实用随机过程

胡太忠
thu@ustc.edu.cn

安徽 合肥 中国科学技术大学

2024 年 2 月

第 5 章　连续时间 Markov 链

- 基本特征
- 生灭过程——典型代表
- 向前（向后）微分方程
- 极限定理
- 逆向链及其应用

- 记号： $\{X(t), t \geq 0\}$, 状态空间 $S = \{0, 1, 2, \dots\}$
- Markov 性质： 对 $\forall s, t \geq 0$, 任意状态 i, j, $x(u)$, $0 \leq u < s$, 有

$$\mathrm{P}\left(X(s+t) = j \,|\, X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(X(t+s) = j | X(s) = i\right).$$

- 限制之一：只考虑时间齐次的 MC, 记

$$P_{ij}(t) = \mathrm{P}\left(X(t+s) = j \mid X(s) = i\right), \quad \forall s \geq 0.$$

- 基本特征：
  - 当 MC 进入 “i”，该 MC 于 “i” 滞留时间 $\tau_i \sim \mathrm{Exp}(\nu_i)$;
  - 状态转移对应一个离散时间 MC, 转移概率 P_{ij} 满足 $P_{ii} = 0$;
  - MC 于 “i” 滞留时间 τ_i 与下一步转移进入的状态独立.

- 与 SMC 作对比:
  - 当 MC 进入“i”，且已知下一次将转入“j”条件下，MC 于“i”滞留时间分布 $F_{ij} = \mathrm{Exp}(\nu_i)$, 与 j 无关.
  - 转移概率矩阵 $\mathbb{P} = (P_{ij})$ 满足

$$P_{ii} = 0, \quad \forall\ i.$$

一般总假定 $0 \le \nu_i < \infty$:

- i 称为瞬态的，若 $\nu_i = \infty$;
- i 称为吸收的，若 $\nu_i = 0$.

- 限制之二：只考虑规则的 MC. 一个连续时间 MC 称为是规则的，若有限时间内转移次数有限.

【例】 非规则 MC 的存在性：$P_{i,i+1}=1$, $\nu_i=(i+1)^2$, $i\geq 0$.

- 转移速率：

$$\mathrm{P}\left(\text{于 } (t,t+\Delta t) \text{ 访问状态 } j \,|\, X(t)=i\right)=q_{ij}\Delta t+\circ(\Delta t),$$

其中

$$\underbrace{q_{ij}}_{\text{转移速率}} = \underbrace{\nu_i}_{\text{离开 } i \text{ 的速率}} \cdot \underbrace{P_{ij}}_{\text{由 } i \text{ 转入 } j \text{ 的概率}}, \quad i\neq j.$$

$$\{\nu_i\},\ \ \{P_{ij}\} \longleftrightarrow \{q_{ij}\}$$

生灭过程：Birth and death process

- 定义 $\{X(t)\}$ 称为是一个生灭过程，如果

$$
\begin{aligned}
q_{ij} &= 0, \quad |i-j| > 1, \\
q_{i,i+1} &= \lambda_i \ \text{(出生率)}, \quad i \geq 0, \\
q_{i,i-1} &= \mu_i \ \text{(死亡率)}, \quad i \geq 1.
\end{aligned}
$$

注

- 一个 MC 的结构由 $\{q_{ij}\}$ 所唯一确定 (约定 $\mu_0 = 0$):

$$\nu_i = q_{i,i+1} + q_{i,i-1}, \qquad P_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} = 1 - P_{i,i-1}.$$

- 当系统处于"i"，等待进入"$i+1$"的时间 $\sim \mathrm{Exp}(\lambda_i)$, 等待进入"$i-1$"的时间 $\sim \mathrm{Exp}(\mu_i)$, 且相互独立. 因此，在"i"滞留时间 $\tau_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_i + \mu_i)$. [用 HPP 理论加以证明]

▶ 【例 5.3(A)】 (i) M/M/s-系统: 顾客到达间隔 iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, 每位顾客需要的服务时间 iid $\sim \mathrm{Exp}(\mu)$. 记 $X(t)$ 为时刻 t 系统里的顾客人数, 则 $\{X(t)\}$ 为一个生灭过程, 其中

$$\lambda_n = \lambda, \quad n \geq 0,$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n \leq s, \\ s\mu, & n > s. \end{cases}$$

(ii) 具有迁入的线型增长过程：记 $X(t)$ 为时刻 t 一个群体的大小, 该群体中每个个体以强度 λ 产生后代, 以强度 μ 死亡. 同时，外部人口以强度 θ 进入该群体, 则 $\{X(t)\}$ 为一个生灭过程, 其中

$$\lambda_n = n\lambda + \theta, \quad n \geq 0,$$

$$\mu_n = n\mu, \quad n \geq 1.$$

- 定义
  - 纯生过程：$\mu_i = 0,\ i \geq 1$;
  - 纯灭过程：$\lambda_i = 0,\ i \geq 0$.
- Yule 过程：一个特殊的纯生过程 $\{X(t)\}$: $\lambda_n = n\lambda,\ n \geq 0$. 记

$$T_i = \text{第 } (i-1) \text{ 个出生到第 } i \text{ 个出生之间的时间间隔}, \quad i \geq 1,$$

定义

$$S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n, \quad n \geq 1.$$

假设 $X(0) = 1$, 感兴趣的问题：

- S_i 的分布;
- $P_{ij}(t)$;
- $[(S_1, S_2, \ldots, S_n) | X(t) = n+1]$ 的条件联合分布.

(续) (i) 利用

$$S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n, \quad n \geq 1$$

其中 $T_i \sim \mathrm{Exp}(i\lambda)$, $i \geq 1$, 相互独立. 归纳证明:

$$\mathrm{P}\left(S_n \leq t\right) = (1 - e^{-\lambda t})^n, \quad n \geq 1.$$

(ii) 求 $P_{ij}(t)$. 注意到 $\mathrm{P}\left(S_j \leq t\right) = \mathrm{P}\left(X(t) \geq j + 1 | X(0) = 1\right)$, 于是,

$$P_{1j}(t) = \mathrm{P}\left(S_{j-1} \leq t\right) - \mathrm{P}\left(S_j \leq t\right) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{j-1}, \quad j \geq 1,$$

即 $[X(t)|X(0) = 1] \sim \mathrm{Geo}(e^{-\lambda t})$, 从而

$$P_{ij}(t) = \binom{j-1}{i-1} e^{-\lambda t i}(1 - e^{-\lambda t})^{j-i}, \quad j \geq i \geq 1,$$

$$\mathrm{E}\left[X(t)|X(0) = 1\right] = e^{\lambda t}.$$

(续) (iii)

$$[(S_1, S_2, \ldots, S_n)|X(t) = n+1] \stackrel{\mathrm{d}}{=} (V_{1:n}V_{2:n}, \ldots, V_{n:n}),$$

其中 $V_1, V_2, \ldots, V_n$ iid, 具有共同的 pdf

$$f(s) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda(t-s)}}{1-e^{-\lambda t}}, & s \in (0, t), \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

Step 1: 先求出 $[(T_1, T_2, \ldots, T_n)|X(t) = n+1]$ 的条件 pdf

$$\begin{aligned} & g_1(t_1, t_2, \ldots, t_n) \\ = \quad & \frac{\lambda e^{-\lambda t_1} \cdot 2\lambda e^{-2\lambda t_2} \cdots (n\lambda) e^{-n\lambda t_n} \cdot e^{-(n+1)\lambda(t-t_1-\cdots-t_n)}}{\mathrm{P}\left(X(t) = n+1|X(0) = 1\right)} \end{aligned}$$

$$\forall\ t_i > 0, i = 1, \ldots, n, t > \sum_{k=1}^{n} t_k.$$

Step 2: 先求出 $[(S_1, S_2, \ldots, S_n)|X(t) = n+1]$ 的条件 pdf

$$
\begin{aligned}
& g_2(s_1, s_2, \ldots, s_n) \\
= \;& \frac{\lambda e^{-\lambda s_1} \cdot 2\lambda e^{-2\lambda(s_2 - s_1)} \cdots (n\lambda) e^{-n\lambda(s_n - s_{n-1})} \cdot e^{-(n+1)\lambda(t - s_n)}}{\mathrm{P}\left(X(t) = n+1 | X(0) = 1\right)} \\
= \;& n!\lambda^n \prod_{j=1}^{n} \frac{e^{-\lambda(t - s_j)}}{1 - e^{-\lambda t}} = n! \prod_{j=1}^{n} f(s_j), \\
& \forall\ 0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n < t.
\end{aligned}
$$

※

$$
[(S_1, S_2, \ldots, S_n)|S_{n+1} = t] \stackrel{\mathrm{d}}{=} (V_{1:n} V_{2:n}, \ldots, V_{n:n}),
$$

其中 $V_1, V_2, \ldots, V_n$ iid, pdf 同上.

▶ 【例 5.3 (B)】 考虑一个 Yule 过程 $\{X(t)\}$, 其中 $X(0)=1$, $A(t)$ 为时刻 t 群体中个体年龄之和. 求 $\mathrm{E}\,A(t)$.

解：记 a_0 为初始个体于时刻 0 的年龄，则

$$\begin{aligned} A(t) &= a_0 + t + \sum_{i=1}^{X(t)-1} (t - S_i), \\ \mathrm{E}\,[A(t)|X(t)=n+1] &= a_0 + t + \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{X(t)-1} (t - S_i)|X(t)=n+1\right] \\ &= a_0 + t + \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(t - V_{i:n})\right] \\ &= a_0 + t + n(t - \mathrm{E}\,V_1), \end{aligned}$$

其中 $V_1, V_2, \ldots, V_n$ iid, 同前. ▮

▶ 【例 5.3 (C)】 (流行病模型) 考虑一个有 m 位成员的群体, 于时刻 0 有一个“已感染”和 $m-1$ 个“易感染”个体. 每个个体一旦感染某病毒, 则永远保持此状态. 假设任意一个已感染的个体以强度 α 使得任意一个易感染个体感染此病毒. 记 $X(t)$ 为时刻 t 群体中已感染的人数, 则 $\{X(t)\}$ 为一个纯生过程, 出生率

$$\lambda_n = n(m-n)\alpha, \quad n = 1, \ldots, m.$$

记 T 为整个群体都变成“已感染”的时刻, 求 $\mathrm{E}\, T$.

解: 记 T_i 为从 i 个已感染个体到 $i+1$ 个已感染的时间间隔, 则 $T_1, \ldots, T_{n-1}$ 独立, $T_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_i)$, 且

$$T = T_1 + T_2 + \cdots + T_{m-1}.$$

$\cdots\cdots$ ($\surd$).

- 引理 5.4.1

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-P_{ii}(t)}{t}=\nu_i; \qquad \lim_{t\to 0}\frac{P_{ij}(t)}{t}=q_{ij}, \quad i\neq j.$$

证： 仅证

$$\Delta(t)\equiv \mathrm{P}\left(\text{于 } (0,t] \text{ 有至少两次转移} | X(0)=i\right)=\circ(t). \qquad (*.1)$$

注意到

$$\Delta(t) = \sum_{k\neq i}\mathrm{P}\left(\text{于 } (0,t] \text{ 有至少两次转移, 且首次进入 “}k\text{” } |X(0)=i\right)$$

$$\leq \sum_{k\neq i, k\leq m}\mathrm{P}\left(\tau_i+\tau_k\leq t\right)P_{ik}+\sum_{k=m+1}^{\infty}P_{ik}\mathrm{P}\left(\tau_i\leq t\right),$$

其中 $\tau_i\sim\mathrm{Exp}(\nu_i)$, $\tau_k\sim\mathrm{Exp}(\nu_k)$, $i\neq k$, 相互独立. 于是,

(续) 先固定 m,

$$\Delta(t) \le \sum_{k\ne i,k\le m} P_{ik}\int_0^t \left(1 - e^{-\nu_k(t-s)}\right)\nu_i e^{-\nu_i s}ds + (1-e^{-\nu_i t})\sum_{k=m+1}^{\infty} P_{ik}$$

$$\le \circ(t) + (1-e^{-\nu_i t})\sum_{k=m+1}^{\infty} P_{ik}.$$

$\Longrightarrow$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Delta(t)}{t} \le \nu_i \sum_{k=m+1}^{\infty} P_{ik} \longrightarrow 0 \quad (\text{令 } m \to \infty).$$

得证 $(*.1)$. ∎

- 引理 5.4.2

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(s), \quad s, t \geq 0.$$

- 定理 5.4.3 (Kolmogorov 向后微分方程) 对任意 i, j 和 $t \geq 0$,

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - \nu_i P_{ij}(t).$$

证： 由引理 5.4.2, $P_{ij}(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(h)P_{kj}(t)$

$$\Longrightarrow \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = \sum_{k \neq i}^{\infty} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) - \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} P_{ij}(t).$$

仅证:

$$\lim_{h \to 0} \sum_{k \neq i}^{\infty} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t). \qquad (*.2)$$

(续) 易证

$$\liminf_{h\to 0}\sum_{k\neq i}^{\infty}\frac{P_{ik}(h)}{h}P_{kj}(t)\geq\sum_{k\neq i}q_{ik}P_{kj}(t). \qquad (*.3)$$

另一方面, 取 $m>i$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\neq i}^{\infty}\frac{P_{ik}(h)}{h}P_{kj}(t) &\leq \sum_{k\neq i,k\leq m}\frac{P_{ik}(h)}{h}P_{kj}(t)+\sum_{k>m}\frac{P_{ik}(h)}{h}\\
&= \sum_{k\neq i,k\leq m}\frac{P_{ik}(h)}{h}P_{kj}(t)+\frac{1-P_{ii}(h)}{h}-\sum_{k\neq i,k\leq m}\frac{P_{ik}(h)}{h}\\
&\xrightarrow{h\to 0} \sum_{k\neq i,k\leq m}q_{ik}P_{kj}(t)+\underbrace{\nu_i-\sum_{k\neq i,k\leq m}q_{ik}}\\
&\xrightarrow{m\to\infty} \sum_{k\neq i}q_{ik}P_{kj}(t) \quad (\nu_i=\sum_{k\neq i}q_{ik}). \qquad (*.4)
\end{aligned}$$

$(*.3)+(*.4)\Longrightarrow(*.2)$. ∎

- 注 5.4.1

1. “向后微分方程”名称的来源.
2. 定义 $q_{ii} = -\nu_i$,

$$\mathbf{Q} = (q_{ij})_{S\times S}, \quad \mathbf{P}(t) = (P_{ij}(t))_{S\times S}, \quad \mathbf{P}'(t) = (P'_{ij}(t))_{S\times S},$$

则定理 5.4.3 可表为

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t).$$

3. 类似，在一定的正则条件下，存在向前微分方程

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q},$$

即

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)q_{kj} - P_{ij}(t)\nu_j, \quad \forall, i, j.$$

▶ 【例 5.4(A)】 两状态 MC $\{X(t)\}$, $S=\{0,1\}$, 于状态 "0" 滞留时间 $\tau_0 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, 于状态 "1" 滞留时间 $\tau_1 \sim \mathrm{Exp}(\mu)$. 于是,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

向前微分方程为

$$P'_{00}(t) = -\lambda P_{00}(t) + \mu P_{01}(t) = \mu - (\lambda+\mu) P_{00}(t),$$

$\overset{P_{00}(0)=1}{\Longrightarrow}$

$$P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}, \quad t \geq 0.$$

再由对称性,

$$P_{11}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}, \quad t \geq 0.$$

- 【例 5.4(B)】 生灭过程: $q_{ij}=0$, $|i-j|>1$; $q_{i,i+1}=\lambda_i$, $i\geq 0$; $q_{i,i-1}=\mu_i$, $i\geq 1$. 于是,

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

由 $\mathbf{P}'(t)=\mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$ 得向前微分方程

$$P'_{i0}(t)=-\lambda_0 P_{i0}(t)+\mu_1 P_{i1}(t), \quad i\geq 0,$$

$$P'_{ij}(t)=\lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t)-(\lambda_j+\mu_j)P_{ij}(t)+\mu_{j+1}P_{i,j+1}(t), \quad j\geq 1.$$

连续时间 MC $\{X(t)\}$ 是特殊的半马氏过程，其中：

$$\tau_i \sim H_i(x) = F_{ij}(x) = e^{-\nu_i x}, \ \forall\, j.$$

- 记号：
  $\{\pi_i, i \in S\}$ 嵌入 MC 的平稳分布（假设该链不可约正常返）

$$\pi_i \longleftarrow \mathbf{P} = (P_{ij}).$$

  $\{P_i, i \in S\}$ $\{X_n\}$ 的稳态分布 [存在性已由 SMC 理论保证]

$$P_j = \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\left(X(t) = j | X(0) = i\right) = \frac{\pi_j/\nu_j}{\sum_k \pi_k/\nu_k}.$$

- 问题： 如何用 $\{q_{ij}\}$ 表示 $\{P_i\}$?

$$\{\nu_i\},\ \{P_{ij}\} \longleftrightarrow \{q_{ij}\}$$

注意到

$$P_j = \frac{\pi_j/\nu_j}{\sum_k \pi_k/\nu_k} \quad \Longrightarrow \quad \pi_j = c\,P_j\nu_j, \tag{$*.5$}$$

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}. \tag{$*.6$}$$

$(*.5)$ 代入 $(*.6)$ 得

$$P_j\nu_j = \sum_i P_i\nu_i P_{ij} = \sum_{i\neq j} P_i q_{ij} \qquad [P_{ii} = 0]$$

即

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \tag{$*.7$}$$

其中 $\mathbf{p} = (P_0, P_1, \ldots)$ 且 $\sum_i P_i = 1$.

※ $(*.7)$ 的一个看法：向前微分方程 $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}'(t) \to \mathbf{0}$.

- 注记:
  - P_j 是长时间后过程处于 "j" 的时间占比.
  - 若 $X(0) \sim \text{pmf}\,\{P_i\}$, 则 $X(t) \sim \text{pmf}\,\{P_i\}$. 证: 取定 "$k$",

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X(t)=j\right) &= \sum_i P_i P_{ij}(t) = \sum_i \left(\lim_{s\to\infty} P_{ki}(s)\right) P_{ij}(t) \\
&\overset{?}{=} \lim_{s\to\infty} \sum_i P_{ki}(s) P_{ij}(t) \\
&= \lim_{s\to\infty} P_{kj}(s+t) \\
&= P_j.
\end{aligned}$$

以下往证 "$\overset{?}{=}$" 成立. 首先, 利用常规技巧可得

$$\liminf_{s\to\infty} \sum_i P_{ki}(s) P_{ij}(t) \geq \sum_i \left(\lim_{s\to\infty} P_{ki}(s)\right) P_{ij}(t).$$

(续) 另一方面, 先取定 m,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} P_{ki}(s)P_{ij}(t) &\le \sum_{i=0}^{m} P_{ki}(s)P_{ij}(t) + \sum_{i=m+1}^{\infty} P_{ki}(s) \\ &= \sum_{i=0}^{m} P_{ki}(s)P_{ij}(t) + 1 - \sum_{i=0}^{m} P_{ki}(s) \\ &\xrightarrow{s\to\infty} \sum_{i=0}^{m} P_i P_{ij}(t) + 1 - \underbrace{\sum_{i=0}^{m} P_i}\,.\end{aligned}$$

令 $m \to \infty$ 得

$$\limsup_{s\to\infty} \sum_i P_{ki}(s)P_{ij}(t) \le \sum_i P_i P_{ij}(t).$$

得证 “$\stackrel{?}{=}$” 成立.

(续)

$$P_j = \sum_i P_i P_{ij}(t), \quad \forall\ t > 0. \qquad (*.8)$$

- 若 $X(0) \sim \text{pmf}\,\{P_i\}$, 则 $\big(X(t_1+h), \ldots, X(t_n+h)\big)$ 分布与 h 无关.
- $$\underbrace{P_j v_j}_{\text{过程离开“}j\text{”的速率}} = \underbrace{\sum_{i \neq j} P_i q_{ij}}_{\text{过程进入“}j\text{”的速率}}$$

当系统处于平衡时, 在 $(0, t]$ 时间段进入“j”和离开“j”的次数相差不超过 1 次, 因此长时间之后过程离开和进入“j”的速度相同.

- 【例】 生灭过程

状态	过程离开的速率		过程进入的速率
0	$P_0\lambda_0$	$=$	$P_1\mu_1$
1	$P_1(\lambda_1+\mu_1)$	$=$	$P_2\mu_2+P_0\lambda_0$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
n	$P_n(\lambda_n+\mu_n)$	$=$	$P_{n+1}\mu_{n+1}+P_{n-1}\lambda_{n-1}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

$\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
P_0\lambda_0 &= P_1\mu_1, & P_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0 \\
P_1\lambda_1 &= P_2\mu_2, & P_2 &= \frac{\lambda_1}{\mu_2}P_1 \\
P_n\lambda_n &= P_{n+1}\mu_{n+1} & P_{n+1} &= \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}P_n, \quad n\geq 0.
\end{aligned}
$$

(续)

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1} P_0, \quad n \geq 1.$$

由 $\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1$ 得

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1}\right]^{-1}.$$

※ 生灭过程存在稳态分布的充分必要条件为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1} < \infty. \qquad (*.9)$$

▶ 【例 5.5(A)】 (M/M/1 系统) 顾客到达过程服从强调 λ 的 Poisson 过程, 服务时间服从 $\mathrm{Exp}(\mu)$ 分布. 记 $X(t)$ 为时刻 t 系统里顾客人数, 于是 $\{X(t)\}$ 为一个特殊的生灭过程, 其中 $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu$. 此时,

$$(*.9) \iff \rho := \frac{\lambda}{\mu} < 1,$$

且

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{1+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda/\mu)^k} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right), \quad n \geq 0.$$

※ 当 $t \to \infty$ 时, $X(t) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{Geo}(1-\lambda/\mu)$.

※ $\rho < 1$ 指系统到达率小于服务率.

※ $\rho = 1$ 指系统到达率与服务率相同. 此时, 不可约 MC 为零常返的. 事实上, $P_n = 0$. 若 MC 为常返, 则由 SMC 理论得

$$P_n = \frac{\mathrm{E}\,\tau_n}{\mathrm{E}\,T_{nn}}, \quad \mathrm{E}\,\tau_n = \frac{1}{\lambda+\mu} \Longrightarrow \mathrm{E}\,T_{nn} = +\infty.$$

▶【例 5.5(B)】 考虑一个由 M 个元件组成的系统，现有一个修理工．每个元件独立工作，工作时长 $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$；元件一旦失效，立即进行（排队等待）修理，每个失效元件修理时间 $\sim \mathrm{Exp}(\mu)$．记 $X(t)$ 为时刻 t 系统失效的元件个数，于是 $\{X(t)\}$ 为一个生灭过程，$S=\{0,1,\ldots,M\}$，

$$\lambda_n=(M-n)\lambda,\quad \mu_n=\mu.$$

$\Longrightarrow$

$$P_0=\left[1+\sum_{n=1}^{M}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{M!}{(M-n)!}\right]^{-1},\quad P_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{M!}{(M-n)!}P_0,\ n\in S.$$

※ 长时间运行下去，系统处于失效状态元件期望个数 $\sum_n nP_n$ ($\surd$).

※ 长时间运行下去，指定元件 i 在工作的概率为

$$\sum_{n=0}^{M}\mathrm{P}\left(\text{元件 } i \text{ 工作}\middle|\text{系统 } n \text{ 个元件失效}\right)=\sum_{n=0}^{M}\frac{M-n}{M}P_n.$$

考虑一个不可约正常返 MC $\{X(t), t \geq 0\}$, 假设 $X(0)$ 服从稳态分布 $\{P_i\}$, 其嵌入链的平稳分布为 $\{\pi_i\}$.

- $\{X(t)\}$ 的逆向链也是 MC.

证: 对任意 $0 \leq s < t < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$,

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{P}\left(X(s)=j | X(t)=i, X(t_1)=i_1, \ldots, X(t_m)=i_m\right) \\
= & \frac{\mathrm{P}\left(X(t_m)=i_m, \ldots, X(t_1)=i_1 | X(t)=i, X(s)=j\right)}{\mathrm{P}\left(X(t_m)=i_m, \ldots, X(t_1)=i_1 | X(t)=i\right)} \\
& \times \frac{\mathrm{P}\left(X(t)=i, X(s)=j\right)}{\mathrm{P}\left(X(t)=i\right)} \\
= & \frac{\mathrm{P}\left(X(t)=i | X(s)=j\right) \mathrm{P}\left(X(s)=j\right)}{\mathrm{P}\left(X(t)=i\right)} \\
= & \frac{P_j P_{ji}(t-s)}{P_i}.
\end{aligned}
$$

- $\{X(t)\}$ 嵌入链的逆向链也是 MC, 转移概率为

$$P^*_{ij} = \frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i}.$$

- $\{X(t)\}$ 的逆向链在状态 i 滞留时间 $\tau_i^* \sim \mathrm{Exp}(\nu_i)$.

证: 对任意 $0 < s \le t$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(X(u) = i, \forall\, u \in [t-s, t] \middle| X(t) = i\right) \\
&= \frac{\mathrm{P}\left(X(u) = i, \forall\, u \in [t-s, t]\right)}{\mathrm{P}\left(X(t) = i\right)} \\
&= \mathrm{P}\left(X(u) = i, \forall\, u \in [t-s, t] \middle| X(t-s) = i\right) \cdot \frac{\mathrm{P}\left(X(t-s) = i\right)}{\mathrm{P}\left(X(t) = i\right)} \\
&= e^{-\nu_i s},
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \tau_i^* \sim \mathrm{Exp}(\nu_i).$$

▶ 定义 5.6.1 $\{X(t, t \geq 0)\}$ 称为是时间可逆的, 如果 $P_{ij}^* = P_{ij}$, 即

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}, \quad \forall\, i, j. \tag{*.10}$$

※ (∗.10) 是嵌入链时间可逆的等价条件.

※ (∗.10) 等价于

$$\underbrace{P_i q_{ij}}_{\text{过程从 } i \text{ 转入 } j \text{ 的速度}} = \underbrace{P_j q_{ji}}_{\text{过程从 } j \text{ 转入 } i \text{ 的速度}} \tag{*.11}$$

证: 利用

$$P_i = \frac{\pi_i/\nu_i}{\sum_k \pi_k/\nu_k} \propto \frac{\pi_i}{\nu_i},$$

$$q_{ij} = \nu_i P_{ij}, \quad i \neq j.$$

- 命题 5.6.1 遍历的生灭过程在稳态下是时间可逆的.

证： 因为 $q_{ij}=0$, $|i-j|>1$, 所以仅验证

$$\underbrace{P_i q_{i,i+1}}_{\text{过程从 } i \text{ 转入 } i+1 \text{ 的速度}} = \underbrace{P_{i+1} q_{i+1,i}}_{\text{过程从 } i+1 \text{ 转入 } i \text{ 的速度}}$$

- 命题 5.6.2 M/M/s-系统：顾客按 HPP(λ) 到达，每个顾客需要的服务时间 $\mathrm{Exp}(\mu)$, $\lambda < s\mu$, 证明：系统在稳态下输出过程也是 HPP(λ).

证： 记 $X(t)$ 为时刻 t 系统中顾客人数，则 $\{X(t)\}$ 为生灭过程，在稳态下时间可逆.

正向链：过程每增加 1 的时刻对应顾客到达；

逆向链：过程每增加 1 的时刻对应顾客离开.

因此，在稳态下输入和输出过程相同. ∎

- **命题** 对连续时间 MC $\{X(t)\}$, 如果存在 pmf $\{x_i\}$ 满足

$$x_j q_{ji} = x_i q_{ij}, \quad \forall\, i, j.$$

则 $\{x_i\}$ 为 MC 的稳态分布, 且 MC 为时间可逆的.

- **定义** 一个连续时间 MC $\{X(t), t \geq 0\}$ 称为截于状态 $A \subset S$, 是指其 Q-矩阵为 $\mathbf{Q}^A = (q_{ij}^A)$ 满足:

$$q_{ij}^A = q_{ij}, \quad \forall\, i, j \in A;$$

$$q_{ij}^A = 0, \quad \forall\; i \in A, j \notin A.$$

记上述截于 A 的 MC 为 $\{X^A(t), t \geq 0\}$.

▶ 命题 5.6.3 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 时间可逆, 稳态概率为 $\{P_i, i \in S\}$, 则 $\{X^A(t), t \geq 0\}$ 也是时间可逆的, 对应的稳态分布为

$$P_i^A = \frac{P_i}{\sum_{j\in A} P_j}, \quad \forall\, i \in A.$$

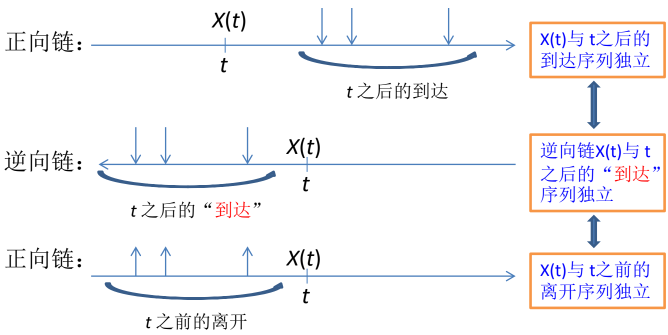
证: $\{X^A(t)\}$ 时间可逆 $\Longleftrightarrow P_i^A q_{ij}^A = P_j^A q_{ji}^A, \quad i, j \in A$

$$\Longleftrightarrow P_i q_{ij} = P_j q_{ji}, \quad i, j \in A \qquad [\surd]$$

▶ 【例 5.6(A)】 M/M/1/N-排队系统: 顾客到达间隔 iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, 服务时间 iid $\sim \mathrm{Exp}(\mu)$, $\lambda < \mu$, 系统容量为 N, 记 $X(t)$ 为时刻 t 系统中顾客数. 于是, 稳态概率

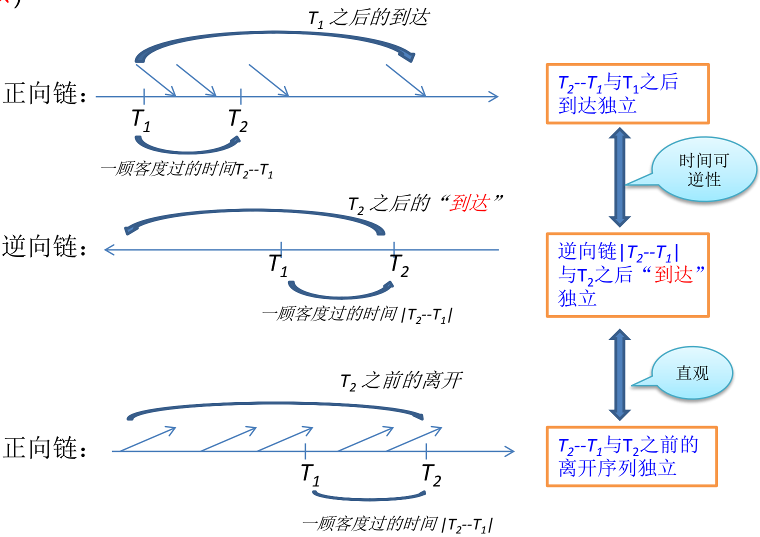
$$P_j = \frac{(\lambda/\mu)^j}{\sum_{k=0}^N (\lambda/\mu)^k}, \quad j = 0, 1, \ldots, N.$$

- 引理 5.6.4 处于稳态的遍历 M/M/1 排队系统:
  - 目前在系统中的顾客数与过去离开时刻的序列独立;
  - 顾客在系统中的度过时间与他离开之前的离去过程独立.



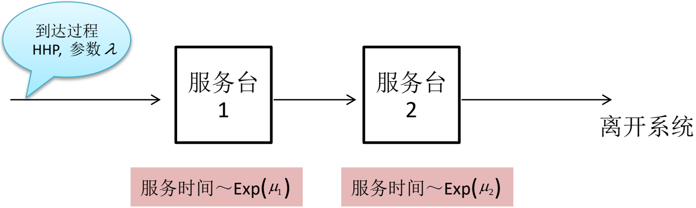
§5.6 时间可逆性

(续)



T_1 之后的到达
正向链：
T_1
T_2
一顾客度过的时间T_2--T_1
T_2--T_1与T_1之后到达独立
时间可逆性
T_2 之后的"到达"
逆向链：
T_1
T_2
一顾客度过的时间 $|T_2$--$T_1|$
逆向链$|T_2$--$T_1|$与T_2之后"到达"独立
直观
T_2 之前的离开
正向链：
T_1
T_2
一顾客度过的时间 $|T_2$--$T_1|$
T_2--T_1与T_2之前的离开序列独立

▶ 定理 5.6.5 对处于稳态的 M/M/2-串联排队系统：



- 目前在 1 号台和 2 号台的顾客数相互独立，且

$$\mathrm{P}\,(1{,}2\text{ 号台顾客数分别为 } n, m) = \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right).$$

- 一顾客在 1 号台等待时间和在 2 号台的等待时间相互独立.

▶ 定理 5.7.1 设 $\mathbf{Q} = (q_{ij})$ 为一个不可约 MC $\{X(t)\}$ 的转移速率矩阵. 如果能找到另外一个转移率矩阵 $\mathbf{Q}^* = (q_{ij}^*)$ 及一个 pmf $\{P_i\}$, 使得

$$P_i q_{ij} = P_j q_{ji}^*, \quad \forall\, i \neq j, \tag{$*$.12}$$

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} = \sum_{j \neq i} q_{ij}^*, \quad \forall\, i, \tag{$*$.13}$$

则 $\{X(t)\}$ 逆向链转移率矩阵为 $\mathbf{Q}^*$, $\{P_i\}$ 为正向和逆向链的稳态分布.

证： 在 ($*$.12) 两侧关于 i ($i \neq j$) 求和, 得

$$\sum_{i \neq j} P_i q_{ij} = P_j \sum_{i \neq j} q_{ij}^* = P_j \sum_{i \neq j} q_{ij} = P_j \nu_j, \quad \forall j,$$

即 $\{P_i\}$ 为 $\{X(t)\}$ 的稳态分布. 余下略. ∎

※ ($*$.13) 的必要性, 因为正向和逆向链在 “i” 滞留时间 $\tau_i \sim \mathrm{Exp}(\nu_i)$.

▶ 观察　考虑一个特殊的 MC $\{X(t)\}$, 满足 $\nu_i \equiv \nu, \forall i$. 记 $N(t)$ 表示 $(0,t]$ 时段状态转移次数, 则 $\{N(t)\}$ 为 HPP(ν). 于是,

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}\left(X(t)=j | X(0)=i, N(t)=n\right) \cdot \mathrm{P}\left(N(t)=n | X(0)=i\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{n} \cdot \frac{(\nu t)^n}{n!} e^{-\nu t}. \end{aligned}$$

※ 优点：可以用来近似计算 $P_{ij}(t)$.

※ 缺点："$\nu_i \equiv \nu$"限制性太强.

采用虚转移技巧，转化为上述特殊情形！

- 引进虚转移 设 $\{X(t)\}$ 为齐次 MC, 满足

$$\nu_i \le \nu < \infty, \quad \forall\, i.$$

等价地, MC 可以按如下方式进行状态转移:

> MC 以速率 ν 发生状态转移, 以概率 ν_i/ν 转移出 "i", 以概率 $1-\nu_i/\nu$ 发生虚转移（仍转入状态 "i"）.

记 P^*_{ij} 表示带有虚转移的 MC 的转移概率, 即

$$P^*_{ij} = \begin{cases} 1-\nu_i/\nu, & j=i, \\ \frac{\nu_i}{\nu} P_{ij}, & j \ne i. \end{cases}$$

于是

$$P_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{*n}_{ij} \cdot \frac{(\nu t)^n}{n!} e^{-\nu t}.$$

(续)

※ 等价性验证：记带有虚转移的 MC 从 “i” 转出去所需要的转移次数为 M, 则

$$M \sim \mathrm{Geo}\left(\frac{\nu_i}{\nu}\right),$$

且带有虚转移的 MC 在 “i” 滞留时间 τ_i 可表示为

$$\tau_i = \sum_{k=1}^{M} Y_k \sim \mathrm{Exp}(f_i), \quad f_i = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot \nu = \nu_i,$$

其中 $\{Y_k, k \geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Exp}(\nu)$, M 独立于其它变量.

- 【例 5.8(A)】 考虑 $\{0,1\}$ 两状态 MC $\{X(t)\}$,

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}, \quad \nu_0=\lambda, \quad \nu_1=\mu, \quad P_{01}=P_{10}=1.$$

取 $\nu=\lambda+\mu$,引进虚转移状态的 MC, 其转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}^*=\begin{pmatrix} \mu/\nu & \lambda/\nu \\ \mu/\nu & \lambda/\nu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^{*n}=(\mathbf{P}^*)^n=\mathbf{P}.$$

于是

$$P_{00}(t)=e^{-\nu t}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{(\nu t)^n}{n!}e^{-\nu t}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

$$P_{11}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

作业

第 5 章作业

2, 3, 7, 12, 21, 22, 37