## ▷ 机械振动

一维保守力在稳定平衡位置附近一定是弹性力.

$m\ddot{x}=-kx \Rightarrow x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$, $\omega^2=\frac{k}{m}$

弹簧振子: $\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$, $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$  $E=E_k+V=\frac12 kA^2$

$E_k=\frac{A^2}{2}m\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)=\frac{kA^2}{4}[1-\cos2(\omega t+\varphi_0)]$

$V=\frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega t+\varphi_0)=\frac{kA^2}{4}[1+\cos2(\omega t+\varphi_0)]$

一个周期内对时间平均: $\langle E_k\rangle=\langle V\rangle=\frac12 E$

一维振动合成: $x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$, $x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$ } 振幅,初相不同

$$\Rightarrow x=A\cos(\omega t+\varphi)\begin{cases}A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}\\ \tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}\end{cases}$$

频率,初相不同: $x_1=A\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$, $x_2=A\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$.

$\Rightarrow x=\boxed{2A\cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2})}\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2})$ 取绝对值后即振幅

振幅变化频率/拍频  拍现象:合振幅时大时小

$\nu=|\frac{\omega_1-\omega_2}{2\pi}|=|\nu_1-\nu_2|$

两个垂直,同频谐振动合成:

$x=A_x\cos(\omega t+\varphi_x)$, $y=A_y\cos(\omega t+\varphi_y)$

$$\Rightarrow \frac{(\frac{x}{A_x}+\frac{y}{A_y})^2}{A_+^2}+\frac{(\frac{x}{A_x}-\frac{y}{A_y})^2}{A_-^2}=1\begin{cases}A_+=2\cos\frac{\varphi_y-\varphi_x}{2}\\ A_-=2\sin\frac{\varphi_y-\varphi_x}{2}\\ \varphi=\frac{\varphi_y-\varphi_x}{2}\end{cases}$$

或: $\frac{x^2}{A_x^2}+\frac{y^2}{A_y^2}-\frac{2xy}{A_xA_y}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$

① $\varphi_y-\varphi_x=\frac{\pi}{2}$: 顺(右旋); ② $\varphi_y-\varphi_x=\frac{3\pi}{2}$: 逆(左旋)

阻尼振动方程: $m\ddot x=-kx-\gamma\dot x$ $\begin{cases}\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\ (固有角频率)\\ \beta=\frac{\gamma}{2m}\ (阻尼因子)\end{cases}$

解 $x=A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t}$

$r_1=-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$, $r_2=-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$  阻尼度 $\Lambda=\frac{\beta}{\omega_0}$

① 弱阻尼 ($\beta<\omega_0$): $x=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0)$, $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$

振幅 $A=A_0e^{-\beta t}$, 周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}>$ 系统固有周期

阻尼振子总能量 $E=\frac12mv^2+\frac12kx^2\approx\frac12m\omega_0^2A_0^2e^{-2\beta t}=\frac12kA^2$

$\frac{dE}{dt}=-\gamma v^2=fv$ (克服粘滞阻力做功)

② 临界阻尼 ($\beta=\omega_0$): $x=(A_1+A_2t)e^{-\beta t}$ (不振,趋衡最快)

③ 过阻尼 ($\beta>\omega_0$): 非周期,缓慢回到平衡(灵敏电流计)

$x=A_1\exp[-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t]+A_2\exp[-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t]$

受迫振动: $m\ddot x=-kx-\gamma\dot x+F_0\cos\Omega t$ $\begin{cases}\beta=\frac{\gamma}{2m}\\ h=\frac{F_0}{m}\\ \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\ 本征频率\end{cases}$

解 $x=\underbrace{A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi')}_{暂态解(随时间消失)}+\underbrace{A\cos(\Omega t+\varphi)}_{稳态解}$

稳态解振幅 $A=\frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}}$, 相位 $\varphi=\arctan\frac{-2\beta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$

$\frac{dA}{d\Omega}=0 \Rightarrow$ 共振角频率 $\Omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$, 振幅 $A_r=\frac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$

① β越小, $\Omega_r\to\omega_0$, $A_r$越大 ② β=0时, $\Omega_r=\omega_0$, $A_r\to\infty$ 共振

振动功率 $P=\frac1T\int_0^T\gamma\dot x^2dt=\frac12\gamma(\Omega A)^2=\frac{\gamma h^2\Omega^2}{2[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2]}$

能量共振: $\frac{dP}{d\Omega}=0\Rightarrow\Omega=\omega_0$

单摆: 重力形成的力矩,在角度很小时有 $M=-mgl\sin\theta\approx-mgl\theta$. 根据转动定律, $I\beta=M\Rightarrow\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{mgl}{I}\theta$. 又有(质点) $I=ml^2$. 故 $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac gl\theta=0 \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac gl}$, $T=2\pi\sqrt{\frac lg}$.

复摆: $I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mgl\sin\theta\approx-mgl\theta\Rightarrow\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{mgl}{I}\theta$ (质心)

$\omega=\sqrt{\frac{mgl}{I}}=\sqrt{\frac gL}$, $T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}=2\pi\sqrt{\frac Lg}$, $L\triangleq\frac{I}{ml}$ 等值摆长

## ▷ 机械波

固:横,纵  液,气:纵

① 弹性绳上横波: $u=\sqrt{\frac{F_T}{\rho}}$ $\begin{cases}F_T: 绳中张力\\ \rho: 绳的线密度\end{cases}$

② 固体棒中纵波: $u=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$

Y: 杨氏弹性模量, ρ: 体密度 $(\frac FS=Y\frac{\Delta l}{l_0})$

③ 固体中横波: $u=\sqrt{\frac G\rho}$. G: 切变模量 $(\frac FS=G\varphi)$

④ 流体中纵波: $u=\sqrt{\frac B\rho}$. B: 容变模量, ρ: 流体密度

理想气体: $u=\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$, $\gamma=\frac{C_p}{C_v}$, μ: 摩尔质量

角波数 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$. 右行波 $y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$

波动方程: $\frac{\partial^2y}{\partial x^2}=\frac1{u^2}\frac{\partial^2y}{\partial t^2}$ (平面波)

$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac1{u^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\Rightarrow\nabla^2\xi-\frac1{u^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0$.

折射定律: $\frac{\sin i_1}{\sin i_2}=\frac{u_1}{u_2}=\frac{n_2}{n_1}$  反/折射后,纵波可能变成横波或部分纵波部分横波(若横波可在介质中传播); 反之亦然.

相干条件: ① 同频 ② 相位相同或相位差恒定 ③ 振动方向相同(平行).

非相干波叠加: ① 同方向,同相速,不同频率:

$A\cos[\omega_1(t-\frac xu)+\varphi_1]+A\cos[\omega_2(t-\frac xu)+\varphi_2]$

$=2A\cos[\frac{\omega_1-\omega_2}{2}(t-\frac xu)+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}]\cos[\frac{\omega_1+\omega_2}{2}(t-\frac xu)+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}]$

(合成波(调制波)传播速度 = 各分波相速度)

② 同方向,不同频率,不同相速(存在色散):

$A\cos(\omega_1t-k_1x+\varphi_1)+A\cos(\omega_2t-k_2x+\varphi_2)$

$=\boxed{2A\cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t-\frac{k_1-k_2}{2}x+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2})}\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t-\frac{k_1+k_2}{2}x+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2})$

合成波包络线(群速度 = 其峰值传播速度) $u_g=\frac{\omega_2-\omega_1}{k_2-k_1}$

若由频率连续分布的多列波合成 $u_g=\frac{d\omega}{dk}$

瑞利群速公式: $u_g=u_p+k\frac{du_p}{dk}=u_p-\lambda\frac{du_p}{d\lambda}$

色散关系: $u_p$ (或k) 可能与ω有关.

$\frac{du_p}{d\lambda}=0$ (无色散); >0 (正常色散); <0 (反常色散)

驻波: 反向行进(左行+右行),同频,同方向,弦长 $L=n\frac\lambda2$. 合成波是一种振动,位相不在空间传播

$A\cos(\omega t-kx+\varphi_1)+A\cos(\omega t+kx+\varphi_2)$

$=2A\cos(kx+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2})\cos(\omega t+\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2})$

相邻波腹/节距离 $=\frac\lambda2$ ① 若 $\cos(kx+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2})>0$, 相位 $=\omega t+\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}$; ② 若 $\cos(kx+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2})<0$, 相位 $=\omega t+\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}+\pi$ (波节间同相,波节两边反相)

纵波驻波: ① 波节: 质点密集. ② 波腹: 质点稀疏.

自由端: 形成波腹,相位突变0,全波反射,无半波损失

$A\cos(\omega t-kx)+A\cos(\omega t+kx-2kl)$ } 端点 x=l (波腹)

$=2A\cos(kx-kl)\cos(\omega t-kl)$ 反射波

固定端: 形成波节,相位突变π,半波反射,有半波损失

$A\cos(\omega t-kx)+A\cos(\omega t+kx-2kl-\pi)$ (端点x=l: 波节)

$=2A\cos(kx-kl-\frac\pi2)\cos(\omega t-kl-\frac\pi2)$ 反射波

观察者 $v_D$ (向波源>0), 波源 $v_S$ (向观察者>0):

$\frac{接收频率\ \nu'}{波源频率\ \nu}=\frac{V+v_D}{V-v_S}$ (V: 介质中波速)

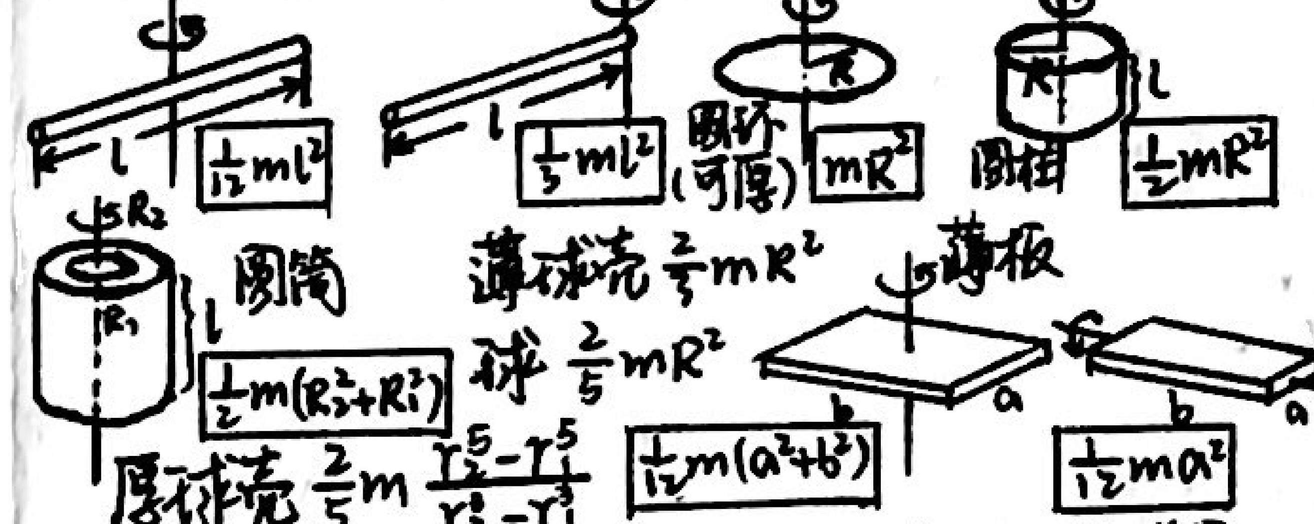
波源速度 $v_S$ > 波速 u: 马赫锥半顶角满足 $\sin\alpha=\frac{u}{v_S}$

马赫数 $=\frac{v_S}{u}$

$I=\underbrace{\boxed{I_C}}_{绕质心轴}+md^2$ 两平行轴间距

## ▷ 刚体力学

(对平面分布刚体) 正交轴定理: $I_z=I_x+I_y$




合外力矩对刚体所做的功 = 刚体转动动能增量

刚体转动动能 $E_k=\frac12I\omega^2$ 刚体定轴转动的角动量定理: $\int_{t_0}^tMdt=I\omega-I\omega_0$ [若I在转动时发生变化(转轴不变), 则 $\int_{t_0}^tMdt=I\omega-I_0\omega_0$]

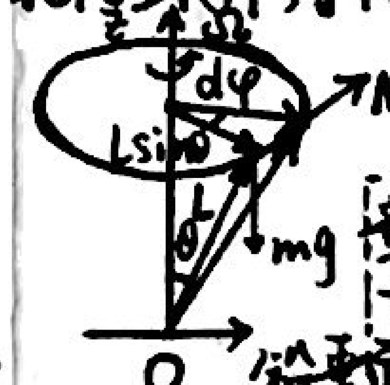
刚体定轴转动定理 $M=\frac{d(I\omega)}{dt}=I\beta$ 角动量守恒 $\sum I\omega=const$ 刚体动能 $E_k=\frac12m_Cv_C^2+\frac12I_C\omega^2$

刚体平面平行运动的动能定理(注意要取质心作基点)

$E_k(t)-E_k(t_0)=A=\int_{r_1}^{r_2}\vec F\cdot d\vec r+\int_{\theta_1}^{\theta_2}M_Cd\theta$

纯滚动: 判据: $v_c=R\omega$, $a_c=R\beta$. 静摩擦力不做功

① 车轮在刚性水平地面上纯滚动: f=0 ② 主动轮: f向前 ③ 被动轮: f向后 ④ 车轮在斜面上纯滚动: 无论车轮向上向下, f向上. (以上f表示静摩擦力)



Z: 进动轴: 陀螺进动角速度 $\Omega=\frac{M}{L\sin\theta}=\frac{mgr_c}{I\omega}$

L: 自转轴  矢量式: $\vec M=\vec\Omega\times\vec L$

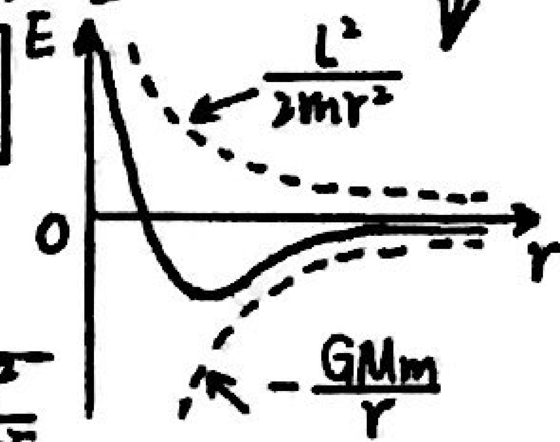
章动: 当陀螺的自转角速度不够大时,除了自转和进动外,陀螺对称轴还会在铅垂面内上下摆动,即θ角会有大小波动.

## ▷ 万有引力

有心力场质点运动: ① 径方向: $m(\ddot r-r\dot\theta^2)=f(r)$. ② θ方向: $m(2\dot r\dot\theta+r\ddot\theta)=0$ ③ 对原点(力心)角动量守恒: $mr^2\dot\theta=L$ (const). ④ 机械能守恒: $E_k+V=\frac12mv_r^2+\frac12mv_\theta^2+V(\vec r)=\frac12m(\dot r^2+r^2\dot\theta^2)+V(\vec r)=E$ (const) $=\frac12m\dot r^2+\boxed{\frac{L^2}{2mr^2}+V(\vec r)}$ $V_{eff}(\vec r)$ 有效势能

拱点: 质点的总能量为E的水平线与有效势能曲线的交点. (对引力场轨道, 拱点处径向速度 $v_r=\dot r=0$. 由式 $E=\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}$ 可得拱点 r 值.

$\Leftrightarrow \boxed{r^2+G\frac{Mm}{E}r-\frac{L^2}{2mE}=0}$




E>0: 双曲线. E=0: 抛物线

E<0: 椭圆 $r_{3min}\le r\le r_{3max}$

$r_{3min/max}=-G\frac{Mm}{2E}\mp\sqrt{(G\frac{Mm}{2E})^2+\frac{L^2}{2mE}}$

半长轴 $a=\frac12(r_{3min}+r_{3max})=-G\frac{Mm}{2E}$ (只与能量有关, E越小a越大)

$E=V_{eff\text{-}min}$, $r_4=\frac{L^2}{Gm^2M}$ (圆)

定量处理: 令 $h=\frac Lm$. 由角动量守恒和机械能守恒定律: $r^2\dot\theta=h$, $\frac12m\dot r^2+\frac{mh^2}{2r^2}+V(r)=E$. 解得 $r=\frac{r_0}{1+\varepsilon\cos\theta}$ ($r_0=\frac{h^2}{GM}$, ε为与E和V(r)有关待定常数)

① ε=0: 圆 ② 0<ε<1: 椭圆(偏心率ε, 近力心点 $\frac{r_0}{1+\varepsilon}$, 远力心点 $\frac{r_0}{1-\varepsilon}$. 长轴 $2a=\frac{2r_0}{1-\varepsilon^2}$, 短轴 $2b=\frac{2r_0}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$)

③ ε=1: 抛物线 (顶点 $(\frac{r_0}{2},0)$, 准线 $x=r_0$) ④ ε>1: 双曲线(焦点(0,0), 开口向左)


[求由地球向火星发射人造天体的发射速度] 霍曼转移轨道(最省能量轨道方案) 设地球轨道和火星轨道半径分别为 $r_e$, $r_m$, 则飞船运行椭圆轨道半长轴 $a=\frac12(r_e+r_m)$. 由 $a=-\frac{GM_sm}{2E}$ 得 $E=-\frac{GM_sm}{r_e+r_m}$, 其中 $M_s$, m 分别为太阳和飞船质量. E为飞船摆脱地球引力束缚后总能量, 此时飞船与太阳距离仍为 $r_e$, 动能 $E_k=\frac12mv^2=E-V=-\frac{GM_sm}{r_e+r_m}+\frac{GM_sm}{r_e}$.

$\Rightarrow v=\sqrt{2GM_s(\frac1{r_e}-\frac1{r_e+r_m})}$ (这是相对于太阳的速度).

飞船摆脱地球引力后相对地球速度 $u=v-v_e$, 其中 $v_e=29.8$ km/s 为地球公转速度. 设飞船相对地球发射速度为 $v'$, 则 $\frac12mv'^2-\frac{GM_em}{R_e}=\frac12mu^2\Rightarrow v'^2=u^2+\frac{2GM_e}{R_e}=u^2+v_2^2$, 其中 $v_2=11.2$ km/s 为第二宇宙速度. 代入数据得 v=32.7km/s, u=2.9km/s, v'=11.6km/s.

## ▷ 角动量守恒

角动量为掠面速度的2m倍

质点角动量定理: $\vec M=\frac{d\vec L}{dt}$ (仅适用于惯性系)

质点系角动量定理: 只有外力矩对体系角动量变化有贡献. 不论质心系是惯性系还是非惯性系, 在质心系中, 角动量定理仍然适用.

体系角动量=质心角动量+体系相对质心角动量

用角动量守恒定律解释星系的圆盘形结构:

银河系最初可能是球形的，与其他星系相互作用具有一定角动量(在凝聚过程中，$r^2\omega=\text{const}$ 要求 $\omega\propto r^{-2}$，因而离心力 $\propto \frac{v^2}{r}=r\omega^2\propto r^{-3}$ 增大且比引力 $\propto r^{-2}$ 增大更快)→引力和离心力平衡→限制星系在垂直转轴方向进一步坍缩(但不妨碍星系沿转轴方向的坍缩)→圆盘状

▷动能定理

质点系动能定理: $\boxed{E_k(t)-E_k(t_0)=A_外+A_内}$

$A_内=A_{保内}+A_{非保内}$ $\boxed{E(t)-E(t_0)=A_外+A_{非保内}}$

$A_{保内}=V(t_0)-V(t)$ (机械能) "功能原理"

①功能原理和机械能守恒定律只在惯性系中成立，非惯性系中要引入惯性力 ②内力做功与参考系无关 ③外力做功与参考系有关 ④体系的动能与参考系有关 ⑤体系的势能与参考系无关.

柯尼希定理: 体系动能=质心动能+体系相对质心系动能 (不论质心系是惯性系还是非惯性系)

质心系功能原理: $E(t)-E(t_0)=A_外+A_{非保内}$ (即使质心系不是惯性系，也不需考虑惯性力所做功)

第一宇宙速度(人造卫星): $m\frac{v_1^2}{r}=G\frac{Mm}{r^2}\Rightarrow v_1=\sqrt{\frac{GM}{r}}=\sqrt{\frac{GM}{R+h}}\approx\sqrt{\frac{GM}{R}}\approx 7.9\,km/s$.

第二宇宙速度/逃逸速度(太阳系人造行星):

$\frac12 mv_2^2-\frac{GMm}{r}=0\Rightarrow v_2=\sqrt{\frac{2GM}{r}}=\sqrt{\frac{2GM}{R+h}}\approx\sqrt{\frac{2GM}{R}}\approx 11.2\,km/s$. [产生黑洞: $v_2=C\rightarrow$ 质量为M天体半径 $\frac{2GM}{C^2}$]

引力半径 $R_g=\frac{2GM}{C^2}$，总质量 $M=\frac43\pi r^3\rho$，$r=R_g$

$\Rightarrow R_g=\sqrt{\frac{3C^2}{8\pi G\rho}}$. 宇宙环境 $\rho=10^{-26}kg/m^3\Rightarrow R_g=10^{26}m$ (宇宙半径)

第三宇宙速度(银河系人造行星): 同 $v_2$ 法可得以太阳为参考系的第三宇宙速度 $V_3=\sqrt{\frac{2GM_s}{\bar r}}$，其中太阳质量 $M_s\approx 332\times10^3 M$(地球质量)，太阳-地球平均距离 $\bar r=1.5\times10^8 km\approx 234\times10^2 R$(地球半径). 故 $V_3=\sqrt{\frac{332\times10^3}{234\times10^2}}v_2\approx 42.2\,km/s$. 这是从日心系看飞行器冲出的速度，其中包含地球绕太阳公转速度 $\bar v\approx 29.8km/s$) 从地球-飞行器质心参考系看，飞行器冲出地球引力范围时速度 $v_3'=V_3-\bar v\approx 12.4km/s$. 再逆溯到地面附近h高度，发射速度 $v_3$ 满足机械能守恒: $\frac12 mv_3^2-G\frac{Mm}{R}=\frac12 mv_3'^2$. 利用 $\frac{GMm}{R}=\frac12 mv_2^2$

得 $v_3^2=v_3'^2+v_2^2\Rightarrow v_3=16.7km/s$.

恢复系数 $e=\frac{|\vec v_1-\vec v_2|}{|\vec v_{10}-\vec v_{20}|}$ 对心碰撞:

$\vec v_1=\frac{m_1-em_2}{m_1+m_2}\vec v_{10}+\frac{(1+e)m_2}{m_1+m_2}\vec v_{20}$

$\vec v_2=\frac{(1+e)m_1}{m_1+m_2}\vec v_{10}+\frac{m_2-em_1}{m_1+m_2}\vec v_{20}$

$\Delta E_k=\frac12(1-e^2)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\vec v_{10}-\vec v_{20})^2$

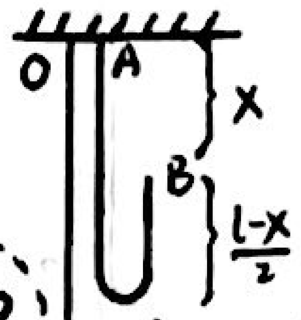
资用能: 真正参与粒子反应的能量(实验室参考系内质心动能不参与粒子间反应)

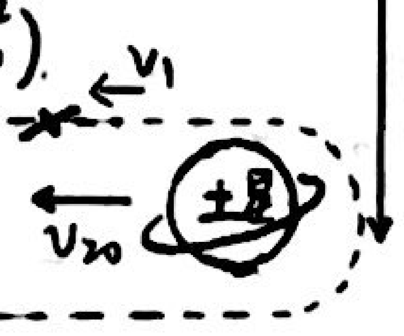
让相同的高能粒子沿相反方向运动.

在质心系中讨论正碰: 实验室系(L系)中质心速度 $\vec v_c=\frac{m_1\vec v_{10}+m_2\vec v_{20}}{m_1+m_2}$. 在质心系(C系)中:

$m_1\vec v_{10}'+m_2\vec v_{20}'=m_1\vec v_1'+m_2\vec v_2'=\vec 0$, $\vec v_2'-\vec v_1'=e(\vec v_{10}'-\vec v_{20}')\Rightarrow \vec v_1'=-e\vec v_{10}'$, $\vec v_2'=-e\vec v_{20}'$.

$\Delta E_k'=(1-e^2)\cdot\frac12(m_1v_{10}'^2+m_2v_{20}'^2)$.





弹弓效应: 看成无接触碰撞，

$e=1$, $m_1\ll m_2$. 则

$v_1=\frac{m_1-em_2}{m_1+m_2}v_{10}+\frac{(1+e)m_2}{m_1+m_2}v_{20}$

$\approx -v_{10}+2v_{20}=[-10.4+2\times(-9.6)]km/s=-29.6km/s$

两个相互作用的质点所组成孤立体系的力学问题:

①S参考系法: 选择与$m_2$相对静止的参考系，$m_2$位于原点(非惯性系). 令 $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$. 则 $\mu\frac{d^2\vec r}{dt^2}=\vec F$

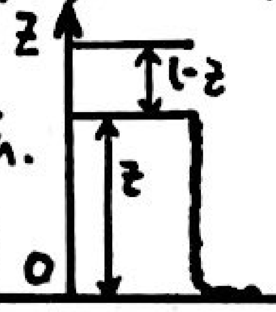
(若 $m_1\ll m_2$，则 $\mu=m_1$)

②质心系法: 孤立体系的质心系是惯性系.

质心系中机械能 $E=\frac12\mu v^2+V(r)$，其中 $\vec v=\vec v_1-\vec v_2$，$V(r)$为系统势能，$\vec r=\vec r_1-\vec r_2$.

▷动量守恒

动量定理只适用于惯性系，非惯性系中须考虑惯性力冲量



绳: 质量m, 长l. 求下落到所剩长度为z时，地面对这段绳子的作用力 ①动量法.

绳子上端下落速度 $v=-\sqrt{2g(l-z)}$. 设紧靠地面的质元dm与地面碰时受支持力$N_1$，则 $(N_1-gdm)dt=-vdm$，忽略二级小量，并考虑dt内落地绳子长 $-vdt$，可得 $N_1=-v\frac{dm}{dt}=-v(-vdt\frac{m}{l})/dt=\frac{mv^2}{l}=2mg(1-\frac zl)$. 已落地一段绳子受支持力 $N_2=(l-z)\frac{m}{l}g$. 故 $N=N_1+N_2=3mg(1-\frac zl)$.

②质心法. 把绳子看作一质点系. 当绳子下落到所剩长度为z时，质心高度 $z_c=\frac1m\int_0^z z'\frac{m}{l}dz'=\frac{z^2}{2l}$，质心速度 $v_c=\frac{dz_c}{dt}=\frac zl\frac{dz}{dt}=\frac{zv}{l}$. 绳子上端下落速度 $v=-\sqrt{2g(l-z)}$. $\frac{dv}{dt}=-g$. 质心加速度 $a_c=\frac{dv_c}{dt}=\frac{d}{dt}(\frac{zv}{l})=\frac{v^2}{l}+\frac zl\frac{dv}{dt}=2g-\frac{3zg}{l}$. 由质心运动定理，$N-mg=ma_c\Rightarrow N=3mg(1-\frac zl)$.

密舍尔斯基方程: $m\frac{d\vec v}{dt}=\boxed{(\vec u-\vec v)\frac{dm}{dt}}+\vec F$; m是变量

dm对主体的冲力 ($\frac{dm}{dt}\neq0$均成立) 附体 主体 $\vec F=\vec F_{am}+\vec F_m$

雨滴自由下落时质量$m_0$，单位时间凝聚水汽质量λ，求雨滴经t时间下落距离(忽略空气阻力).

$\frac{d}{dt}[(m_0+\lambda t)v]=(m_0+\lambda t)g \xrightarrow[积分]{t=0时v=0} v=\frac{m_0t+\frac12\lambda t^2}{m_0+\lambda t}g$

$=\frac12gt+\frac{m_0g}{2\lambda}-\frac{\frac{m_0^2g}{2\lambda}}{m_0+\lambda t}=\frac{dx}{dt}\xrightarrow[积分]{t=0时x=0}$

$x=\frac12g[\frac12t^2+\frac{m_0}{\lambda}t-(\frac{m_0}{\lambda})^2\ln(1+\frac{\lambda}{m_0}t)]$

①当u=v时, $m\frac{d\vec v}{dt}=\vec F$ (m是变量) ②u=0时变为 $\frac{d(m\vec v)}{dt}=\frac{d\vec p}{dt}=\vec F$.

柔软绳子(长l, 线密度λ), 求B自由下落x时支点受力T. ①变质量法.

B降落x时速度 $u=\sqrt{2gx}$. dt时间内进入左端绳子质量 $dm=\frac12\lambda u dt$. 对左端绳子:

$(\frac{l+x}{2})\lambda\frac{dv}{dt}=(u-v)\frac{dm}{dt}+(\frac{l+x}{2})\lambda g-T\xrightarrow{v=0}$

$T=\frac{\lambda g}{2}(l+3x)$. ②质心法. $mg-T=ma_c$

当B自由下落x时质心位置 $r_c=\frac{m_Ar_{Ac}+m_Br_{Bc}}{m_A+m_B}=-\frac{x^2}{4l}+\frac x2+\frac l4$. 由 $x=\frac12gt^2$ 知 $a_c=\ddot r_c=\frac g2(1-\frac{3x}{l})$.

故 $T=mg-ma_c=\frac{\lambda g}{2}(l+3x)$.

火箭喷气相对速度 $\vec u-\vec v$ 为常量 $v_r$. 则 $m\frac{dv}{dt}=-v_r\frac{dm}{dt}$

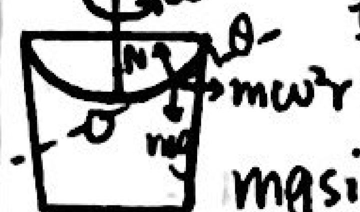
$\Rightarrow -\int_M^m\frac{dm}{m}=\frac1{v_r}\int_0^{v_f}dv\Rightarrow v_f=v_r\ln\frac Mm$.

▷非惯性参考系

每日两次涨潮、落潮(除南极).

若不考虑地球自转, 地球参考系是平动参考系, 由于太阳引力的不均匀性, 太阳引力和惯性力的合力使A、C靠近, B、D远离. 若再考虑地球自转, 由于水面形状、位置相对太阳不变, 于是地球上一天将看到两次涨潮和两次落潮. 月球对潮汐的作用比太阳更大: 月球离地球近, 月球比太阳的引力不均匀性大得多.

动参考系作匀角速转动: ①速度变换: 绝对速度$\vec v$=相对速度$\vec v'$+牵连速度$\vec\omega\times\vec r$ ②加速度变换: 绝对加速度$\vec a$=相对加速度$\vec a'$+牵连加速度$\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)$+科里奥利加速度$2\vec\omega\times\vec v'$. ③惯性离心力: $\vec f_c=-m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)$ ④科里奥利力: $\vec f_{cor}=-2m\vec\omega\times\vec v'$.



选取水面底为原点, 建立随水桶一起转动的坐标系. 在水面上取一质量元m.

$mg\sin\theta-m\omega^2r\cos\theta=0\Rightarrow\tan\theta=\frac{\omega^2r}{g}$.

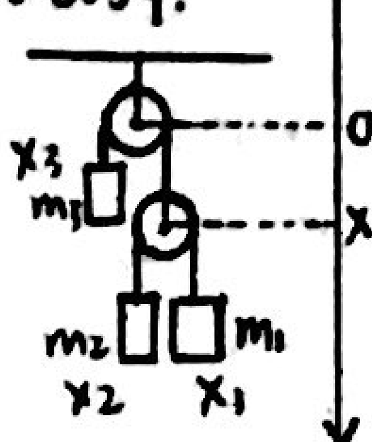
又 $\tan\theta=\frac{dz}{dr}\Rightarrow\frac{dz}{dr}=\frac{\omega^2r}{g}\xrightarrow[积分]{r=0时z=0}z=\frac{\omega^2}{2g}r^2$.

科里奥利力只有当物体相对转动参考系运动时才出现, 与相对速度成正比且垂直. [傅科摆北顺南逆]

①北半球河流冲刷右岸 ②火车对右轨偏压较大 ③自由落体偏东 ④傅科摆转动角速度 $\Omega=-\omega\sin\theta$ (θ为纬度) ⑤大气圈上高低气压环流能长期存在

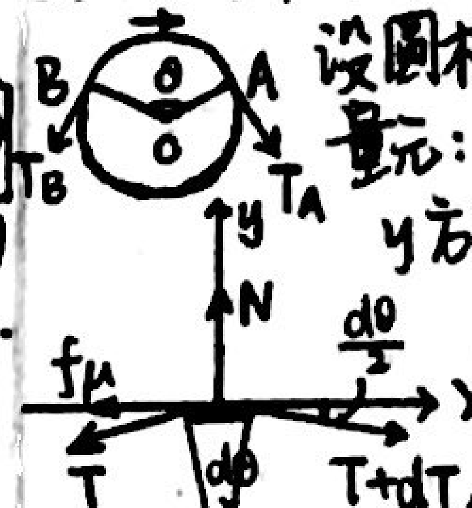
纬度φ处落体偏东距离 $y=\frac13\omega gt^3\cos\varphi$.

▷质点动力学



设动滑轮中心坐标$x$, 加速度a.

由绳长不变得 $x+x_3=l_1$, $(x_2-x)+(x_1-x)=l_2$. 微分两次得 $a+a_3=0$, $a_2+a_1-2a=0\xrightarrow{消a}a_2+a_1+2a_3=0$.



设圆柱右大于左力, 建坐标系xy. 对质量元: x方向: $(T+dT)\cos\frac{d\theta}{2}-T\cos\frac{d\theta}{2}-f_\mu=0$.

y方向: $-(T+dT)\sin\frac{d\theta}2-T\sin\frac{d\theta}2+N=0$.

又有 $f_\mu=\mu N$, $\sin\frac{d\theta}2\approx\frac{d\theta}2$, $\cos\frac{d\theta}{2}\approx1$.

$\Rightarrow dT=\mu N$, $\frac12dTd\theta+Td\theta=N$.

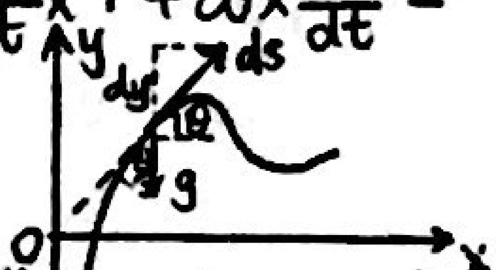
忽略二级小量: $\int_{T_B}^{T_A}\frac{dT}{T}=\mu\int_0^\theta d\theta\Rightarrow$

$\boxed{T_A=T_Be^{\mu\theta}}$ (若μ=0, $T_A=T_B$, 无摩擦滑轮)

▷质点运动学 $\boxed{a_\tau=\frac{dv}{dt},\ \rho=\frac{v^2}{a_n}}$

已知 $a=a(x)$: $a(x)=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}\Rightarrow a(x)dx=vdv\Rightarrow v^2-v_0^2=2\int_{x_0}^x a(x)dx$. 曲率 $k=\frac{|\vec r'\times\vec r''|}{|\vec r'|^3}$

曲率半径 $\rho=\frac1k=\frac{(1+y'^2)^{\frac32}}{|y''|}$ 自然坐标系下加速度 $\vec a=\frac{dv}{dt}\hat\tau+\frac{v^2}{\rho}\hat n$ 圆周运动线量与角量的关系: $v=R\omega$, $a_\tau=R\beta$, $a_n=R\omega^2$. 圆周运动矢量描述法: $\vec a=\frac{d\vec v}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec\omega\times\vec r)=\frac{d\vec\omega}{dt}\times\vec r+\vec\omega\times\frac{d\vec r}{dt}=\frac{d\vec\omega}{dt}\times\vec r+\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)$



已知 $a_\tau=-g\sin\theta$. 则 $dv=a_\tau dt=-g\sin\theta dt=-g\frac{dy}{ds}dt=-g\frac{dy}{v}\Rightarrow vdv=-gdy$

$\Rightarrow\int_{v_0}^v vdv=\int_{y_0}^y(-g)dy\Rightarrow v^2-v_0^2=2g(y_0-y)$.

平面极坐标系: $\vec v=v_r\hat r+v_\theta\hat\theta$, $\frac{d\hat r}{d\theta}=\hat\theta$, $\frac{d\hat\theta}{d\theta}=-\hat r$

$\boxed{\vec a=(\ddot r-r\dot\theta^2)\hat r+(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta)\hat\theta=a_r\hat r+a_\theta\hat\theta}$.

自然坐标系: 运动轨迹固定或已知; 平面极坐标系: 有心运动(加速度总是指向空间某一固定点)

$\boxed{v_r=\dot r,\ v_\theta=r\dot\theta}$ 极坐标系下质点对r=0点角动量 $L=mr^2\dot\theta\Rightarrow\frac{dL}{dt}=mr(2\dot r\dot\theta+r\ddot\theta)$

纬度φ傅科摆, 单摆振动角频率ω, 地球自转角频率Ω. 科里奥利力 $F_c=2m\dot x\hat x\times\vec\Omega+2m\dot y\hat y\times\vec\Omega$, 其在xy平面分量 $F_{c,xy}=2m\Omega\dot y\sin\varphi\hat x-2m\Omega\dot x\sin\varphi\hat y$ 单摆回复力 $F_0=-m\omega^2x\hat x-m\omega^2y\hat y$. 合力 $F_{xy}=(2m\Omega\dot y\sin\varphi-m\omega^2x)\hat x-(2m\Omega\dot x\sin\varphi+m\omega^2y)\hat y$. 转动角速度 $\Omega\sin\varphi$.

$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$. $\int\frac{1}{\sin^2x}dx=-\cot x+C$

$\int\frac1{\cos^2x}dx=\tan x+C$.