实用随机过程

胡太忠
thu@ustc.edu.cn

安徽 合肥 中国科学技术大学

2024 年 2 月

第 6 章　鞅

- 基本概念（鞅、上鞅、下鞅）
- 鞅的基本应用
- 鞅收敛定理

- 定义 6.1.1 $\{Z_n, n \ge 1\}$ 称为鞅 (Martingale), 如果 $\mathrm{E}\,|Z_n| < \infty$, $\forall n$, 且

$$\mathrm{E}\,[Z_{n+1}|Z_1, Z_2, \ldots, Z_n] = Z_n, \quad \text{a.s.} \quad \forall n \ge 1.$$

※ 鞅体现了公平赌博的思想

※ 期望性质：$\mathrm{E}\,Z_n = \mathrm{E}\,Z_1$, $\forall\, n > 1$.

※ 举例：

- 设 $\{X_n\}$ 独立, $\mathrm{E}\,X_n = 0$, 记 $Z_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, 则 $\{Z_n\}$ 为鞅.
- 分支过程 $\{X_n\}$, 每个个体期望后代数为 m, 记 $Z_n = X_n/m^n$, 则 $\{Z_n\}$ 为鞅.
- 设 $\{X_n\}$ 独立, $\mathrm{E}\,X_n = 1$, 记 $Z_n = \prod_{j=1}^{n} X_j$, 则 $\{Z_n\}$ 为鞅.

(续) 举例：以下两个过程 $\{Z_n\}$ 为鞅.

- 设 $\{X, Y_n, n \geq 1\}$ 为任意随机变量序列, 满足 $\mathrm{E}\,|X| < \infty$, 定义
$$Z_n = \mathrm{E}\,[X|Y_1, Y_2, \ldots, Y_n], \quad n \geq 1. \qquad (*.1)$$
- 已知任意 $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足 $\mathrm{E}\,|X_n| < \infty$ （不必独立），定义
$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} \{X_i - \mathrm{E}\,[X_i|X_1, \ldots, X_{i-1}]\}, \quad n \geq 1.$$

※ 对任意 $X, \mathbf{U}, \mathbf{V}$, 满足 $\mathrm{E}\,|X| < \infty$, 则
$$\mathrm{E}\,[X|\mathbf{U}] = \mathrm{E}\,\{\mathrm{E}\,[X|\mathbf{U}, \mathbf{V}]\,|\,\mathbf{U}\}.$$

※ 在 $(*.1)$ 中, $Z_n \in \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$, 于是
$$\mathrm{E}\,[Z_{n+1}|Z_1, \ldots, Z_n] = \mathrm{E}\,\{\mathrm{E}\,[Z_{n+1}|Y_1, \ldots, Y_n]\,|\,Z_1, \ldots, Z_n\},$$
$$\mathrm{E}\,[Z_{n+1}|Y_1, \ldots, Y_n] = \mathrm{E}\,\{\mathrm{E}\,[X|Y_1, \ldots, Y_n, Y_{n+1}]\,|\,Y_1, \ldots, Y_n\}.$$

- 定义 6.2.1

(1) 可以取正无穷的正整数值随机量 N 称为 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 的一个随机时刻，如果 $\{N = n\}$ 由 $\{Z_k, k = 1, \ldots, n\}$ 确定.

特别，当 $\mathrm{P}(N < +\infty) = 1$ 时，则称 N 为一个停时.

(2) 设 N 为 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 的一个随机时刻，定义

$$\overline{Z}_n = Z_{n \wedge N} = \begin{cases} Z_n, & n \leq N, \\ Z_N, & n \geq N, \end{cases}$$

则称 $\{\overline{Z}_n, n \geq 1\}$ 为 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 的停止过程.

Example

考虑独立重复试验，在任一次试验中可能出现的结果是“0”和“1”中之一，此时样本空间

$$\Omega = \left\{\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots) : \ \omega_i \in \{0, 1\}, \ \forall\, i \geq 1\right\}.$$

假设一个随机变量 N 满足

$$N(\omega_1, \ldots, \omega_{10}, 0, 0, \ldots) = 10,$$

$$N(\omega_1, \ldots, \omega_{10}, 1, 1, \ldots) = 11.$$

问题：N 是停时吗？

※ N 不是停时，因为若 N 为一个停时，则

$$N(\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}, \omega_{n+2}, \ldots) = n$$

$$\Longrightarrow N(\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega'_{n+1}, \omega'_{n+2}, \ldots) = n, \quad \forall \omega'_j, \ j > n.$$

- 命题 6.2.1 设 N 为鞅 $\{Z_n, n \ge 1\}$ 的随机时刻，则 $\{\overline{Z}_n, n \ge 1\}$ 为鞅.

证: 定义

$$I_n = \begin{cases} 1, & N \ge n, \\ 0, & N < n, \end{cases}$$

则 $\overline{Z}_n = \overline{Z}_{n-1} + I_n(Z_n - Z_{n-1})$, $n \ge 2$. 于是,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,[\overline{Z}_n | Z_1, \ldots, Z_{n-1}] &= \mathrm{E}\,[\overline{Z}_{n-1} + I_n(Z_n - Z_{n-1}) | Z_1, \ldots, Z_{n-1}] \\
&= \overline{Z}_{n-1} + I_n \cdot \mathrm{E}\left[(Z_n - Z_{n-1}) | Z_1, \ldots, Z_{n-1}\right] \\
&= \overline{Z}_{n-1}, \\
\mathrm{E}\,[\overline{Z}_n | \overline{Z}_1, \ldots, \overline{Z}_{n-1}] &= \mathrm{E}\Big\{\mathrm{E}\left[\overline{Z}_n | \overline{Z}_1, \ldots, \overline{Z}_{n-1}; Z_1, \ldots, Z_{n-1}\right] \Big| \overline{Z}_1, \ldots, \overline{Z}_{n-1}\Big\} \\
&= \mathrm{E}\Big\{\mathrm{E}\left[\overline{Z}_n | Z_1, \ldots, Z_{n-1}\right] \Big| \overline{Z}_1, \ldots, \overline{Z}_{n-1}\Big\} \\
&= \mathrm{E}\,\{\overline{Z}_{n-1} | \overline{Z}_1, \ldots, \overline{Z}_{n-1}\} = \overline{Z}_{n-1}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

注：

- 设 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 为鞅，则 $\mathrm{E}\, Z_n = \mathrm{E}\, Z_1$, $\forall n$;
  若进一步假设，N 为随机时刻，则 $\mathrm{E}\, \overline{Z}_n = \mathrm{E}\, \overline{Z}_1 = \mathrm{E}\, Z_1$, $\forall n$.
- 若 N 为一个停时，则 $\overline{Z}_n \longrightarrow Z_N$, a.s. $(n \to \infty)$.
  但 $\mathrm{E}\, \overline{Z}_n \overset{?}{\longrightarrow} \mathrm{E}\, Z_N \quad (n \to \infty)$.
  寻求条件，使得 $\mathrm{E}\, Z_1 = \mathrm{E}\, Z_N$.

▶ 定理 6.2.2 设 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 为鞅，N 为停时. 若以下三条之一满足：

(i) $\overline{Z}_n$ 一致有界; (ii) N 有界;

(iii) $\mathrm{E}\, N < \infty$，且存在常数 $M < \infty$ 使得

$$\mathrm{E}\left[\left| Z_{n+1} - Z_n \right| \Big| Z_1, \ldots, Z_n \right] \leq M,$$

则 $\mathrm{E}\, Z_1 = \mathrm{E}\, Z_N$.

▶ 推论 6.2.3 (Wald 等式) 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid, $\mathrm{E}\,|X_1| < \infty$, N 为停时, $\mathrm{E}\,N < \infty$, 则

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \mathrm{E}\,N \cdot \mathrm{E}\,X_1.$$

证: 记 $\mu = \mathrm{E}\,X_1$, $Z_n = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)$, $n \geq 1$, 则 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 为鞅, 且

$$\mathrm{E}\,Z_N = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] - \mathrm{E}\,N \cdot \mu.$$

注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[|Z_{n+1} - Z_n| \,|\, Z_1, \ldots, Z_n\right] &= \mathrm{E}\left[|X_{n+1} - \mu| \,|\, Z_1, \ldots, Z_n\right] \\ &\leq \mathrm{E}\,|X_1| + |\mu|,\end{aligned}$$

于是由定理 6.2.2 得

$$\mathrm{E}\,Z_N = \mathrm{E}\,Z_1 = 0. \quad \blacksquare$$

- 【例 6.2(A)】(花样问题) 设 $\{W_n, n \geq 1\}$ iid,

$$\mathrm{P}(W_1 = 0) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(W_1 = 1) = \frac{1}{3}, \quad \mathrm{P}(W_1 = 2) = \frac{1}{6}.$$

记 N 为花样 “020” 首次发生时刻. 求 $\mathrm{E}\, N$.

※ 方法回顾

- 初等概率方法（取条件期望）
- 应用延迟更新过程理论 (Blackwell 定理)
- 应用更新酬劳过程理论

※ 如何理解公平赌博?

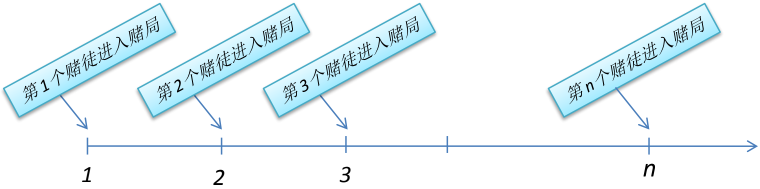
设

$$\mathrm{P}(Z=1)=p, \quad \mathrm{P}(Z=0)=1-p.$$

一个人以 \$$a$ 赌 Z 出现 “1”， 若 $Z=1$, 则该赌徒得 \$$x$; 若出现 “0”, 则该赌徒输 \$$a$. 求 x 使得该赌博为公平的.

$$\begin{aligned} \text{公平赌博} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{期望所赢的额度为零} \\ &\Longleftrightarrow \quad p(x-a)+q(0-a)=0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x=\frac{a}{p}. \end{aligned}$$

§6.2 停时



解: 引进公平赌博模型. 有一系列赌徒进行公平赌博, 第 i 个赌徒于时刻 i 开始进入赌局, 进行赌博, 一开始赌金为 §1.

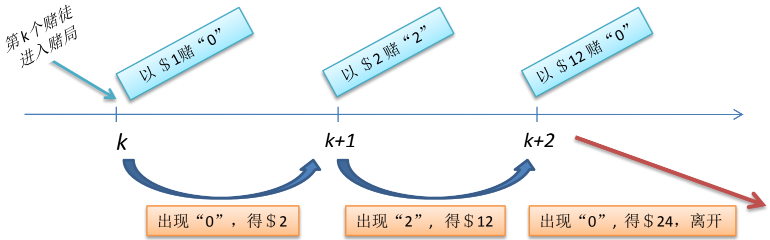
(1) 首局赌"0", 若"0"出现, 则赌徒得 $\$2$;

(2) 进而下局赌"2", 若"2"出现, 则赌徒得 $\$12$;

(3) 再下局赌"0", 若"0"出现, 则赌徒得 $\$24$.

一赌徒在任一局中输, 则其累计输 $\$1$; 若连赢 3 局, 则其累计赢 $\$23$.

(续): 一个赌徒连赢三局示意图

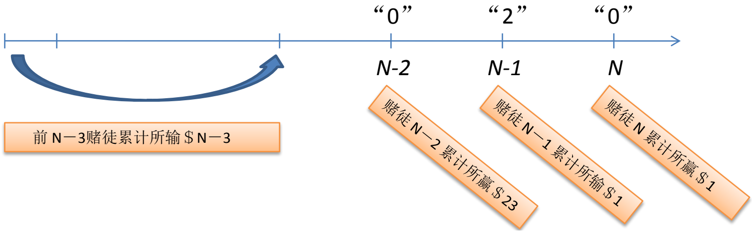


记 X_n 为到时刻 n 为止赌场累计所赢额（即赌徒累计所输额度），则

- $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一个鞅;
- N 为 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的一个停时 ($\{X_n\}$ 与 $\{W_n\}$ 之间一一对应);
- $|X_{n+1} - X_n| \leq 3 \times 23.$

§6.2 停时

(续):



由定理 6.2.2 得 $\quad \mathrm{E}\, X_N = 0.$

注意到

$$X_N = (N-3) - 23 + 1 - 1 = N - 26,$$

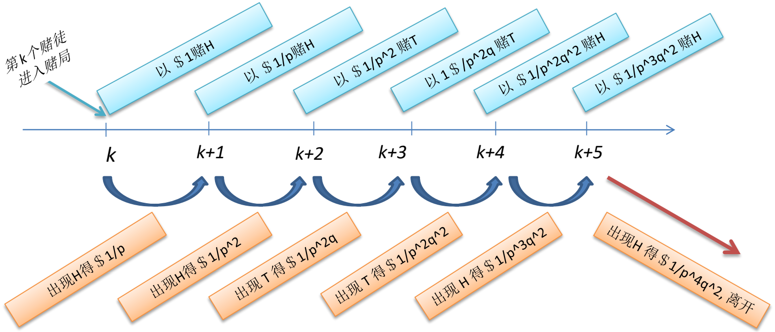
于是, $\mathrm{E}\, N = 26.$ ∎

※ 停时 N 可以定义为

$$N = \min\{n : \ X_n = n - 26\}.$$

▶【例 6.2(A′)】(花样问题) 独立抛掷硬币，正面“H”出现的概率为 p，反面“T”出现的概率为 $q=1-p$. 记 N 为花样“HHTTHH”出现的时刻. 求 $\mathrm{E}\,N$.

解：同前引进公平赌博模型. 第 k 个赌徒连赢 6 局示意图：

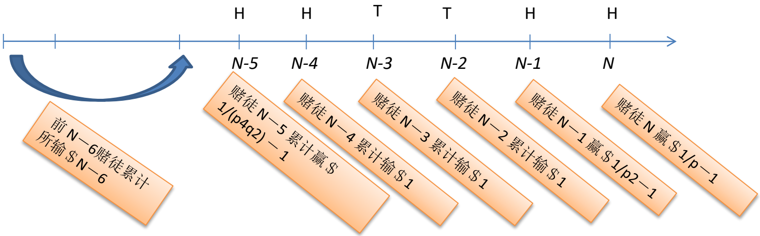


§6.2 停时与鞅停止定理

(续) 记 X_n 为到时刻 n 为止赌场累计所赢额（即赌徒累计所输额度），则 $\mathrm{E}\, X_N = 0$. 又，

$$X_N = N - 6 - (p^{-4}q^{-2} - 1) + 3 - (p^{-2} - 1) - (p^{-1} - 1),$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{E}\, N = p^{-4}q^{-2} + p^{-2} + p^{-1}.$$



- 【例 6.2(B)】 简单随机游动过程 $\{S_n\}$:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S_0 = 0,$$

其中 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid, 满足 $\mathrm{P}(X_i = 1) = p$, $\mathrm{P}(X_1 = -1) = 1 - p$. 记 T_i 是质点首次访问 i 的时刻, 当 $p > 1/2$ 时, 求 $\mathrm{E}\, T_i$, $i > 0$.

解: T_i 是 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的一个停时, 且

$$\sum_{j=1}^{T_i} X_j = i.$$

当 $p > 1/2$ 时, $\mathrm{E}\, T_i < \infty$. 由 Wald 等式得

$$\mathrm{E}\, T_i = \frac{i}{2p-1}, \quad i > 0. \quad \blacksquare$$

- 【例 6.2(C)】 A, B 和 C 三人做如下博弈游戏: 每一步在他们中随机选取两人, 并要求第一人给第二人一枚硬币. 所有可能的选取都是等可能的，且相继的选取相互独立进行. 连续进行直至有一人没有剩余硬币为止. 此时该玩家离场，而另外两人继续进行直至其中一人得到所有的硬币为止. 若三人开始时分别有 x, y 和 z 枚硬币，求直至其中一人拥有所有的 $s = x + y + z$ 枚硬币的期望博弈次数.

解: 记

X_n, Y_n 和 Z_n 分别记 A, B 和 C 三人在 n 局之后所有的硬币数,

T 表示 X_n, Y_n 和 Z_n 中首次有两个取值为 0 的时刻.

所求的即为 $\mathrm{E}\,T$. 做如下的假设：游戏一旦进入到所有硬币在一人手里之后，后面的允许另外两人参加博弈，每人硬币数可以为负值. 定义

$$M_n = X_nY_n + X_nZ_n + Y_nZ_n + n,$$

则

- T 为 $\{M_n\}$ 的一个停时, 因为 $T = \inf\{k: \ M_k = k, k \geq 1\}$;
- 停止过程 $\{\overline{M}_n\}$ 也是一个鞅, T 也是 $\{\overline{M}_n\}$ 的停时. 且 $\overline{M}_T = T$. 对 $\{\overline{M}_n\}$ 应用定理 6.2.2 (验证条件 (iii) 满足) 得

$$\mathrm{E}\,T = \mathrm{E}\,\overline{M}_T = \mathrm{E}\,\overline{M}_0 = xy + yz + xz;$$

- $\{M_n, n \geq 0\}$ 为鞅 (待验证).

(续)：往证 $\{M_n, n \geq 0\}$ 为一个鞅. 仅证

$$\mathrm{E}\left[M_{n+1} | X_k, Y_k, Z_k, k = 0, 1, \ldots, n\right] = M_n. \qquad (*)$$

(i) 假设 A, B, C 皆参加第 $n+1$ 局博弈. 于是,

$$\mathrm{E}\left[X_{n+1} Y_{n+1} | X_n = u, Y_n = v\right) = [(u+1)v + (u+1)(v-1) + u(v+1)$$

$$+u(v-1) + (u-1)v + (u-1)(v+1)]/6 = uv - 1/3.$$

类似,

$$\mathrm{E}\left[X_{n+1} Z_{n+1} | X_n = u, Z_n = w\right) = uw - 1/3,$$

$$\mathrm{E}\left[Y_{n+1} Z_{n+1} | Y_n = v, Z_n = w\right) = vw - 1/3.$$

(ii) 不妨假设 A 不参加第 $n+1$ 局博弈, 则 $X_{n+1} = X_n = 0$, 且

$$\mathrm{E}\left[Y_{n+1} Z_{n+1} | Y_n = v, Z_n = w\right) = [(v+1)(w-1) + (v-1)(w+1)]/2 = vw - 1.$$

因此, $(*)$ 成立. ∎

► 【例 6.2(D)】(匹配问题) n 个人随机取帽，该过程经过多轮一直进行到所有人都正确取到自己的帽子. 记 R 为 n 个人所需取帽子的总轮数. 求 $\mathrm{E}\,R$.

解: 记 X_i 为第 i 轮正确匹配的人数 (若时刻 i 之前已完全匹配, 则定义 $X_i = 0$), 则

$$R = \inf\left\{k : \sum_{i=1}^{k} X_i = n\right\}, \qquad \sum_{i=1}^{R} X_i = n.$$

显然, R 为 $\{X_i\}$ 的停时. 定义

$$Z_k = \sum_{i=1}^{k} \{X_i - \mathrm{E}\,[X_i|X_1,\ldots,X_{i-1}]\}, \quad k \geq 1,$$

则 $\{Z_k\}$ 为鞅. 注意到当 $\sum_{j=1}^{i-1} X_j < n$ 时, $\mathrm{E}\,[X_i|X_1,\ldots,X_{i-1}] = 1$. 因此, $\mathrm{E}\,[|Z_{k+1} - Z_k||Z_1,\ldots,Z_k] \leq 2$. 由定理 6.2.2 得 $\mathrm{E}\,Z_R = \mathrm{E}\,Z_1 = 0$, 即

$$\mathrm{E}\,R = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{R} X_i\right] = n. \quad \blacksquare$$

▶ 定义 6.4.1 设 $\mathrm{E}|Z_n| < \infty, \forall n \geq 1$.

(1) $\{Z_n, n \geq 1\}$ 称为下鞅，如果

$$\mathrm{E}[Z_{n+1}|Z_1, Z_2, \ldots, Z_n] \geq Z_n, \quad \text{a.s.} \quad \forall n \geq 1.$$

(2) $\{Z_n, n \geq 1\}$ 称为上鞅，如果

$$\mathrm{E}[Z_{n+1}|Z_1, Z_2, \ldots, Z_n] \leq Z_n, \quad \text{a.s.} \quad \forall n \geq 1.$$

※ 下鞅：$\mathrm{E}\, Z_{n+1} \geq \mathrm{E}\, Z_n$;　上鞅：$\mathrm{E}\, Z_{n+1} \leq \mathrm{E}\, Z_n$.

▶ 定理 6.4.1 设 N 为 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 的停时. 若以下三条之一满足：

(i) $\overline{Z}_n$ 一致有界;　(ii) N 有界;

(iii) $\mathrm{E}\, N < \infty$, 且存在常数 $M < \infty$ 使得

$$\mathrm{E}\left[|Z_{n+1} - Z_n|\big|Z_1, \ldots, Z_n\right] \leq M,$$

则 $\mathrm{E}\, Z_1 \leq \mathrm{E}\, Z_N$ (下鞅情形), $\mathrm{E}\, Z_1 \geq \mathrm{E}\, Z_N$ (上鞅情形).

▶ 引理 6.4.2 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为下鞅，N 为有界同时，$\mathrm{P}(N \leq n) = 1$，则

$$\mathrm{E}\, X_1 \leq \mathrm{E}\, X_N \leq \mathrm{E}\, X_n.$$

证： $\mathrm{E}\, X_1 \leq \mathrm{E}\, X_N$ $(\surd)$. 欲证 $\mathrm{E}\, X_N \leq \mathrm{E}\, X_n$，仅证：

$$\mathrm{E}\,[X_N | N = k] \leq \mathrm{E}\,[X_n | N = k], \quad \forall k \leq n.$$

事实上，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,[X_n | N = k] &= \mathrm{E}\left\{\mathrm{E}\,[X_n | X_1, \ldots, X_k, N = k] \,|\, N = k\right\} \\ &= \mathrm{E}\left\{\mathrm{E}\,[X_n | X_1, \ldots, X_k] \,|\, N = k\right\} \\ &\geq \mathrm{E}\,[X_k | N = k], \end{aligned}$$

其中利用 $\sigma(N = k) \subset \sigma(X_1, \ldots, X_k, N = k)$. ∎

▶ 引理 6.4.3 设 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 为下鞅, $f(x)$ 为单调递增的凸函数, 则 $\{f(Z_n), n \geq 1\}$ 为下鞅.

证： 利用 Jensen 不等式, 得

$$\mathrm{E}\,[f(Z_{n+1})|Z_1, \ldots, Z_n] \geq f(\mathrm{E}\,[Z_{n+1}|Z_1, \ldots, Z_n]) \geq f(Z_n)].$$

于是,

$$\begin{aligned} & \mathrm{E}\,[f(Z_{n+1})|f(Z_1), \ldots, f(Z_n)] \\ = \quad & \mathrm{E}\left\{\mathrm{E}\,[f(Z_{n+1})|Z_1, \ldots, Z_n]|f(Z_1), \ldots, f(Z_n)\right\} \\ \geq \quad & \mathrm{E}\left[f(Z_n)|f(Z_1), \ldots, f(Z_n)\right] \\ = \quad & f(Z_n), \end{aligned}$$

其中利用了 $\sigma(f(Z_1), \ldots, f(Z_n)) \subseteq \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$. ∎

※ 当 $\{Z_n\}$ 为鞅， f 可取为凸函数， 取消单调性.

▶ 定引理 6.4.4 (下鞅 Kolmogorov 不等式) 设 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 为非负下鞅，则对任意 $a > 0$,

$$\mathrm{P}\left(\max\{Z_1, \ldots, Z_n\} > a\right) \leq \frac{\mathrm{E}\, Z_n}{a}.$$

证： 首先定义

$$N = \begin{cases} \min\{i : Z_i > a, i \leq n\}, & \{i : Z_i > a, i \leq n\} \neq \emptyset, \\ n, & \text{否则}, \end{cases}$$

易验证 N 为一个停时，且 $N \leq n$. 于是

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\max\{Z_1, \ldots, Z_n\} > a\right) &= \mathrm{P}\left(Z_N > a\right) \\ &\leq \frac{\mathrm{E}\, Z_N}{a} \\ &\leq \frac{\mathrm{E}\, Z_n}{a} \quad [\text{引理 } 6.4.2] \end{aligned}$$

▶ **推论 6.4.5** 设 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 为鞅，则对任意 $a > 0$,

$$\mathrm{P}\left(\max\{|Z_1|, \ldots, |Z_n|\} > a\right) \leq \frac{\mathrm{E}\,|Z_n|}{a},$$

$$\mathrm{P}\left(\max\{|Z_1|, \ldots, |Z_n|\} > a\right) \leq \frac{\mathrm{E}\,[Z_n^2]}{a^2}.$$

▶ **定理 6.4.6** (鞅收敛定理) 设 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 为鞅，且

$$\mathrm{E}\,|Z_n| \leq M < \infty, \quad \forall n \geq 1, \tag{$*.1$}$$

则 $\lim_{n\to\infty} Z_n$ 极限以概率 1 存在有限.

※ 我们将在下面更强的条件下证明鞅收敛定理:

$$\mathrm{E}\left[Z_n^2\right] \leq M < \infty, \quad \forall n \geq 1, \tag{$*.2$}$$

证：假设 $(*.2)$，则 $\{Z_n^2\}$ 为下鞅，$\mathrm{E}\, Z_n^2 \uparrow$ 且有界，必存在 $\mu < \infty$ 使得

$$\mu = \lim \mathrm{E}\,[Z_n^2].$$

下证 $\{Z_n\}$ 为 a.s. Cauchy 序列，即对任意 $k \geq 1$，

$$|Z_{m+k} - Z_m| \to 0, \ \text{a.s.}, \quad m \to \infty.$$

首先，对 $\forall\, \epsilon > 0$，

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} |Z_{m+k} - Z_m| > \epsilon\right) &\leq \mathrm{E}\,|Z_{m+n} - Z_m|^2/\epsilon^2 \\
&= \mathrm{E}\,[Z_{m+n}^2 - 2Z_{m+n}Z_m + Z_m^2]/\epsilon^2 \\
&= \left(\mathrm{E}\, Z_{m+n}^2 - \mathrm{E}\, Z_m^2\right)/\epsilon^2
\end{aligned}$$

$$\mathrm{P}\left(\max_{k\geq 1} |Z_{m+k} - Z_m| > \epsilon\right) \leq \left(\mu - \mathrm{E}\, Z_m^2\right)/\epsilon^2 \to 0, \quad m \to \infty. \ \blacksquare$$

补充：几乎处处收敛

$$\{w: X_n(w) \to X(w)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \left\{ w : |X_{n+\nu}(w) - X(w)| < \frac{1}{k} \right\},$$

$$\{w: X_n(w) \not\to X(w)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \left\{ w : |X_{n+\nu}(w) - X(w)| > \frac{1}{k} \right\}.$$

$$\{w: X_{n+\nu}(w) - X_n(w) \to 0\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \left\{ w : |X_{n+\nu}(w) - X_n(w)| < \frac{1}{k} \right\},$$

$$\{w: X_{n+\nu}(w) - X_n(w) \not\to 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \left\{ w : |X_{n+\nu}(w) - X_n(w)| > \frac{1}{k} \right\}.$$

※ 设正值 $\epsilon_k \to 0$, 上述表达式中的 $1/k$ 可以替换为 ϵ_k.

- 推论 6.4.7 设 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 为非负鞅，则 Z_n 几乎处处收敛于有限 rv.

- 【例 6.4(A)】 分支过程 $\{X_n\}$，每个个体期望后代数为 m，记 $Z_n = X_n/m^n$，则 $\{Z_n\}$ 为鞅. 由推论 6.4.7，Z_n 几乎处处收敛于有限 rv.

- 【例 6.4(B)】 考虑一个公平赌博，在每局中或赢或输 \$1，记 Z_n 为赌徒第 n 局之后的赌金，则 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 为一个鞅. 假设没有赊账，赌徒没有赌金时自动退出. 定义

$$N = \inf\{n : Z_n = Z_{n+1},\ n \geq 1\},$$

即 N 是赌徒被迫退出前已玩的赌局次数，N 也等价于

$$N = \inf\{n : Z_n = 0\}.$$

由推论 6.4.7，$Z_n \to Z$，于是断言 $N < \infty$, a.s.. 反证，若 $N(w) = +\infty$，则 $|Z_n(w) - Z_{n+1}(w)| = 1$，$Z_n$ 不收敛，矛盾. [赌徒概率 1 输光]

作业

第 6 章作业:

1, 2, 4, 6, 7, 10, 13, 23, 24

课程小论文:

将【例 6.2(C)】中三人博弈游戏拓展到 m 人 $(m > 3)$, 每一步中两两匹配. 鞅的停止定理还可以用于哪些其它博弈游戏?

注意科技写作的规范性和严谨性.