实用随机过程

胡太忠
thu@ustc.edu.cn

安徽 合肥 中国科学技术大学

2024 年 2 月

第 7 章　随机游动

- 对偶性
- 可交换性

- **对偶原则** 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid, $g : \Re^n \to \Re$ 满足

$$\mathrm{E}\,|g(X_1, X_2, \ldots, X_n)| < \infty,$$

则

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1),$$

于是,

$$\mathrm{E}\,g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \mathrm{E}\,g(X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1).$$

※ 巧妙应用对偶原理，能收到意想不到的结果.

※ 总假设如下随机游动过程 (RWP): $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid,

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n \geq 1.$$

- **命题 7.1.1** 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid, $\mathrm{E}\, X_1 > 0$, 定义

$$N = \min\{n : X_1 + \cdots + X_n > 0\},$$

则 $\mathrm{E}\, N < \infty$.

※ 巧妙应用对偶原理，能收到意想不到的结果.

证: 记 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\, N &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}\,(N > n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_1 \le 0, X_1 + X_2 \le 0, \ldots, \sum_{i=1}^{n} X_i \le 0\right) \\
&\overset{*}{=} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_n \le 0, X_n + X_{n-1} \le 0, \ldots, \sum_{i=1}^{n} X_{n+1-i} \le 0\right) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\,(S_n \le S_{n-1}, S_n \le S_{n-2}, \ldots, S_n \le S_1, S_n \le 0)
\end{aligned}$$

(续):

约定 $S_0 = 0$. 将 $\{S_n, n \geq 0\}$ 达到最小值的时刻看作一个更新点, 则构成一个延迟更新过程 $\{N^*(k), k \geq 0\}$. 于是

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\, N &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\,(S_n \text{ 于时刻 } n \text{ 达到一个新低}) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\,(\text{于时刻 } n \text{ 发生一个更新}) \\ &= 1 + \mathrm{E}\, N^*(\infty). \end{aligned}$$

$\mathrm{E}\, X_1 > 0$ 蕴涵 $S_n \to \infty$, $N^*(\infty) < \infty$. 另一方面, 由更新过程理论知仅有两种情形:

- 若 $F(\infty) = 1$ (F 为间隔分布), 则 $N^*(\infty) = \infty$;
- 若 $F(\infty) < 1$, 则 $N^*(\infty) < \infty$ 且 $N^*(\infty) \sim \mathrm{Geo}(\overline{F}(\infty))$. ∎

- 命题 7.1.2 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid, $\{S_n\}$ 同前, 定义

$$R_n = \#\{S_0, S_1, S_2, \dots, S_n\},$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{E}\, R_n}{n} = \mathrm{P}\,(\text{RWP 永不回到 } 0).$$

证: 注意

$$R_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} I_k,$$

其中

$$I_k = \begin{cases} 1, & S_k \neq S_j, \forall j < k; \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,R_n &= 1+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}\left(S_k\neq S_{k-1},S_k\neq S_{k-2},\dots,S_k\neq S_0\right)\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}\left(X_k\neq 0,X_k+X_{k-1}\neq 0,\dots,X_k+\dots+X_1\neq 0\right)\\
&\overset{*}{=} 1+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}\left(X_1\neq 0,X_1+X_2\neq 0,\dots,X_1+\dots+X_k\neq 0\right)\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}\left(S_1\neq 0,S_2\neq 0,\dots,S_k\neq 0\right)\\
&\overset{*}{=} 1+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}\left(T_0>k\right). \qquad [T_0\text{ 是 RWP 首次回到 0 的时刻}]
\end{aligned}
$$

于是,

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{E}\,R_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(T_0>n\right)=\mathrm{P}\left(T_0=+\infty\right)=\mathrm{P}\left(\text{RWP 永不回到 0}\right).
$$

▶ 【例 7.1(A)】 简单 RWP $\{S_n\}$, 其中 $\mathrm{P}(X_1=1)=p$, $\mathrm{P}(X_1=-1)=1-p$. 求 $\lim \mathrm{E}[R_n/n]$.

解: 当 $p=1/2$ 时, $\mathrm{E}[R_n/n] \to \mathrm{P}(\text{RWP 永不回到 } 0)=0$.

当 $p>1/2$ 时, 令 $\alpha=\mathrm{P}(\text{回到 } 0|X_1=1)$, 则

$$\mathrm{P}(\text{回到 } 0)=p\alpha+(1-p)\cdot \mathrm{P}(\text{回到 } 0|X_1=-1)=p\alpha+1-p.$$

为求 α, 对 X_2 取条件

$$\alpha=p\cdot \mathrm{P}(\text{回到 } 0|X_1=1,X_2=1)+1-p=p\alpha^2+1-p,$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha=(1-p)/p \qquad [\text{另解 } \alpha=1 \text{ 舍去}]$$

$$\mathrm{P}(\text{回到 } 0)=2-2p, \qquad \frac{\mathrm{E}\,R_n}{n}=2p-1.$$

当 $p<1/2$ 时, $\mathrm{E}\,R_n/n \to 1-2p$. ∎

▶ 命题 7.1.3 考虑对称简单 RWP, 对 $\forall k \neq 0$, 粒子在回到原点之前访问 k 的期望次数为 1.

解: 不妨设 $k > 0$, 记 T_j 为从原点出发首次访问 "j" 时刻, 定义

$$I_n = \begin{cases} 1, & S_n = k, T_0 > n, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

则回到原点之前粒子访问 k 的次数 $Y = \sum_{n=1}^{\infty} I_n$,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,Y &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(S_1 > 0, \ldots, S_{n-1} > 0, S_n = k\right) \\ &\overset{*}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_n > 0, X_n + X_{n-1} > 0, \ldots, X_n + \cdots + X_1 = k\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(S_n > S_{n-1}, S_n > S_{n-2}, \ldots, S_n > S_1, S_n = k\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(T_k = n\right) = \mathrm{P}\left(T_k < +\infty\right) = 1. \quad [\text{常返性}] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- G/G/1 排队系统

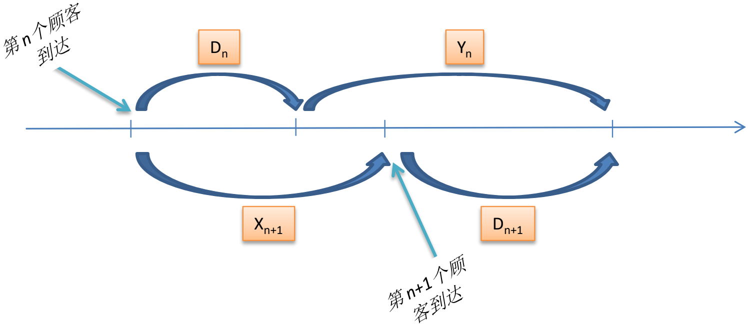
  顾客到达间隔时间序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim F$;

  服务台提供的服务时间序列 $\{Y_n, n \geq 1\}$ iid $\sim G$;

  顾客在队列中排队等待时间序列 $\{D_n, n \geq 1\}$.

于是,

$$D_{n+1} = (D_n + Y_n - X_{n+1})_+, \quad n \geq 1. \tag{*.1}$$



▶ 命题 7.1.4 在 G/G/1 排队系统中，记 $U_n = Y_n - X_{n+1}$，$S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$，$n \geq 1$，则

$$\mathrm{P}\left(D_{n+1} \geq c\right) = \mathrm{P}\left(T_c \leq n\right), \quad \forall\, c > 0, \qquad (*.2)$$

其中 T_c 是随机游动过程 $\{S_n\}$ 的首达 c 的时刻，约定 $S_0 = 0$.

解:

$$\begin{aligned}
D_{n+1} &= \max\{0, D_n + U_n\} \\
&= \max\left\{0, U_n + \max\{0, D_{n-1} + U_{n-1}\}\right\} \\
&= \max\left\{0, U_n, U_n + U_{n-1} + D_{n-1}\right\} \\
&= \cdots\cdots \\
&= \max\{0, U_n, U_n + U_{n-1}, \ldots, U_n + \cdots + U_1\} \\
&\overset{*}{=} \max\{0, S_1, S_2, \ldots, S_n\}.
\end{aligned}$$

注:

$$\mathrm{P}\,(D_{n+1} \geq c) = \mathrm{P}\,(T_c \leq n), \quad \forall\, c > 0, \tag{$*$.2}$$

- 记
$$\mathrm{P}\,(D_\infty \geq c) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\,(D_n \geq c) \quad [\text{存在性?}],$$
则 $\mathrm{P}\,(D_\infty \geq c) = \mathrm{P}\,(T_c < \infty)$.
- 当 $\mathrm{E}\,X_1 < \mathrm{E}\,Y_1$ 时, $S_n \to \infty$, 于是 $\mathrm{P}\,(D_\infty \geq c) = 1$, 队长趋于无穷.
- 当 $\mathrm{E}\,X_1 = \mathrm{E}\,Y_1$ 时, $\mathrm{P}\,(D_\infty \geq c) = 1$.
- 当 $\mathrm{E}\,X_1 > \mathrm{E}\,Y_1$ 时, 可利用鞅方法求 D_∞ 的分布.

- 定义 7.2.1

  $\{X_1,\ldots,X_n\}$ 的（有限）可交换性.

  $\{X_n, n\geq 1\}$ 的（无限）可交换性.

- de Finetti 定理 $\{X_n, n\geq 1\}$ 无限可交换性等价于以下任一条：
  - 对 $\forall\, n>1$, $(X_1,\ldots,X_n)$ 的联合 cdf 为

    $$F(x_1,\ldots,x_n)=\int_\Lambda \prod_{i=1}^n F_\lambda(x_i)dG(\lambda), \qquad (*.3)$$

    其中 G 和 F_λ 皆为 cdf.
  - 存在 $\{Y_k, k\geq 1\}$ iid, 且独立于另一个 rv U, 且存在函数 ψ, 使得对 $\forall n\geq 2$,

    $$(X_1,X_2,\ldots,X_n)\stackrel{\mathrm{d}}{=}(\psi(Y_1,U),\psi(Y_2,U),\ldots,\psi(Y_n,U)).$$

注:

$$\text{有限可交换性} \not\Longrightarrow \text{无限可交换性}$$

【反例】 设 (X_1, X_2) 具有如下概率分布:

$$\mathrm{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \mathrm{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{1}{2},$$

则 X_1, X_2 有限可交换, 但非无限可交换（指嵌入到无限可交换的随机变量序列的前 2 个）.

(X_1, X_2) 不具有 $(*.3)$ 的分布表达.

作业

第 7 章作业

2， 4， 5， 6