实用随机过程

胡太忠
thu@ustc.edu.cn

安徽 合肥 中国科学技术大学

2024 年 3 月

第 8 章　布朗运动

- 布朗运动的基本概念
- 布朗运动的基本性质

▶ 定义 8.1.1 称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为布朗运动过程（BMP, Brownian Motion process），若过程满足以下三条：

(i) $X(0) = 0$;

(ii) 具有独立平稳增量性;

(iii) 对 $\forall\ t > 0$, $X(t) \sim N(0, c^2 t)$, 其中 $c > 0$.

注：

1° 布朗运动过程也称为 Wiener 过程

2° 标准布朗运动过程：$c = 1$ [后面总假定 $c = 1$]

3° 历史

4° 样本路径: 处处连续, 处处不可导.

5° Markov 性质

6° 对 $\forall 0 < t_1 < \cdots < t_n$, $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)) \sim N_n(\mathbf{0}, \Sigma)$, 其中

$$\Sigma = \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{bmatrix}.$$

7° 对 $\forall 0 < s < t$,

$$[X(s)|X(t) = b] \sim N\left(\frac{s}{t}b, \frac{s(t-s)}{t}\right).$$

注： 设 $(Z_1, Z_2) \sim N_2\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}\right)$, 则

$$[Z_2|Z_1 = x] \sim N(m(x), \sigma_{22} - \sigma_{21}\sigma_{11}^{-1}\sigma_{12}),$$

其中 $m(x) = b + \sigma_{21}\sigma_{11}^{-1}(x - a)$.

- 定义 8.1.2 称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为高斯过程, 是指对 $\forall\, t_1 < t_2 < \cdots < t_n$,

$$(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$$

服从多元正态分布.

- 定义 8.1.3 $\{Z(t), 0 \leq t \leq 1\}$ 称为布朗桥, 若其满足以下三条:
  (i) $Z(0) = Z(1) = 0$;
  (ii) $\{Z(t), 0 < t < 1\}$ 为高斯过程;
  (iii) 对 $\forall\, 0 < s < t < 1$, $\mathrm{E}\, Z(t) = 0$,

$$\mathrm{Cov}\,(Z(s), Z(t)) = s(1-t).$$

- 【例 1】设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为 Brown 运动，则在给定 $X(1)=0$ 条件下，$\{X(t), 0 \leq t \leq 1\}$ 为 布朗桥.

证： 仅证

$$\mathrm{Cov}\,(X(s), X(t)|X(1)=0) = s(1-t), \quad \forall\ 0 < s < t < 1.$$

事实上，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}\,(X(s), X(t) \,|\, X(1)=0) \\
&= \mathrm{E}\,[X(s)X(t) \,|\, X(1)=0] \\
&= \mathrm{E}\,\{\mathrm{E}\,[X(s)X(t) \,|\, X(t), X(1)=0] \,\big|\, X(1)=0\} \\
&= \mathrm{E}\,\{\mathrm{E}\,[X(s)X(t) \,|\, X(t)] \,\big|\, X(1)=0\} \\
&= \mathrm{E}\,\left\{X(t) \cdot \frac{s}{t} X(t) \,\middle|\, X(1)=0\right\} = s(1-t).
\end{aligned}$$

- 【例 2】设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为 Brown 运动, 定义

$$Z(t) = X(t) - tX(1),$$

则 $\{Z(t), 0 \leq t \leq 1\}$ 为 布朗桥.

证: 仅证

$$\mathrm{Cov}\,(Z(s), Z(t)) = s(1-t), \quad \forall\ 0 < s < t < 1.$$

- **经验分布与布朗桥** 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid $\sim U(0,1)$，定义

$$
\begin{aligned}
N_n(s) &= \#\{i: X_i \le s, i = 1, \ldots n\}, \\
F_n(s) &= N_n(s)/n, \quad s \in [0,1] \quad [\text{经验分布}], \\
\alpha_n(s) &= \sqrt{n}\big(F_n(s) - s\big),
\end{aligned}
$$

则对 $s \in (0,1)$,

$$N_n(s) \sim B(n,s),$$

$$F_n(s) \longrightarrow s \ (\text{a.s.})$$

$$\alpha_n(s) \xrightarrow{d} N(0, s(1-s)).$$

可以进一步证明：

$$\{\alpha_n(s), s \in [0,1]\} \xrightarrow{w} \text{布朗桥}\ \{Z(t), t \in [0,1]\}.$$

验证:

1° $\{\alpha_n(s)\}$ 极限过程为高斯过程. 对 $\forall\, 0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_m < 1$,

$$\big(N_n(s_1), N_n(s_2) - N_n(s_1), \ldots, N_n(s_m) - N_n(s_{m-1}), n - N_n(s_m)\big)$$

$$\sim M(n; s_1, s_2 - s_1, \ldots, s_m - s_{m-1}, 1 - s_m),$$

于是,

$$\big(\alpha_n(s_1), \alpha_n(s_2) - \alpha_n(s_1), \ldots, \alpha_n(s_m) - \alpha_n(s_{m-1})\big) \xrightarrow{d} N_m(\mathbf{0}, \Sigma^*),$$

其中 $\Sigma^* = (\sigma^*_{ij})_{m\times m}$,

$$\begin{aligned} \sigma^*_{ii} &= (s_i - s_{i-1})(1 - s_i + s_{i-1}) \quad [\text{约定 } s_0 = 0] \\ \sigma^*_{ij} &= -(s_i - s_{i-1})(s_j - s_{j-1}), \quad i \neq j. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\big(\alpha_n(s_1), \alpha_n(s_2), \ldots, \alpha_n(s_m)\big) \xrightarrow{d} N_m(\mathbf{0}, \Sigma),$$

其中 $\Sigma = (\sigma_{ij})_{m\times m}$, $\sigma_{ij} = s_i(1 - s_j)$, $\forall\, i \leq j$.

验证：

2° 对 $\forall\, 0 < s < t < 1$,

$$\mathrm{Cov}\left(\alpha_n(s), \alpha_n(t)\right) \longrightarrow s(1-t).$$

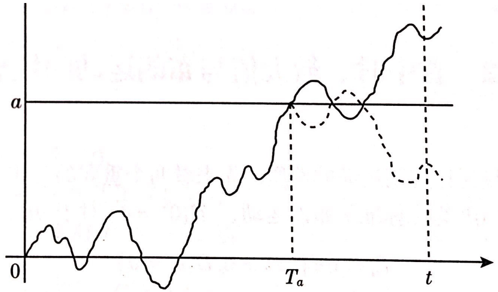
另证：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left(\alpha_n(s), \alpha_n(t)\right) &= n\ \mathrm{Cov}\left(F_n(s), F_n(t)\right) = \frac{1}{n}\mathrm{Cov}\left(N_n(s), N_n(t)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left[\mathrm{E}\left\{\mathrm{E}\left[N_n(s)N_n(t)|N_n(s)\right]\right\} - n^2 st\right] \\
&= \frac{1}{n}\left\{\mathrm{E}\left[N_n(s)\left(N_n(s) + (n - N_n(s))\frac{t-s}{1-s}\right)\right] - n^2 st\right\} \\
&= s(1-t).
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\sqrt{n}\sup_{0<s<1}|F_n(s) - s| > a\right) = \mathrm{P}\left(\max_{0<s<1}|Z(s)| > a\right), \quad a > 0.$$

设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为 Brown 运动, 定义击中时

$$T_a = \inf\{t : X(t) = a, t \geq 0\}.$$



- T_a 的性质 $(a > 0)$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X(t) \geq a) &= \mathrm{P}(X(t) \geq a | T_a \leq t) \cdot \mathrm{P}(T_a \leq t) \\ &\quad + \mathrm{P}(X(t) \geq a | T_a > t) \cdot \mathrm{P}(T_a > t) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{P}(T_a \leq t). \end{aligned}$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(T_a \le t) &= 2\,\mathrm{P}(X(t) \ge a) = 2[1 - \Phi(a/\sqrt{t})], \\
\mathrm{P}(T_a < \infty) &= 1.
\end{aligned}
$$

- T_a 的性质 $(a > 0)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,T_a &= \int_0^\infty \mathrm{P}(T_a > t)dt \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{a/\sqrt{t}} e^{-y^2/2} dy \right) dt \\
&= \frac{2a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{y^2} e^{-y^2/2} dy \ = +\infty.
\end{aligned}
$$

- 对 $\forall\ a \in \Re$,

$$
T_a \stackrel{\mathrm{d}}{=} T_{-a}.
$$

§8.2 击中时，最大值随机变量及反正弦律

- 最大值随机变量：对 $\forall\, a > 0$,

$$\mathrm{P}\left(\max_{0\le s\le t} X(s) \ge a\right) = \mathrm{P}\left(T_a \le t\right) = 2\,\mathrm{P}\left(X(t) \ge a\right).$$

- 反正弦律：对 $\forall x \in (0,1)$, $t > 0$,

$$\mathrm{P}\left(\text{BMP 于时间段 } (xt, t) \text{ 未访问 “0”}\right) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}. \qquad (*.1)$$

记

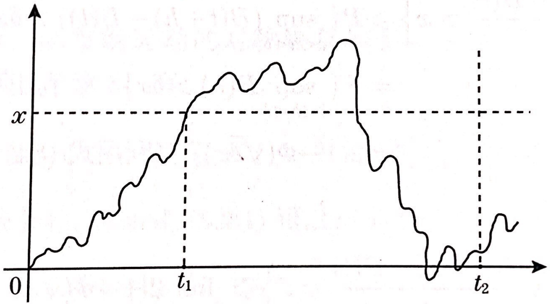
$$o(t_1, t_2) = \mathrm{P}\left(\text{BMP 于时间段 } (t_1, t_2) \text{ 至少访问 “0” 一次}\right),$$

则 $(*.1)$ 等价于

$$\mathrm{P}\left(o(t_1, t_2)\right) = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}, \quad t_1 < t_2. \qquad (*.2)$$

对 $\forall x > 0$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(o(t_1, t_2) | X(t_1) = x\right) &= \mathrm{P}\left(T_x \le t_2 - t_1\right) = 2\,\mathrm{P}\left(X(t_2 - t_1) > x\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \int_x^{\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2(t_2 - t_1)}\right\} dy
\end{aligned}
$$



往证 $(*.2)$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(o(t_1,t_2)\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,t_1}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{P}\left(o(t_1,t_2)|X(t_1)=x\right)\cdot e^{-x^2/(2t_1)}dx \\
&= \frac{2}{\pi\sqrt{t_1(t_2-t_1)}}\int_0^{\infty}\int_x^{\infty}\exp\left\{-\frac{y^2}{2(t_2-t_1)}\right\}dy\cdot e^{-x^2/(2t_1)}dx \\
&= \frac{2}{\pi\sqrt{t_2-t_1}}\int_0^{\infty}\int_{x\sqrt{t_1}}^{\infty}\exp\left\{-\frac{y^2}{2(t_2-t_1)}\right\}dy\cdot e^{-x^2/2}dx \\
&= \frac{2}{\pi\sqrt{\theta-1}}\int_0^{\infty}\int_x^{\infty}\exp\left\{-\frac{y^2}{2(\theta-1)}\right\}dy\cdot e^{-x^2/2}dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{\frac{x}{\sqrt{\theta-1}}}^{\infty}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}dy\cdot e^{-x^2/2}dx \\
&\stackrel{\mathrm{def}}{=} g(\theta),\quad \theta=t_2/t_1.
\end{aligned}
$$

往证 $(*.2)$:

再记

$$h(\theta) = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{1}{\theta}}.$$

以下仅证:

$$g(\theta) = h(\theta), \quad \forall\ \theta > 1.$$

注意以下两点:

- 当 $\theta \to \infty$ 时, $g(\theta) \to 1$, $h(\theta) \to 1$.
- $$g'(\theta) = h'(\theta) = \frac{1}{\pi\theta\sqrt{\theta - 1}}.$$

设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为 BMP.

- 几何 BMP: $Y(t) = e^{X(t)}$, $t \geq 0$
- 在一点被吸收的 BMP

固定 $x > 0$, 定义

$$Z(t) = \begin{cases} X(t), & T_x > t, \\ x, & T_x \leq t. \end{cases}$$

求 $Z(t)$ 的 cdf. [混合型]

- $\mathrm{P}(Z(t) = x) = \mathrm{P}(T_x \leq t) = 2\mathrm{P}(X(t) \geq x)$.
- 对 $\forall y < x$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Z(t) \leq y) &= \mathrm{P}\left(X(t) \leq y, \max_{0 \leq s \leq t} X(s) < x\right) \\ &= ? \end{aligned}$$

(续) 利用镜像原理,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z(t) \le y) &= \mathrm{P}\left(X(t) \le y, \max_{0 \le s \le t} X(s) < x\right) \\
&= \mathrm{P}(X(t) \le y) - \mathrm{P}\left(X(t) \le y, \max_{0 \le s \le t} X(s) \ge x\right) \\
&= \mathrm{P}(X(t) \le y) - \mathrm{P}\left(X(t) \le y \middle| \max_{0 \le s \le t} X(s) \ge x\right) \\
&\qquad \times \mathrm{P}\left(\max_{0 \le s \le t} X(s) \ge x\right) \\
&\overset{*}{=} \mathrm{P}(X(t) \le y) - \mathrm{P}\left(X(t) \ge 2x - y \middle| \max_{0 \le s \le t} X(s) \ge x\right) \\
&\qquad \times \mathrm{P}\left(\max_{0 \le s \le t} X(s) \ge x\right) \\
&= \mathrm{P}(X(t) \le y) - \mathrm{P}(X(t) \ge 2x - y).
\end{aligned}
$$

- 积分 BMP $\{Z(t), t \geq 0\}$:

$$Z(t) = \int_0^t X(s)\ ds.$$

  - $\{Z(t), t \geq 0\}$ 为高斯过程.
  - $\{Z(t), t \geq 0\}$ 非 Markov 过程; $\{(Z(t), X(t))\}$ 为 Markov 过程.
  - $\mathrm{E}\, Z(t) = 0$ 和协方差

$$\mathrm{Cov}\,(Z(s), Z(t)) = s^2\left(\frac{t}{2} - \frac{s}{6}\right).$$

  - $(X(t), Z(t)) \sim N_2(\mathbf{0}, \Sigma)$, 其中

$$\Sigma = \begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \end{pmatrix}.$$

▶ 定义 8.4.1 称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为漂移率为 μ 的布朗运动过程, 若过程满足以下三条:

(i) $X(0) = 0$;

(ii) 具有独立平稳增量性;

(iii) 对 $\forall\ t > 0$, $X(t) \sim N(\mu t, t)$.

注:

1° 布漂移率为 μ 的 BMP $\{X(t), t \geq 0\}$ 可以表示为

$$X(t) = \mu t + B(t),$$

其中 $\{B(t), t \geq 0\}$ 为标准 BMP.

2° 漂移系数为 μ 的 BMP可视为非对称简单随机游动过程的极限.

2° 漂移系数为 μ 的 BMP可视为非对称简单随机游动过程的极限.

考虑如下随机游动：一粒子时刻 0 于位置 0 点，每间隔 Δt 时间以概率 p 往右跳 Δx, 以概率 $q = 1 - p$ 往左跳 Δx. 记

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 步往右跳;} \\ -1, & \text{否则,} \end{cases}$$

则时刻 t 粒子位置为 $\quad Y(t) = \Delta x \sum_{i=1}^{[t/\Delta t]} X_i, \quad t > 0.$
设 $\Delta x = (\Delta t)^{1/2}$, $p = (1 + \mu\sqrt{\Delta t})/2$, 令 $\Delta t \to 0$ 得

$$\mathrm{E}\, Y(t) = \Delta x \left[\frac{t}{\Delta t}\right](2p - 1) \to \mu t,$$

$$\mathrm{Var}\,(Y(t)) = (\Delta x)^2 \left[\frac{t}{\Delta t}\right][1 - (2p-1)^2] \to t,$$

因此, $\{Y(t)\}$ 收敛到 BMP $\{X(t)\}$, 漂移系数为 μ. [应用中心极限定理、独立平稳增量性]

设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为漂移率为 μ 的 BMP

记号：

$$T_x = \inf\{t : X(t) = x, t \geq 0\}.$$

问题一：求

$$P(x) := \mathrm{P}\left(T_A < T_{-B} | X(0) = x\right), \quad -B < x < A.$$

问题二：求 $\mathrm{E}\left[\exp\{-\theta T_x\}\right]$.

注: 取 $h > 0$ 充分小, 则

$$\begin{aligned} P(T_A \leq h | X(0) = x) &= \mathrm{P}\left(\max_{0 \leq s \leq h} X(s) \geq A - x\right) \\ &\leq \mathrm{P}\left(\max_{0 \leq s \leq h} B(s) \geq A - x - |\mu| h\right) \\ &= 2\,\mathrm{P}\left(B(h) \geq A - x - |\mu| h\right) = \circ(h). \end{aligned}$$

解: 对 $Y = X(h) - X(0)$ 取条件, 得

$$\begin{aligned}
P(x) &= \mathrm{P}\left(h < T_A < T_{-B} | X(0) = x\right) \\
&\quad + \mathrm{P}\left(T_A \le h, T_A < T_{-B} | X(0) = x\right) \\
&= \mathrm{P}\left(h < T_A < T_{-B} | X(0) = x\right) + \circ(h) \\
&= \mathrm{E}\, P(x + Y) + \circ(h) \\
&= \mathrm{E}\left[P(x) + P'(x)Y + \frac{1}{2}P''(x)Y^2 + \cdots\right] + \circ(h) \\
&= P(x) + P'(x)\mu h + \frac{1}{2}P''(x)[h + \mu^2 h^2] + \circ(h),
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\mu P'(x) + \frac{1}{2}P''(x) = 0,$$

于是,

$$P(x) = c_1 + c_2 e^{-2\mu x}, \quad c_1, c_2 \text{ 待定}$$

由初值 $P(A)=1$, $P(-B)=0$ 得

$$P(x)=\frac{e^{2\mu B}-e^{-2\mu x}}{e^{2\mu B}-e^{-2\mu A}},\quad -B\le x\le A. \tag{*.3}$$

注:

- 考虑标准 BMP $\{B(t)\}$,

$$\mathrm{P}\left(\text{过程在达到 } d \text{ 之前先达到 } c|B(0)=x\right)=\frac{x-d}{c-d},\quad d<x<c.$$

- 当 $x=0$ 时,

$$\mathrm{P}\left(T_A<T_B\right)=\frac{e^{2\mu B}-1}{e^{2\mu B}-e^{-2\mu A}},\quad -B\le 0\le A.$$

- 当 $x=0$, $\mu>0$ 时, 令 $B\to\infty$ 得

$$\mathrm{P}\left(T_A<\infty\right)=1,\quad A>0.$$

此时, 过程漂向正无穷 [注意与标准 BMP 对比].

- 当 $\mu < 0$ 时, 令 $x = 0$ 且 $B \to +\infty$ 得

$$\mathrm{P}\left(T_A < \infty\right) = e^{2\mu A}, \quad A \geq 0. \tag{$*$.4}$$

对偶地，当 $\mu > 0$ 时,

$$\mathrm{P}\left(T_{-B} < \infty\right) = e^{-2\mu B}, \quad B \geq 0.$$

($*$.4) 的解释: 当 $\mu < 0$ 时, 过程漂向负无穷, 但

$$\max_{t \geq 0} X(t) \sim \ \mathrm{Exp}(2|\mu|),$$

$$\mathrm{P}\left(\max_{t \geq 0} X(t) \geq A\right) = \mathrm{P}\left(T_A < \infty\right) = e^{-2|\mu|A}, \quad A > 0.$$

▶ 【例 8.4(C)】(控制生产过程) 设生产过程的状态连续变化，服从漂移系数 $\mu > 0$ 的 BMP $\{X(t)\}$, 状态为正表示生产状态的恶化. 取定 x 和 B, 满足 $0 < x < B$. 每当 BMP 的状态达到 B 时，生产停顿, 付出代价 R 之后过程回复到状态 0, 在以下两种策略下，求长时间之后单位时间的平均费用.

策略 1：不采取其它措施
构造一个更新过程, 更新点对应于过程状态处于“0”, 于是

$$\text{长时间的平均费用} = \frac{R}{\mathrm{E}\,[\text{一个循环时长}]}.$$

记

$$f(x) = \mathrm{E}\,[T_x | X(0) = 0], \quad x > 0.$$

取 $h > 0$ 充分小, 对 $Y = X(h) - X(0) = X(h)$ 取条件得

$$\begin{aligned} f(x) &= h + \mathrm{E}\,[f(x - Y)] + o(h) \\ &= h + \mathrm{E}\left[f(x) - f'(x)Y + \frac{1}{2}f''(x)Y^2 + \cdots\right] + o(h) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$f(x) = h + f(x) - f'(x)\mu h + \frac{1}{2}f''(x)h + \circ(h),$$

$$1 = \mu f'(x) - \frac{1}{2}f''(x), \quad x > 0. \tag{$*.5$}$$

另一方面,

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y > 0.$$

于是,

$$f(x) = c\,x, \quad x > 0.$$

代入 $(*.5)$ 得 $c = 1/\mu$, 于是

$$f(x) = \frac{x}{\mu}, \quad x \geq 0.$$

在策略 1 之下, 长时间的平均费用为 $R/f(B) = R\mu/B$.

策略 2：固定 $0 < x < B$，每当过程状态到达 x 时，立即进行维修. 以概率 α_x 修复成功，回到状态 0；以概率 $1-\alpha_x$ 修理失败，生产停顿. 每次修理费用为 c.

构造一个更新过程，更新点对应于过程状态达到“x”的时刻，一个循环的期望长度为 $f(x)$. 于是在策略 2 之下，长时间的平均费用为

$$\frac{c+(1-\alpha_x)R}{f(x)} = \frac{\mu[c+(1-\alpha_x)R]}{x}.$$

若已知 α_x 的具体形式，可以比较策略 1 与策略 2 的优劣.

▶ 命题 8.4.2 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为漂移率为 $\mu \geq 0$ 的 BMP, 则

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \max_{0\leq s\leq t} X(s) = \mu.$$

证: 构造更新过程 $\{N(t)\}$, 更新点对应于 $\{T_n, n \geq 1\}$, 其中 T_n 为状态 n 的首达时, 约定 $T_0 = 0$, 则 $\{T_n - T_{n-1}, n \geq 1\}$ iid $\sim T_1$,

$$N(t) \leq \max_{0\leq s\leq t} X(s) \leq N(t) + 1, \qquad \mathrm{E}\, T_1 = \frac{1}{\mu}.$$

因此,

$$\frac{N(t)}{t} \longrightarrow \frac{1}{\mathrm{E}\, T_1} = \mu \quad \text{(a.s.)}$$

※ 当 $\mu \leq 0$ 时,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \max_{0\leq s\leq t} X(s) = 0.$$

§8.4 漂移 BMP

问题二： 求 $\mathrm{E}\,[\exp\{-\theta T_x\}]$ (对任意 x, μ)

以下设 $x > 0$, 记

$$g(x) = \mathrm{E}\,[\exp\{-\theta T_x\}], \quad \theta > 0.$$

对 $\forall\, x, y > 0$,

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \mathrm{E}\,[\exp\{-\theta T_x\} \cdot \exp\{-\theta(T_{x+y} - T_x)\}] \\ &= \mathrm{E}\,[\exp\{-\theta T_x\}] \cdot \mathrm{E}\,[\exp\{-\theta(T_{x+y} - T_x)\}] \\ &= f(x)f(y) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$g(x) = e^{-cx}, \quad x \geq 0,\ c \text{ 待定}.$$

取 $h>0$ 充分小, 对 $Y=X(h)-X(0)=X(h)$ 取条件得

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathrm{E}\left[\exp\{-\theta(h+T_{x-Y})\}\right]+\circ(h) \\ &= e^{-\theta h}\cdot\mathrm{E}\left[g(x-Y)\right]+\circ(h) \\ &= e^{-\theta h}\cdot\left[g(x)-\mu h g'(x)+\frac{h}{2}g''(x)\right]+\circ(h) \\ &= g(x)[1-\theta h]-\mu h g'(x)+\frac{h}{2}g''(x)+\circ(h) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\theta g(x)=-\mu g'(x)+\frac{1}{2}g''(x).$$

将 $g(x)=e^{-cx}$ 代入得 $c^2+2\mu c-2\theta=0$. 故

$$c=-\mu+\sqrt{\mu^2+2\theta}>0$$

(无论 $\mu\geq 0$ 还是 $\mu\leq 0$).

- 命题 8.4.1 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为漂移率为 μ 的 BMP, 则

$$\mathrm{E}\left[e^{-\theta T_x}\right] = \exp\left\{-x\left[\sqrt{\mu^2 + 2\theta} - \mu\right]\right\},$$

其中 $x \geq 0$, $\theta \geq 0$.

基于鞅分析 BMP

- 命题 8.4.3 设 $\{B(t), t \geq 0\}$ 为标准 BMP, 则如下的过程都是鞅:
  (a) $Y(t) = B(t)$;
  (b) $Y(t) = B^2(t) - t$;
  (c) $Y(t) = \exp\left\{cB(t) - c^2 t/2\right\}, \forall c$.

证: (a) $\surd$. (b) 对 $\forall\, 0 < s < t$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\left[B^2(t)|B(u), 0 \leq u \leq s\right] \\ &= \mathrm{E}\left\{\left(B(s) + [B(t) - B(s)]\right)^2 \Big| B(u), 0 \leq u \leq s\right\} \\ &= B^2(s) + t - s. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\left[B^2(t)|B^2(u), 0 \leq u \leq s\right] \\ &= \mathrm{E}\left\{\mathrm{E}\left[B^2(t)|B(u), 0 \leq u \leq s\right] \Big| B^2(u), 0 \leq u \leq s\right\} = B^2(s) + t - s. \end{aligned}$$

(续) (c) 利用

$$\mathrm{E}\exp\{cB(t)\} = \exp\left\{\frac{c^2}{2}t\right\}, \quad \forall c,$$

于是, 对 $\forall 0 < s < t$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\exp\{cB(t)\}|B(u), 0 \le u \le s\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\exp\left\{cB(s) + c[B(t) - B(s)]\right\}\Big|B(u), 0 \le u \le s\right] \\
&= \exp\{cB(s)\} \cdot \mathrm{E}\left[\exp\{c(B(t) - B(s))\}\right] \\
&= \exp\{cB(s)\} \cdot \exp\left\{\frac{c^2}{2}(t-s)\right\}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\mathrm{E}\left[Y(t)|B(u), 0 \le u \le s\right] = Y(s),$$

$$\mathrm{E}\left[Y(t)|Y(u), 0 \le u \le s\right] = \mathrm{E}\left[Y(t)|B(u), 0 \le u \le s\right] = Y(s).$$

基于鞅分析 BMP

设 $X(t) = B(t) + \mu t$, 即漂移率为 μ 的 BMP, 定义

$$T = \min\{t: \ X(t) = A \text{ 或 } X(t) = -B\}, \quad -B < 0 < A.$$

求 $\mathrm{E}\, T$ 及

$$P_A = \mathrm{P}\left(X(T) = A\right) \quad [\text{过程访问 } -B \text{ 之前先访问 } A]$$

解: 注意到 T 如下鞅的停时:

$$Y(t) = \exp\left\{cB(t) - c^2 t/2\right\} = \exp\left\{cX(t) - c\mu t - c^2 t/2\right\}.$$

利用鞅停止定理 (停止过程一致有界) 得

$$\mathrm{E}\, \exp\left\{cX(T) - c\mu T - c^2 T/2\right\} = 1.$$

取 $c = -2\mu$ 得

$$P_A = \frac{e^{2\mu B} - 1}{e^{2\mu B} - e^{-2\mu A}}.$$

基于鞅分析 BMP

再求 $\mathrm{E}\,T$: 此时利用鞅 $B(t)=X(t)-\mu t$ 及鞅停止定理, 得

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{E}\,[X(T)-\mu T] \\ &= AP_A - B(1-P_A) - \mu \mathrm{E}\,T \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\mathrm{E}\,T = \frac{Ae^{2\mu B}+Be^{-2\mu A}-A-B}{\mu[e^{2\mu B}-e^{-2\mu A}]}.$$

第 8 章作业

1，4，5，7，9，10，14