(1-|z|^2)\to 0$$

当 $z\to\xi_0$.

定义①(平均值性质) 设$u(z)$在区域D上连续，$\forall z_0 \in D$，

存在$B(z_0,\delta) \subset D$，使

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta, \quad (0<r<\delta)$$

②(极值原理)。若$u(z)$在D中不是常数，且在D中取不到最大，最小值，则称$u(z)$在D中满足最大，最小值原理。

定理：设 $u(z)$ 在 D 中连续，下面三条等价：

① u 在 D 中调和.

② u 在 D 中满足平均值性质.

③ $\forall \Omega \subset D$，Ω 中任一调和函数 $h(z)$，函数 $u(z)-h(z)$ 在 Ω 中满足最大、最小值原理.

证明：① $\Rightarrow$ ② ✓

② $\Rightarrow$ ③ ✓

③ $\Rightarrow$ ①：只要证 $u(z)$ 在 D 中每点每点邻域中调和.

$\forall z_0 \in D$, $\overline{B(z_0,\delta)} \subset D$. 构造

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{\delta^2 - |z - z_0|^2}{|\xi - z|^2} u(\xi)\, d\theta, \quad \xi = z_0 + \delta e^{i\theta}.$$

则 $h(z)$ 在 $|\xi - z_0| < \delta$ 中调和，在 $|\xi - z_0| \le \delta$ 上连续.

且 $h(z) = u(z)$, $\forall z \in \partial B(z_0, \delta)$.

由③，$u(z) - h(z)$ 在 $B(z_0,\delta)$ 中满足最大值最小值原理.

故 $u(z) - h(z)$ 在 $B(z_0,\delta)$ 中恒为 0. 即 $u(z) = h(z)$, $\forall z \in B(z_0, \delta)$.

即 $u(z)$ 在 $B(z_0,\delta)$ 中调和.

Harnack 原理.

定理：设 $u \geq 0$，在 $B(0,R)$ 上调和，在 $\overline{B(0,R)}$ 上连续，则

$$\frac{R-|z|}{R+|z|}u(0) \leq u(z) \leq \frac{R+|z|}{R-|z|}u(0).$$

证明：

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=R} \frac{R^2-|z|^2}{|\xi-z|^2}u(\xi)\,d\theta, \quad \forall z \in B(0,R).$$

$$\frac{R^2-|z|^2}{(R+|z|)^2} \leq \frac{R^2-|z|^2}{|\xi-z|^2} \leq \frac{R^2-|z|^2}{(R-|z|)^2} = \frac{R+|z|}{R-|z|}, \quad \text{当 } |\xi|=R \text{ 时}.$$

$$\frac{R^2-|z|^2}{(R+|z|)^2} = \frac{R-|z|}{R+|z|}.$$

故

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=R} \frac{R+|z|}{R-|z|}u(\xi)\,d\theta = \frac{R+|z|}{R-|z|}u(0).$$

$$u(z) \geq \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=R} \frac{R-|z|}{R+|z|}u(\xi)\,d\theta = \frac{R-|z|}{R+|z|}u(0).$$

推论：设 $u(z)\geq 0$，在 $B(z_0,R)$ 上调和，在 $\overline{B(z_0,R)}$ 上连续.

$$\frac{R-|z-z_0|}{R+|z-z_0|}u(z_0)\leq u(z)\leq\frac{R+|z-z_0|}{R-|z-z_0|}u(z_0).$$

定理. 设函数 $u_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在圆 $B(z_0,R)$ 内调和，且在圆内满足 $u_n(z)\le u_{n+1}(z)$，$(n=1,2,\cdots)$，则 $\{u_n(z)\}$ 在 $B(z_0,R)$ 内闭一致趋于 $+\infty$，或内闭一致收敛到调和函数 $u(z)$.

证：$\forall n>m$，$u_n(z)-u_m(z)$ 是调和函数，且 $u_n(z)-u_m(z)\geq 0$.

故 $\forall r<R$，由 Harnack 不等式，当 $|z-z_0|\leq r<\rho<R$ 时

$$\frac{\rho-r}{\rho+r}\left(u_n(z_0)-u_m(z_0)\right)\leq u_n(z)-u_m(z)$$

$$\leq\frac{\rho+r}{\rho-r}\left(u_n(z_0)-u_m(z_0)\right).$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(z_0) = +\infty$，固定 m，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_n(z_0) - u_m(z_0)\right) = +\infty$

从而当 $|z-z_0|\le r$ 时，$u_n(z) - u_m(z)$ 一致趋于 $+\infty$.

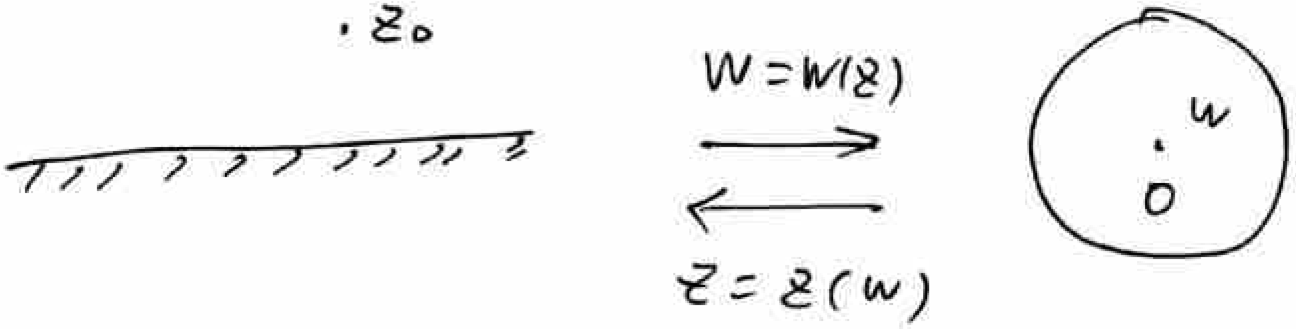
由于 m 固定，~~在~~ $u_m(z)$ 在 $|z-z_0|\le r$ 上有界，故 $u_n(z)$ 一致趋于 $+\infty$.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(z_0) < +\infty$，则由 Cauchy 准则知 $\{u_n(z)\}$ 在 $|z-z_0|\le r$ 上一致收敛到连续函数 $u(z)$. 由于 $\{u_n(z)\}$ 满足平均值性质，

故 $u(z)$ 满足平均值性质，故 $u(z)$ 为调和函数。

问题：给定$\mathbb{R}$上只有有限个点~~■~~不连续而有界函数 $u(t)$，

找上半平面内调和 $u(z)$ 使当 $u(t)$ 连续点处有 $\lim\limits_{z\to t} u(z)=u(t)$？



设 $w(z_0)=0$，令 $w(z)=\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$.

$$z \xrightarrow{w(z)} w$$

函数 $u(z)$ 变为 $\tilde{u}(w)=u(z(w))$.

$u(z)$ 关于 z 调和 $\Rightarrow$ $\tilde{u}(w)$ 关于 w 调和. u调和，f连续，则u(f(z))调和

故 $\tilde{u}(w)$ 是 $|w|<1$ 内调和函数.

$$\tilde{u}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(\xi)\, d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \tilde{u}(\xi)\frac{d\xi}{\xi}.$$

令 $\xi = \dfrac{t-z_0}{t-\bar{z}_0}$, 则 $|\xi|=1$ 与 $\mathbb{R}$ 对应.

$$d\xi = \frac{t-\bar{z}_0-(t-z_0)}{(t-\bar{z}_0)^2}\,dt = \frac{z_0-\bar{z}_0}{(t-\bar{z}_0)^2}\,dt.$$

$$\tilde{u}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{t\in\mathbb{R}} u(t)\cdot\frac{t-\bar{z}_0}{t-z_0}\,\frac{z_0-\bar{z}_0}{(t-\bar{z}_0)^2}\,dt.$$

即 $$u(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{t\in\mathbb{R}} u(t)\frac{z_0-\bar{z}_0}{|t-z_0|^2}\,dt.$$

令 $z_0 = x_0 + iy_0$, $z_0-\bar{z}_0 = 2iy_0$.

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\frac{2y_0}{(t-x_0)^2+y_0^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y_0}{(t-x_0)^2+y_0^2}\,u(t)\,dt.$$

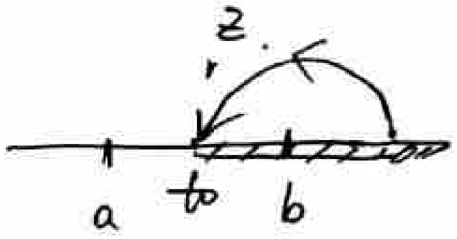
例：设 $u(t)$ 在 (a,b) 上取值 1，在实轴 $\mathbb{R}\setminus(a,b)$ 上取值 0，求上半平面全纯 $f(z)$，使在 $u(t)$ 连续点有 $\lim\limits_{z\to t} \operatorname{Re} f(z) = u(t)$.

解：
$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\frac{1}{t-z}\,dt + iC$$
$$= \frac{1}{\pi i}\int_a^b \frac{dt}{t-z} + iC = \frac{1}{\pi i}\log\frac{b-z}{a-z} + iC,$$

取某个单值分支，当 $z>b$ 时实值

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{\pi}\arg\frac{b-z}{a-z}\left(\arg\in[0,2\pi)\right).$$

$$u(z) = \mathrm{Re} f(z) = \frac{1}{\pi}\arg\frac{b-z}{a-z} \left(\arg\in[0, 2\pi)\right).$$



若 $t_0\in(a,b)$，则

$$\lim_{z\to t_0} u(z) = \frac{1}{\pi}\Delta_C \mathrm{Arg}\frac{b-z}{a-z}$$

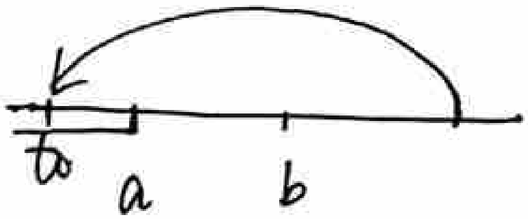
$$= \frac{1}{\pi}\left(\Delta_C \mathrm{Arg}(b-z) - \Delta_C \mathrm{Arg}(a-z)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}(\pi - 0) = 1.$$

若 $t_0 < a$，

$$\lim_{z\to t_0} u(z) = \frac{1}{\pi}\left(\Delta_C \mathrm{Arg}(b-z) - \Delta_C \mathrm{Arg}(a-z)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}(\pi - \pi) = 0.$$



同理 若 $t_0 > b$，则 $\lim\limits_{z\to t_0} u(z) = 0$.

问题，设 $u(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上分段连续有界的实函数，找上半平面全纯函数 $f(z)$，

在 $u(t)$ 的连续点有 $\lim\limits_{z\to\xi} \operatorname{Re} f(z) = u(\xi)$.

由于在上半平面，

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,\frac{z-\bar z}{|t-z|^2}\,dt$$

注意 $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{i(t-z)}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{t-z}+\frac{1}{t-\bar z}\right) = \frac{1}{2i}\,\frac{z-\bar z}{|t-z|^2}$

故

$$u(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,\frac{1}{t-z}\,dt\right) + ic$$

右式积分收敛，则 $u(t)$ 需要满足 $u(t) = O\left(\frac{1}{|t|^\alpha}\right)$，$\alpha>0$.

去掉条件 $u(t) = O\left(\frac{1}{|t|^\alpha}\right)$:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \frac{z_0 - \bar{z}_0}{|t - z_0|^2}\, dt.$$

$$u(z) - u(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \left(\frac{z - \bar{z}}{|t - z|^2} - \frac{z_0 - \bar{z}_0}{|t - z_0|^2} \right) dt.$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i(t - z)} - \frac{1}{i(t - \bar{z}_0)} \right) dt$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot \frac{z - z_0}{(t - z_0)(t - z)}\, dt \right)$$

故只要 $u(t)$ 有界, $f(z)$ 可写为

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \frac{z - z_0}{(t - z_0)(t - z)}\, dt + u(z_0) + iC.$$

右边积分收敛.

次调和函数

定义：设u在D中连续. ① 称u在区域D中满足最大值原理，若u在D中内部取不到最大值，或为常数.

② 称u在D中有平均值性质，若对$\forall z_0 \in D$，$\exists B(z_0, \delta) \subset D$，

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta, \quad 0<r<\delta.$$

引理：设$u(z)$在区域D上连续，则下面等价：

① u满足次平均值性质

② $\forall \Omega \subset D$，Ω上任一调和$h(z)$，$u(z)-h(z)$在Ω上满足最大值原理.

证明：

① ⇒ ②. $\forall \Omega \subset D$, h 在 Ω 上调和,

$$u(z_0) - h(z_0) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(u(z_0+re^{i\theta}) - h(z_0+re^{i\theta})\right)d\theta.$$

若 $u-h$ 在 z_0 处达到最大值 M. 则 在某个 $B(z_0,\varepsilon)$ 上, $u-h$ 恒为常数. 故 $\{z\in\Omega \mid u-h=M\}$ 为开集 ⇒ $u-h$ 在 Ω 上恒为常数.

② ⇒ ①. 取 $\overline{B(z_0,\delta)} \subset D$ 定义.

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi-z_0|=r} u(\xi)\frac{r^2-|z-z_0|^2}{|z-\xi|^2}\,d\theta, \quad (r<\delta)$$

$\xi = z_0 + re^{i\theta}$.

则 $h(z)$ 在 $B(z_0,\delta)$ 中调和, 且 $u-h\big|_{\partial B(z_0,r)} = 0$

由于 $u(z)-h(z)$ 在 Ω 上满足最大值原理, 故 $u-h\le 0$, $\forall z\in B(z_0,\delta)$

$$\text{故}\ u(z_0) \le h(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi-z_0|=r} u(\xi)\frac{r^2}{|z_0-\xi|^2}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi-z_0|=r} u(\xi)\,d\theta.$$

故 u 满足次平均值性质.

引理 若 v_1, v_2 次调和，则 v_1+v_2 次调和，$\max\{v_1, v_2\}$ 次调和.

证明：$\max\{v_1(z), v_2(z)\}$

$$\le \max\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_1(z+re^{i\theta})\,d\theta,\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_2(z+re^{i\theta})\,d\theta\right\}$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max\{v_1(z+re^{i\theta}),\ v_2(z+re^{i\theta})\}\,d\theta.$$

引理：设 $v(z)$ 次调和，$\overline{B(z_0,r)}\subset D$，则

$$\tilde v(z)=\begin{cases}P_v(z), & z\in\overline{B(z_0,r)}\\ v(z), & z\in D\setminus\overline{B(z_0,r)}\end{cases}$$

为 D 内次调和函数.

证明：$\tilde v(z)$ 连续，只需证 $\forall z'\in D$，$\exists\delta$，使

$$\tilde v(z')\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde v(z'+re^{i\theta})\,d\theta,\quad\forall r\in(0,\delta).$$

若 $z'\in B(z_0,r)$，则 $\tilde v(z')=P_v(z)$ 调和.

若 $z'\notin\overline{B(z_0,r)}$，则 $\tilde v(z')=v(z)$ 次调和.

若 $z'\in\partial B(z_0,r)$，$v(z)-P_v(z)$ 在 $B(z_0,r)$ 满足极大值原理，

故 $v(z)\le P_v(z)$，$\forall z\in B(z_0,r)$.

$$\tilde{v}(z') = v(z') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z'+re^{i\theta})\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_1} v(z'+re^{i\theta})\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_2} v(z'+re^{i\theta})\,d\theta.$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_1} \tilde{v}(z'+re^{i\theta})\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_2} \tilde{v}(z'+re^{i\theta})\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{v}(z'+re^{i\theta})\,d\theta$$

$\Rightarrow \tilde{v}$ 次调和.

例：$u(z)=\begin{cases} |z|, & 1<|z|<R \\ 1, & |z|\le 1 \end{cases}$ 是次调和函数.

定理. 设 $u\in C^2(\Omega)$，则 u 次调和 $\Leftrightarrow \Delta u\geq 0$.

证明：

$\Leftarrow$：先设 $\Delta v>0$. 对 $\forall \Omega'\subset\Omega$，$\Omega'$ 上任一调和 $h(z)$

$$\Delta(v-h)>0$$

若 $v-h$ 在 Ω' 中取到最大值，则 $\exists z_0\in\Omega$，$v-h$ 在 z_0 处达到最大.

故 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(v-h)(x_0)\leq 0$，$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(v-h)(y_0)\leq 0$.

故 $\Delta(v-h)(x_0)\leq 0$. 矛盾. 故 $v-h$ 满足最大值原理，

v 为次调和函数.

设 $\Delta v\geq 0$. 令 $v_\varepsilon(z)=v(z)+\varepsilon|z|^2$，$\Delta v_\varepsilon>0$.

v_ε 为次调和，故满足次平均值性质，令 $\varepsilon\to 0$

v_ε 内闭一致收敛于 $v(z)$. 故 $v(z)$ 也具有次平均值性质.

$\Rightarrow$: 若 $\Delta V(z_0)<0$，则 $\exists B(z_0,r)$，$\Delta V\big|_{B(z_0,r)}<0$

故 $-V$ 在 $B(z_0,r)$ 上次调和．故

$$-V(z_0)\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}-V(z_0+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta$$

又 V 次调和．故

$$V(z_0)\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}V(z_0+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta.$$

从而 $V(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}V(z_0+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta$，$V$ 在 $B(z_0,r)$ 调和．

$\Rightarrow \Delta V=0$．与 $\Delta V(z_0)<0$ 矛盾．

Dirichlet 问题

问题：给定区域 D 边界 ∂D 上函数 $f(z)$，是否存在调和函数 $u(z)$，使

$$u(z)\Big|_{\partial D} = f(z) \ ?$$

例：设 $\Omega = \{z \mid 0<|z|<1\}$，定义

$$f(z) = \begin{cases} 0, & |z|=1 \\ 1, & z=0 \end{cases}$$

则不存在 Ω 上调和 u，使 $u|_{\partial\Omega} = f$.

（原因：若存在，则 0 为 u 的可去奇点，从而 u 为 $\{|z|<1\}$ 上调和函数，与最大值原理矛盾）.

定义：设 $f(\zeta)$ 是有界 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的逐段连续函数，且 $f(\zeta)\le M$.

满足下列条件函数记为 $B(f)$：

① $u(z)$ 在 Ω 内次调和

② 对 $\forall \zeta\in\partial\Omega$，有 $\overline{\lim\limits_{z\to\zeta}}\, u(z)\le f(\zeta)$.

性质：① $B(f)$ 非空. $(-M \in B(f))$

② 若 $u_1, u_2 \in B(f)$，则 $\max\{u_1, u_2\} \in B(f)$.

③ 若 $v \in B(f)$，则 $\tilde{v}(z) \in B(f)$，其中

$$\tilde{v}(z) = \begin{cases} v(z), & \forall z \in \Omega \setminus B(z_0, r) \\ P_v(z), & \forall z \in B(z_0, r) \end{cases}$$

④ 若 $v \in B(f)$，则 $v(z) \le M$.

定理：令 $u(z)=\sup\{v(z) \mid v(z)\in B(f)\}$，则 u 在 Ω 中调和.

证：只要证 $\forall z_0\in\Omega$，$\exists B(z_0,r)\subset\Omega$，$u(z)$ 在 $B(z_0,r)$ 中调和.

① 由定义 $\exists v_n\in B(f)$，使 $v_n(z_0)\to u(z_0)$.

令 $\phi_n=\max\{v_1,v_2,\cdots v_n\}$，则 ϕ_n 递增，次调和.

令 $$\tilde{\phi}_n=\begin{cases}\phi_n(z), & \forall z\in\Omega\setminus B(z_0,r)\\ P_{\phi_n}(z), & \forall z\in B(z_0,r)\end{cases}$$

则 $\tilde{\phi}_n$ 在 Ω 上次调和，在 $B(z_0,r)$ 上调和.

由调和函数极值原理，$\{\tilde{\phi}_n\}$ 递增，且有界. 且 $\{\tilde{\phi}_n(z_0)\}$ 收敛.

由 Harnack 原理，$\tilde{\phi}_n(z)$ 在 $B(z_0,r)$ 上内闭一致收敛于调和函数 $\tilde{\phi}(z)$.

由于 $v_n\le\phi_n\le\tilde{\phi}_n\le u$

且 $v_n(z_0)\to u(z_0)$. 故 $\tilde{\phi}(z_0)=u(z_0)$.

② 下证 $u(z)=\tilde{\Phi}(z)$, $\forall z\in B(z_0,r)$.

$\forall p\in B(z_0,r)$, 取 $w_n\in B(f)$, $w_n(p)\to u(p)$.

令 $w_n'=\max\{w_n,\tilde{\Phi}_n\}$. 次调和.

定义: $\psi_n=\max\{w_1',w_2',\cdots w_n'\}$

$$\tilde{\psi}_n=\begin{cases}\psi_n, & \forall z\in\Omega\setminus B(z_0,r)\\ P_{\psi_n} & \forall z\in B(z_0,r)\end{cases}$$

则 $\tilde{\psi}_n(z)\to\tilde{\psi}(z)$, $\forall z\in B(z_0,r)$.

且 $w_n(z)\le w_n'(z)\le\psi_n(z)\le\tilde{\psi}_n(z)\le u(z)$

令 $z=p$, $n\to+\infty$. 知 $\tilde{\psi}(p)=u(p)$.

由定义 $\tilde{\Phi}_n \le w_n' \le \psi_n \le \tilde{\psi}_n \le u$.

令 $n \to +\infty$ $\quad \tilde{\Phi} \le \tilde{\psi} \le u$, $\quad \tilde{\Phi}(z_0) = u(z_0) = \tilde{\psi}(z_0)$.

在 $B(z_0, r)$ 上 $\tilde{\Phi} - \tilde{\psi}$ 在内点 z_0 取到最大值，故 $\tilde{\Phi} = \tilde{\psi}$, $\forall z \in B(z_0, r)$.

由于 $\tilde{\Phi}(p) = \tilde{\psi}(p) = u(p)$, 由于 p 为 $B(z_0, r)$ 中任一点，故

$$\tilde{\Phi}(z) = u(z), \quad \forall z \in B(z_0, r).$$

由于 $\tilde{\Phi}$ 在 $B(z_0, r)$ 调和，故 $u(z)$ 在 $B(z_0, r)$ 上调和.

定义：设区域D有界，若存在$w(z)$，在D上调和，在$\overline{D}$上连续，

且 $w(\zeta_0)=0$，$\zeta_0\in\partial D$，$w(z)>0$，$\forall z\in\overline{D}\setminus\{\zeta_0\}$.

则称$w(z)$为ζ_0点的一个闸函数.

定理：若D有界，$\zeta_0\in\partial D$有闸函数，且f在∂D上有界，在ζ_0点连续，

则上述定理中$u(z)$满足 $\lim\limits_{\substack{z\in D\\ z\to\zeta_0}} u(z)=f(\zeta_0)$.

证明：只要证

$$\overline{\lim_{z\to\xi_0}} u(z) \le f(\xi_0), \qquad \underline{\lim_{z\to\xi_0}} u(z) \ge f(\xi_0).$$

下证第一式：

① f 在 ξ_0 点连续，$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，$\forall \xi \in B(\xi_0,\delta)\cap\partial D$，

$$|f(\xi)-f(\xi_0)|<\varepsilon.$$

② 构造调和函数 $W(z)$，满足

(a) $\forall \xi\in\partial D$，$W(\xi)\ge f(\xi)$

(b) $W(\xi_0)=f(\xi_0)+\varepsilon$.

若 $W(z)$ 存在, 则由(1)知 $\forall v \in B(f)$, $\forall \xi \in \partial\Omega$.

$$\overline{\lim_{z \to \xi}} v(z) \le f(\xi) \le W(\xi).$$

由于 $v(z) - W(z)$ 次调和, 故 $v(z) \le W(z)$, $\forall z \in \Omega$.

故 $$u(z) = \sup_{v \in B(f)} v(z) \le W(z). \quad \forall z \in \Omega.$$

$$\overline{\lim_{z \to \xi_0}} u(z) \le \overline{\lim_{z \to \xi_0}} W(z) = f(\xi_0) + \varepsilon.$$

由 ε 任意性, $$\overline{\lim_{z \to \xi_0}} u(z) \le f(\xi_0).$$

③ $W(z)$ 构造：

$$W(z) = f(\xi_0) + \varepsilon + \frac{\omega(z)}{\omega_0}\left(M - f(\xi_0)\right).$$

其中 $\omega(z)$ 为 ξ_0 点闸函数，M 为 $|f|$ 的上界，

ω_0 为 $\omega(z)$ 在 $\overline{\Omega} \setminus B(\xi_0, \delta)$ 的正的下确界

则 $W(z)$ 满足(a)(b)：

(b) $\omega(\xi_0) = 0$，故 $W(\xi_0) = f(\xi_0) + \varepsilon$.

(a)：若 $\xi \in \partial\Omega \cap B(\xi_0, \delta)$ 时

$$W(\xi) \geq f(\xi_0) + \varepsilon \geq f(\xi).$$

若 $\xi \in \partial\Omega \setminus B(z_0, \delta)$ 时

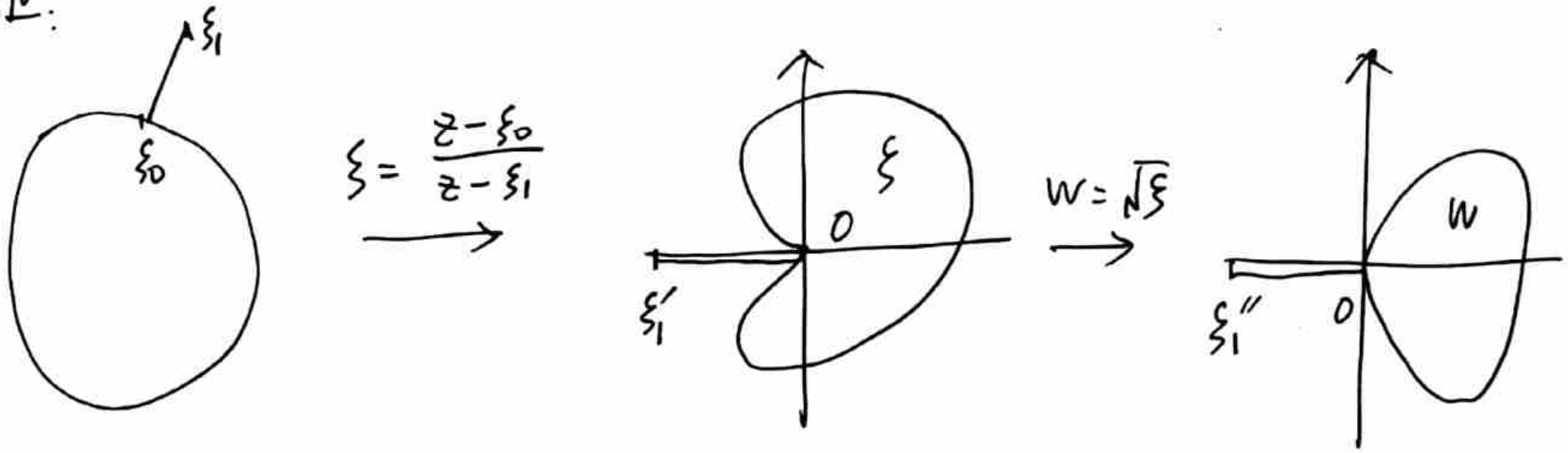
$$W(\xi) \geq f(\xi_0) + \varepsilon + M - f(\xi_0) = M + \varepsilon \geq f(\xi)$$

此时用到 $W(z) \geq \omega_0$，$\forall z \in \partial\Omega \setminus B(z_0, \delta)$.

问题：什么时候闸函数存在？

引理：设 D 有界，$\xi_0 \in \partial D$，若存在以 ξ_0 为端点的线段 $[\xi_0, \xi_1]$ 落在 $\bar{D}$ 外部，则 ξ_0 闸函数存在.

证：



$$\xi_t = t\xi_0 + (1-t)\xi_1, \quad 0 < t \le 1.$$

$$\Rightarrow \frac{\xi_t - \xi_0}{\xi_t - \xi_1} = -\frac{1-t}{t} < 0, \qquad t \in (0,1)$$

$$\xi_t = t\xi_0 + (1-t)\xi_1, \quad 0 < t \le 1.$$

$$\Rightarrow \frac{\xi_t - \xi_0}{\xi_t - \xi_1} = -\frac{1-t}{t} < 0, \quad t \in (0,1)$$

取 $w = \sqrt{\xi}$ 将 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 映为右半平面分支.

则此时 $u(z) = \operatorname{Re} w(z) \geq 0, \ \forall z \in D.$

$u(\xi_0) = 0.$

故 $u(z)$ 为闸函数.

例：设 $\Omega=\{z \mid 0<|z|<1\}$，定义

$$f(z)=\begin{cases}0, & |z|=1\\ 1, & z=0\end{cases}$$

则不存在 Ω 上调和函数 u，使 $u|_{\partial\Omega}=f$.

证：① 若存在 u，则 u 是径向对称的，即 $u(z)=u(e^{i\theta}z)$，$\forall\theta\in\mathbb{R}$.

u 只与 r 有关，与 θ 无关.

因为若 u 调和，$u(e^{i\theta}z)$ 也调和，且 $u(z)-u(e^{i\theta}z)\big|_{\partial\Omega}=0$.

由极值原理 $u(z)=u(e^{i\theta}z)$，$\forall z\in\Omega$.

(2). $u=u(r)$: $\quad \Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$

$$\Delta u=0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)u=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0.$$

$r\frac{\partial u}{\partial r}=C$, $\quad u=C\log r+C'$

当 $r=1$ 时, $C'=0$ 故 $u=C\log r$

当 $r\to 0$ 时 $u=1$, 故矛盾. 从而 u 不存在.

期末复习

第一章：复数概念（辐角定义），可导，可微，全纯，实可微，

调和，共轭调和，

多值函数（对数函数，幂函数，支点，单值域的求法。）

分式线性变换，特殊区域间的共形映射的构造。

第二章：Cauchy定理，Cauchy公式，Cauchy不等式.
复积分的计算（用定义，Cauchy公式，无界区域方法，留数定理，无界区域留数定理）
原函数，Liouville定理，Morera定理.
无界区域情形的Cauchy定理，Cauchy公式.

第三章：级数的收敛，幂级数的收敛域，Abel定理，
全纯函数的幂级数展开，零点的孤立性。
Laurent展开，孤立奇点的性质（可去，极点，本性）。
无穷远奇点，亚纯函数。

第四章：全纯函数的最大模原理（有界，无界）.

调和函数的极值原理.

Schwarz 引理，特殊区域的全纯自同构，特殊区域间的不等式

幅角原理，Rouché定理，零点个数的判断

单叶函数的性质（开映射，反函数）.

第五章：留数的计算，无穷远留数，
复积分的计算
实积分的计算（常见类型）

第六章：解析开拓，Schwarz对称（四种类型）.
幂级数解析开拓，奇异点正则点的判断.

第七章：Montel定理.
黎曼映照定理.
边界对应原理(精神).

第八章：整函数，Jensen公式及应用.
无穷乘积收敛判断.
Weierstrass整函数的构造.
Hadamard分解定理及应用(引理4不证明).

第九章：调和函数.

平均值公式，Schwarz 公式，Poisson 公式.（圆，上半平面）.

极值原理，Harnack 不等式.

次调和函数.

Dirichlet 问题

可去奇点（P306：14，18）.