实用随机过程

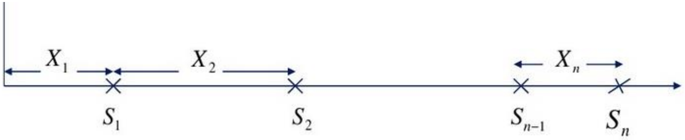
胡太忠
thu@ustc.edu.cn

安徽 合肥 中国科学技术大学

2024 年 2 月

第 3 章　更新过程

- 更新过程基本结构
- 更新过程的极限性质
- 交替更新过程
- 延迟更新过程
- 更新酬劳过程



Poisson 过程的一个自然推广

▶ 定义 3.1.1 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim F$, $F(0-) = 0$, $F(0) < 1$, 记 $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \geq 1$. 定义一个计数过程

$$N(t) = \sup\{n: \ S_n \leq t, \ n \geq 0\}, \quad t \geq 0,$$

则称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一个更新过程.

※

- "事件" vs "更新". 站在更新点看未来, 过程未来演化规律相同.
- "$F(0) < 1$" 避免平凡情形发生, 且 $\mu = \mathrm{E}\, X \in (0, +\infty]$.
- 于一点发生的更新数可以是一个随机变量, 服从 Geo$^*(\overline{F}(0))$. 注意 0 点与其它点的差异.
- $N(t) < \infty$, 且 $N(t) = \max\{n: \ S_n \leq t, n \geq 0\}$.

- $N(t)$ 分布:

$$\mathrm{P}\left(N(t) \geq n\right) = \mathrm{P}\left(S_n \leq t\right) = F^{(n)}(t),$$

$$\mathrm{P}\left(N(t) = n\right) = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t), \quad n \geq 0.$$

- 更新函数: $m(t) = \mathrm{E}\, N(t)$

▶ 命题 3.2.1 $m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t)$.

▶ 命题 3.2.3 更新方程

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)\,\mathrm{d}F(x), \quad t \geq 0.$$

※ $F^{(0)}(t) = 1_{[0,\infty)}(t)$, 常数 0 退化随机变量的 cdf

- 更新密度函数：$m'(t)$（假定 F 有 pdf f）

$$m'(t) = f(t) + \int_0^t m'(t-x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- 直观解释：

$$\mathrm{P}\,(\text{时段}\ (t, t+\Delta t)\ \text{有更新发生}) = m'(t)\Delta t + \circ(\Delta t);$$

$$m'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(t).$$

▶ 命题 3.2.2 $m(t) < \infty$. 更一般地，$\mathrm{E}\,[N(t)]^r < \infty$，$r \geq 0$,

证法一：对更新间隔 X_n 进行截断，定义新的更新过程.

- 命题 3.2.2 $m(t) < \infty$.

证法二： 由卷积公式得, 对任意非负整数 n, k, r,

$$F^{(n)}(t) \leq [F(t)]^n, \quad F^{(nk+r)}(t) \leq \left[F^{(k)}(t)\right]^n F^{(r)}(t)$$

(1) 注意到 $F(0) < 1$, 所以

$$m(0) \leq \sum_{n=1}^{\infty}[F(0)]^n = \frac{F(0)}{1-F(0)} < +\infty.$$

(2) 注意到 $\mu > 0$, $S_n \to \infty$, 存在 $k \geq 1$ 使 $F^{(k)}(t) < 1$. 于是

$$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k-1} F^{(nk+r)}(t) \leq \sum_{n=0}^{\infty} k\left[F^{(k)}(t)\right]^n = \frac{k}{1-F^{(k)}(t)} < \infty. \blacksquare$$

$N(t)$ 的精确分布很难求，但可以给出其分布的上下界.

- **定理 3.2.a** 设 F 满足 $F(0)=0$, $R(t)=-\log \overline{F}(t)$. 若 F 为 NBU, 则

$$\mathrm{P}\left(N(t)<n\right) \geq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{[R(t)]^j}{j!} e^{-R(t)}, \quad t \geq 0,\ n \geq 1. \qquad (*.1)$$

若 F 为 NWU, 则 $(*.1)$ 中不等号反向.

※ **定义** 设 $X \sim F$, $F(0-)=0$. 称 F 为 NBU (New Better than Used), 若

$$\overline{F}(x+y) \leq \overline{F}(x)\,\overline{F}(y), \quad \forall\, x, y \geq 0. \qquad (*.2)$$

若不等式 $(*.2)$ 反向，则称 F 为 NWU (New Worse than Used).

证：仅证 NBU 情形（R^{-1} 取左逆；对 NWU 情形，R^{-1} 取右逆）．此时，$R(s+t) \geq R(s)+R(t)$, $\forall\, s,t \geq 0$, 于是

$$R^{-1}(x+y) \leq R^{-1}(x)+R^{-1}(y), \quad \forall\, x,y \geq 0. \tag{$*$.3}$$

(∗.3) 的证明： 对 $\forall\, x,y \geq 0$, 定义

$$s^* = R^{-1}(x), \quad t^* = R^{-1}(y).$$

利用 $R(t)$ 右连续性，得 $x \leq R(s^*)$, $y \leq R(t^*)$. 于是

$$\begin{aligned} R^{-1}(x+y) &\leq R^{-1}\big(R(s^*)+R(t^*)\big) \\ &\leq R^{-1}\big(R(s^*+t^*)\big) \\ &\leq s^*+t^* = R^{-1}(x)+R^{-1}(y). \end{aligned}$$

(续) 设 $\{Y_k, k \geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Exp}(1)$, 则 $X_k = R^{-1}(Y_k)$, $k \geq 1$, iid $\sim F$, 且

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} R^{-1}(Y_k) \geq R^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right), \quad \forall\, n \geq 0.$$

故

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(N(t) < n\right) &= \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k > t\right) \geq \mathrm{P}\left(R^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) > t\right) \\ &= \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k > R(t)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{[R(t)]^j}{j!} e^{-R(t)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$N(t)$ 的精确分布很难求，但可以给出其分布的上下界.

- 定理 3.2.b 设 F 满足 $F(0)=0$, $R(t)=-\log \overline{F}(t)$. 若 F 为 IFR, 则

$$\mathrm{P}\left(N(t)<n\right)\leq\sum_{j=0}^{n-1}\frac{[nR(t/n)]^j}{j!}e^{-nR(t/n)},\quad t\geq 0,\ n\geq 1. \qquad (*.4)$$

若 F 为 DFR, 则 $(*.4)$ 中不等号反向.

※ 定义 设 $X\sim F$, $F(0-)=0$, F 有 pdf f, 则称 F 为 IFR (Increasing Failure Rate), 若其失效率函数

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{\overline{F}(t)}\quad\uparrow_t,\quad t\in\{x: F(x)<1\}.$$

若 $\lambda(t)$ 单独递减，则称 F 为 DFR (Decreasing Failure Rate).

证：类似定理 3.2.a 的证明. 设 F 为 IFR，G 为 Exp(1) 的 cdf, 往下仅证：

$$F^{(n)}(t) \geq G^{(n)}(nR(t/n)), \quad t \geq 0, \ n \geq 1. \qquad (*.5)$$

当 $n=1$ 时, $F(t)=G(R(t))$ $\surd$. 假设 $(*.5)$ 对 $n=m-1\geq 1$ 成立，则

$$F^{(m)}(t) \geq \int_0^\infty G^{(m-1)}\left((m-1)R\left(\frac{t-x}{m-1}\right)\right) \mathrm{d}F(x).$$

IFR 蕴涵 $R(x)$ 为凸，于是

$$\frac{t}{m}=\frac{m-1}{m}\cdot\frac{t-x}{m-1}+\frac{1}{m}\cdot x \Longrightarrow R\left(\frac{t}{m}\right) \leq \frac{m-1}{m}\cdot R\left(\frac{t-x}{m-1}\right)+\frac{R(x)}{m}.$$

故

$$\begin{aligned} F^{(m)}(t) &\geq \int_0^\infty G^{(m-1)}\left(mR\left(\frac{t}{m}\right)-R(x)\right) \mathrm{d}G(R(x)) \\ &= G^{(m)}(mR(t/m)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- 【例 3.2.a】 飞机的轮胎在起飞和降落时比其它任何时候更易于损坏，以飞机运行时间为变量的轮胎生存函数为一个阶梯函数：

$$\overline{F}(t) = e^{-\alpha[t/h]}, \quad t \geq 0,$$

其中 $\alpha > 0$, h 表示一个航程的时间. 该阶梯函数的跳点时刻对应飞机的起飞和降落时刻. 记 $N(t)$ 表示 $(0, t]$ 时间段轮胎更换的次数.

注意到 F 为 NBU, 由定理 3.2.a 得

$$\mathrm{P}\left(N(t) \leq n\right) \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k [t/h]^k}{k!} e^{-\alpha[t/h]}, \quad t \geq 0, \ n \geq 0.$$

本节主要内容:

- $N(t)$ 和 $m(t)$ 当 $t \to \infty$ 时极限性状
- $N(t)$ 和 $m(t)$ 当 $t \to \infty$ 时增长速度
- 著名的 Wald 等式

- $N(\infty) := \lim_{t\to\infty} N(t) = +\infty$, 因为

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(N(\infty) < \infty\right) &= \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n = \infty\}\right) \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_n = \infty\right) = 0. \end{aligned}$$

- $N(t)/t \to 1/\mu$, $t \to \infty$, 其中 $\mu \le +\infty$.

  证明：利用强大数律，$S_n/n \to \mu = \mathrm{E}\, X$, 以及

$$S_{N(t)} \le t < S_{N(t)+1}, \quad \forall\, t > 0.$$

停时 (Stopping Time)

- 定义 3.3.1 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为 r.v. 序列，N 为一个整值 r.v.，且对 $\forall\, n \geq 1$, $\{N = n\}$ 独立于 $\{X_k, k > n\}$, 则称 N 为 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的一个停时.
- 【例 3.3 (B)】 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid, 满足

$$\mathrm{P}(X_n = 0) = \mathrm{P}(X_n = 1) = 1/2, \quad \forall\, n,$$

则 $N = \min\{n : X_1 + \cdots + X_n = 10\}$ 为 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的一个停时.

- 【例 3.3 (C)】 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid, 满足

$$\mathrm{P}(X_n = -1) = \mathrm{P}(X_n = 1) = 1/2, \quad \forall\, n,$$

则 $N = \min\{n : X_1 + \cdots + X_n = 1\}$ 为 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的一个停时.

Wald 等式

▶ 定理 3.3.2 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为 iid 序列，$\mathrm{E}|X_1| < \infty$，N 为一个整值 r.v.，$\mathrm{E}\,N < \infty$，且 N 为 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的一个停时，则

$$\mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{N} X_k\right] = \mathrm{E}\,N \cdot \mathrm{E}\,X.$$

证明：定义 $I_n = 1_{\{N \geq n\}}$，则 I_n 与 X_n 独立. 于是

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{N} X_k\right] &= \mathrm{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n I_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[X_n I_n\right] \\ &= \mathrm{E}\,X \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\,I_n = \mathrm{E}\,X \cdot \mathrm{E}\,N,\end{aligned}$$

其中第二等式成立是利用了 Fubini 定理以及 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}|X_n I_n| < \infty$. ∎

Wald 等式

- 【例 3.3 (B)】 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid, 满足

$$\mathrm{P}(X_n = 0) = \mathrm{P}(X_n = 1) = 1/2, \quad \forall\, n,$$

定义 $N = \min\{n : S_n = 10\}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, 则 $\mathrm{E}\,X = 1/2$, $\mathrm{E}\,N < \infty$. 利用 Wald 等式得

$$10 = \mathrm{E}\,S_N = \mathrm{E}\,X \cdot \mathrm{E}\,N \implies \mathrm{E}\,N = 20.$$

- 【例 3.3 (C)】 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid, 满足

$$\mathrm{P}(X_n = -1) = \mathrm{P}(X_n = 1) = 1/2, \quad \forall\, n,$$

定义 $N = \min\{n : S_n = 1\}$. 若 $\mathrm{E}\,N < \infty$, 则由 Wald 等式得

$$1 = \mathrm{E}\,S_N = \mathrm{E}\,N \cdot \mathrm{E}\,X = 0,$$

矛盾. 故 $\mathrm{E}\,N = +\infty$. ∎

更新定理

- 当 $\mu = \mathrm{E}\, X_1 < \infty$ 时，$m(+\infty) = +\infty$.

证明：注意到 $N(t)+1$ 是更新间隔序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的一个停时，所以当 $\mu = \mathrm{E}\, X_1 < \infty$ 时，

$$t \leq \mathrm{E}\left[S_{N(t)+1}\right] = \mu[m(t)+1], \quad \forall\, t \geq 0. \tag{*.6}$$

- 定理 3.3.4 (基本更新定理)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}, \tag{*.7}$$

其中 $\mu \leq +\infty$.

更新定理

证明：(1) 先假设 $\mu < \infty$, 则由 $(*.1)$ 得

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}.$$

任取 $\tau > 0$, 定义 $\overline{X}_n = X_n \wedge \tau$, 考虑 $\{\overline{X}_n, n \geq 1\}$ 对应 $\{\overline{N}(t), t \geq 0\}$, $\overline{m}(t)$, $\overline{\mu}$ 和 $\overline{S}_n$. 由

$$\overline{S}_{\overline{N}(t)+1} \leq t + \tau$$

知 $\overline{\mu}\,[\overline{m}(t) + 1] \leq t + \tau$, 所以

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{\overline{m}(t)}{t} \leq \frac{1}{\overline{\mu}}. \qquad (*.8)$$

又 $\overline{\mu} \to \mu$ $(\tau \to \infty)$, 故 $(*.7)$ $\surd$.

(2) 假设 $\mu = +\infty$. 同上, $\overline{\mu} \to +\infty$ $(\tau \to \infty)$. 由 $(*.8)$ 得 $(*.7)$. ∎

- **格点分布**：设非负随机变量 $X \sim F$. 称 X 为格点的，若存在 $d > 0$ 使得
$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = kd) = 1.$$
此时，F 称为格点分布. 满足上述性质的最大 d 称为 X 的周期.

- **定理 3.4.1** (Blackwell 定理)
  (i) 若 F 非格点的，则
$$\lim_{t\to\infty} [m(t+a) - m(t)] = \frac{a}{\mu}, \quad \forall\, a > 0.$$
  (ii) 若 F 为周期为 d 的格点分布，则
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\text{于时刻 } nd \text{ 的更新次数}] = \frac{d}{\mu}.$$

Blackwell 定理的合理性

(i) 非格点情形. 当 t 足够大，初始状态对 $m(t+a)-m(t)$ 影响足够小，若 $g(a)=\lim_{t\to\infty}[m(t+a)-m(t)]$ 存在有限，则

$$g(a+b)=g(a)+g(b),\ \forall a,b\geq 0 \implies g(a)=ca,\quad \forall a\geq 0.$$

又

$$\frac{m(n)}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[m(k)-m(k-1)]\to g(1)=c=\frac{1}{\mu},$$

所以, $g(a)=a/\mu,\ \forall\, a\geq 0.$

(ii) 格点情形.

$$\mathrm{E}\,[\text{于时刻 } nd \text{ 的更新次数}]=m(nd)-m((n-1)d)\to\frac{d}{\mu}.$$

直接黎曼可积

▶ 定义 $h:\Re_+\to\Re$ 称为直接黎曼可积，若 $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{m}_n(a)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\underline{m}_n(a)$ 存在有限，且

$$\lim_{a\to 0} a\sum_{n=1}^{\infty}\overline{m}_n(a)=\lim_{a\to 0} a\sum_{n=1}^{\infty}\underline{m}_n(a),$$

其中

$$\overline{m}_n(a)=\sup\{h(t),\ (n-1)a\le t\le na\},$$
$$\underline{m}_n(a)=\inf\{h(t),\ (n-1)a\le t\le na\}.$$

※ h 直接黎曼可积的一个充分条件：

$$h(t)\ge 0;\qquad h\text{ 单调递减};\qquad \int_0^{\infty}h(t)\,\mathrm{d}t<\infty.$$

▶ 定理 3.4.2 (关键更新定理) 若 F 非格子点分布，且 h 为直接黎曼可积，则

$$\int_0^t h(t-x)\,\mathrm{d}m(x) \;\to\; \frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}s, \quad t\to\infty,$$

其中 $\mu=\mu_F$, $m(t)$ 是间隔分布 F 对应的更新函数.

※ Blackwell 定理 $\Longleftrightarrow$ 关键更新定理

证：仅证 ($\Longleftarrow$). 取 $h(x)=1_{[0,a)}(x)$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^t h(t-x)\,\mathrm{d}m(x) &= \int_0^t 1_{(t-a,t]}(x)\,\mathrm{d}m(x)\\ &= m(t)-m(t-a)\to\frac{a}{\mu}.\end{aligned}$$

- 关键更新定理应用场景

计算时刻 t 某事件的概率或某变量的期望 $g(t)$ 当 $t\to\infty$ 时的极限.
一般先导出 $g(t)$ 满足如下两种类型的积分方程:

$$g(t)=h(t)+\int_0^t g(t-x)\,\mathrm{d}F(x),\quad t\geq 0; \tag{$*$.9}$$

$$g(t)=h(t)+\int_0^t h(t-x)\,\mathrm{d}m(x),\quad t\geq 0. \tag{$*$.10}$$

※ 公式的推导

- 对第一次更新发生时刻 $S_1=X_1$ 取条件，可导出 $(*.9)$;
- 对 t 之前或时刻 t 最后一次更新发生时刻取条件，可导出 $(*.10)$.

- 引理 3.4.a $(*.9) \Longleftrightarrow (*.10)$.

证：对任意函数 $g:\Re_+ \to \Re$, 定义其 Laplace 变换

$$\widetilde{g}(z) = \int_0^\infty e^{-tz}\,\mathrm{d}g(t), \quad z \geq 0.$$

在 $(*.9)$ 两边取 Laplace 变换，得 $\widetilde{g}(z) = \widetilde{h}(z) + \widetilde{g}(z)\widetilde{F}(z)$,

$$\widetilde{g}(z) = \frac{\widetilde{h}(z)}{1-\widetilde{F}(z)}.$$

又由更新方程 $m(t) = F(t) + m * F(t)$ 得 $1-\widetilde{F}(z) = 1/[1+\widetilde{m}(z)]$, 故

$$\widetilde{g}(z) = \widetilde{h}(z)[1+\widetilde{m}(z)],$$

即 $(*.10)$. ∎

- 引理 3.4.1 对任意 $0 \le s \le t$,

$$\mathrm{P}\left(S_{N(t)} \le s\right) = \overline{F}(t) + \int_{[0,s]} \overline{F}(t-y)\,\mathrm{d}m(y).$$

证： 约定 $S_0 = 0$, 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(S_{N(t)} \le s\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}\left(S_n \le s, S_{n+1} > t\right) \\
&= \overline{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,s]} \overline{F}(t-y)\,\mathrm{d}F^{(n)}(y) \\
&= \overline{F}(t) + \int_{[0,s]} \overline{F}(t-y)\,\mathrm{d}m(y). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

$S_{N(t)}$ 的分布: 当 $F(0)=0$ 时,

- $S_{N(t)}$ 于 0 点的概率堆积 $\mathrm{P}\left(S_{N(t)}=0\right)=\overline{F}(t)$;
- $\mathrm{d}F_{S_{N(t)}}(y)=\overline{F}(t-y)\,\mathrm{d}m(y)$, $y>0$.

※ "$F(0)=0$" 不可删除. 反例: 设 F 满足 $\mathrm{P}\left(X_k=0\right)=\mathrm{P}\left(X_k=1\right)=1/2$, 则利用 $S_{N(1/2)}\leq 1/2$ 得

$$\mathrm{P}\left(S_{N(1/2)}=0\right)=1\neq\frac{1}{2}=\overline{F}(1/2).$$

但引理 3.4.1 依然正确, 因为 $m(0)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{(n)}(0)=\sum_{n=1}^{\infty}1/2^n=1$, 所以

$$\int_{\{0\}}\overline{F}(1/2-y)\,\mathrm{d}m(y)=\frac{1}{2}m(0)=\frac{1}{2}.$$

$\mathrm{d}F_{S_{N(t)}}(y)$ 的理解:

- 当 F 有概率密度 f 时，则 $S_{N(t)}$ 于 $(0,t)$ 上具有有亏的概率密度

$$f_{S_{N(t)}}(y) = \overline{F}(t-y)m'(y), \quad y > 0.$$

注意到

$$\mathrm{d}m(y) = \mathrm{P}\,(\text{于 } (y, y+dy) \text{ 有更新发生}),$$

于是，对 $\forall y \in (0,t)$,

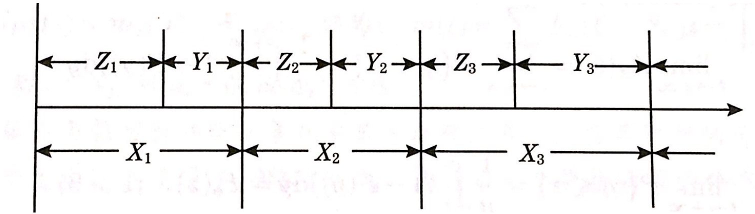
$$\begin{aligned}\mathrm{d}F_{S_{N(t)}}(y) &= \overline{F}(t-y)\,\mathrm{d}m(y) \\ &= \mathrm{P}\Big(\text{于 } (y, y+dy) \text{ 有更新发生}, \\ &\qquad \text{且其后的一个更新间隔大于 } t-y\Big).\end{aligned}$$

定义

更新过程 $\{N(t), t \geq 0\}$, 更新发生间隔时间序列 $\{X_n, n \geq 1\}$, 过程有两个状态 “on” 和 “off”.

$$X_n = Z_n + Y_n$$

过程在 Z_n 时段处于 “on”, 于 Y_n 时段处于 “off”.



$\{(Z_n, Y_n), n \geq 1\}$ iid 随机向量, Z_n 与 Y_n 之间允许相依. 记

$$Z_n \sim H, \quad Y_n \sim G, \quad X_n \sim F.$$

$$P(t) = \mathrm{P}\,(\text{时刻 } t \text{ 处于状态 “on” })$$

- 定理 3.4.4 设 $\mu_F < \infty$, F 非格点，则 $\lim_{t\to\infty} P(t) = \dfrac{\mathrm{E}\,Z_1}{\mathrm{E}\,Z_1 + \mathrm{E}\,Y_1}$.

证： 对 $S_{N(t)}$ 取条件，得

$$\begin{aligned}
P(t) &= \mathrm{P}\,(\text{时刻 } t \text{ 处于 “on” } | S_{N(t)} = 0) \cdot \mathrm{P}\,(S_{N(t)} = 0) \\
&\quad + \int_0^t \mathrm{P}\,(\text{时刻 } t \text{ 处于 “on” } | S_{N(t)} = y)\, \mathrm{d}F_{S_{N(t)}}(y) \\
&= \mathrm{P}\,(Z_1 > t | Z_1 + Y_1 > t) \cdot \overline{F}(t) \\
&\quad + \int_0^t \mathrm{P}\,(Z > t - y | Z + Y > t - y) \overline{F}(t - y)\, \mathrm{d}m(y) \\
&= \overline{H}(t) + \int_0^t \overline{H}(t - y)\, \mathrm{d}m(y). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

定理 3.4.4 的应用

回到更新过程 $\{N(t), t \geq 0\}$

$$A(t) = t - S_{N(t)} \qquad \text{元件于时刻 } t \text{ 的年龄}$$
$$Y(t) = S_{N(t)+1} - t \qquad \text{元件于时刻 } t \text{ 的剩余年龄}$$

- 推论 3.4.5 设 F 非格子点，且 $\mu < \infty$，则对 $\forall x > 0$，

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\left(A(t) \leq x\right) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \overline{F}(s)\,\mathrm{d}s.$$

证：固定 x，定义过程的“on”和“off”状态：

$$\text{时刻 } t \text{ 处于“on”} \quad \longleftrightarrow \quad A(t) \leq x.$$

于是，$Z_n = X_n \wedge x$，$Y_n = X_n - X_n \wedge x$，$n \geq 1$. 应用定理 3.4.4，

$$P(A(t) \leq x) \to \frac{\mathrm{E}\left[X_1 \wedge x\right]}{\mathrm{E}\, X_1} = \frac{1}{\mu} \int_0^x \overline{F}(s)\,\mathrm{d}s. \quad \blacksquare$$

- 推论 3.4.5′ 设 F 非格子点，且 $\mu < \infty$, 则

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\,(Y(t) \le x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(s)\,\mathrm{d}s, \quad x > 0.$$

证法一：固定 x, 定义过程的 “on” 和 “off” 状态：

$$\text{时刻 } t \text{ 处于 “on”} \quad \longleftrightarrow \quad Y(t) > x;$$

$$\text{时刻 } t \text{ 处于 “off”} \quad \longleftrightarrow \quad Y(t) \le x.$$

于是，

$$Z_n = X_n - X_n \wedge x, \quad Y_n = X_n \wedge x, \quad n \ge 1.$$

应用定理 3.4.4,

$$P(Y(t) > x) \to \frac{\mathrm{E}\,[X_1 - X_1 \wedge x]}{\mathrm{E}\,X_1} = \frac{1}{\mu}\int_x^\infty \overline{F}(s)\,\mathrm{d}s. \ \blacksquare$$

证法二：固定 x, 定义

$$g(t) = \mathrm{P}\left(Y(t) > x\right).$$

对首次更新时刻 X_1 取条件，得

$$\mathrm{P}\left(Y(t) > x | X_1 = s\right) = \begin{cases} 1, & s > t + x, \\ 0, & t \le s < t + x, \\ g(t-s), & s < t. \end{cases}$$

于是，

$$g(t) = \overline{F}(t+x) + \int_0^t g(t-s)\,\mathrm{d}F(s).$$

由引理 3.4.a 得

$$g(t) = \overline{F}(t+x) + \int_0^t \overline{F}(t+x-s)\,\mathrm{d}m(s).$$

注意到 $\overline{F}(\cdot + x)$ 是直接黎曼可积，应用定理 3.4.4 得

$$g(t) \longrightarrow \frac{1}{\mu}\int_x^\infty \overline{F}(x)\,\mathrm{d}x. \quad \blacksquare$$

- 推论 3.4.5$''$ 设 F 非格子点，且 $\mu < \infty$, 则

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\left(X_{N(t)+1} \le x\right) = \frac{1}{\mu}\int_0^x y\,\mathrm{d}F(y), \quad x > 0.$$

证：固定 x, 定义过程的 “on” 和 “off” 状态：

$$\text{时刻 } t \text{ 处于 “on”} \quad \longleftrightarrow \quad X_{N(t)+1} > x;$$

$$\text{时刻 } t \text{ 处于 “off”} \quad \longleftrightarrow \quad X_{N(t)+1} \le x.$$

于是，

$$Z_n = X_n \cdot 1_{\{X_n > x\}}, \quad Y_n = X_n \cdot 1_{\{X_n \le x\}}, \quad n \ge 1.$$

应用定理 3.4.4,

$$P(X_{N(t)+1} > x) \to \frac{\mathrm{E}\left[X_1 1_{\{X_1 > x\}}\right]}{\mathrm{E}\, X_1} = \frac{1}{\mu}\int_x^\infty y\,\mathrm{d}F(y). \quad \blacksquare$$

检查悖论

$X_{N(t)+1}$ 时指包含点 t 的那个更新区间的长度：

$$X_{N(t)+1} = A(t) + Y(t).$$

但

$$X_{N(t)+1} \text{ 与 } X_1 \text{ 并不同分布.}$$

可以证明 (见习题 3.3)： $X_1 \leq_{\mathrm{st}} X_{N(t)+1}$.

※ 记 $X_{N(t)+1}$ 的极限分布为 F_∞, 则

$$F_\infty(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x y \, \mathrm{d}F(y),$$

其对应的期望

$$\mu_{F_\infty} = \frac{1}{\mu}\mathrm{E}\, X_1^2 > \mu$$

检查悖论

问题：$\kappa := \mu_{F_\infty}/\mu$ 的界可以达到多少？

- $\kappa = 1$: 当 F 为退化分布时，即更新间隔 $X_k = c > 0, \forall k \geq 1$.
- $\kappa = 2$: 当 $F = \mathrm{Exp}(\lambda)$ 时.
- κ 有上界吗？

  设 $F = \mathrm{Poi}(\lambda)$, 则 $\mu = \lambda$, $\mu_{F_\infty} = 1 + \lambda$. 于是，当 $\lambda \to 0^+$ 时

$$\frac{\mu_{F_\infty}}{\mu} = 1 + \frac{1}{\lambda} \to +\infty.$$

检查悖论的另一种形式 (Ross, 2003)

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid 正整值随机变量，X_j 表示第 j 个家庭小孩的个数，所有家庭的小孩都在一个学校上学. 现从学校中随机指定一个小孩，I 表示该小孩所在家庭的编号，X_I 表示该小孩所在家庭的小孩个数.

问题：X_I 与 X_1 之间同分布吗？

※ 记 $p_k = \mathrm{P}(X_1 = k)$, 则

$$\mathrm{P}(X_I = k) = kp_k \cdot \mathrm{E}\left[\frac{n}{k + \sum_{i=2}^n X_i}\right], \quad k \geq 1.$$

可以证明: $X_1 \leq_{\mathrm{lr}} X_I$, $X_1 \leq_{\mathrm{st}} X_I$ (X_I 随机大于 X_1).

▶【例 3.4 (A)】（存储论）设顾客按更新过程到达一个商店，到达间隔 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim F$, F 非格点. 该商店经营单一货品，顾客采购量为 $\{Y_n, n \geq 1\}$ iid $\sim G$. 商店采用 (s, S) 订货策略，$0 < s < S < \infty$ 为确定的实数, 定货时间不计. 记 $X(t)$ 表示该商店 t 时刻的存货量, 且设 $X(0) = S$. 求 $\lim \mathrm{P}(X(t) \geq x)$, $x \in (s, S)$.

解：定义新的更新过程，当存货量达到 S 的时刻为更新点，定义“on”和“off”状态：

$$\text{时刻 } t \text{ 处于“on”} \longleftrightarrow X(t) \geq x;$$

$$\text{时刻 } t \text{ 处于“off”} \longleftrightarrow X(t) < x;$$

以 T_{on} 和 T_{off} 分别表示一个循环中处于“on”和“off”的时长，则

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}(X(t) \geq x) = \frac{\mathrm{E}\, T_{\mathrm{on}}}{\mathrm{E}\, T_{\mathrm{on}} + \mathrm{E}\, T_{\mathrm{off}}}.$$

(续) 记 $\{N_G(t), n \geq 1\}$ 为一个更新过程，对应的更新间隔为 $\{Y_n, n \geq 1\}$，更新函数记为 $m_G(t)$，则

$$T_{\rm on} = \sum_{k=1}^{N_G(S-x)+1} X_k, \qquad T := T_{\rm on} + T_{\rm off} = \sum_{k=1}^{N_G(S-s)+1} X_k.$$

于是

$$\mathrm{E}\, T_{\rm on} = \mu_F[m_G(S-x)+1],$$
$$\mathrm{E}\, T = \mu_F[m_G(S-s)+1].$$

故

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\,(X(t) \geq x) = \frac{m_G(S-x)+1}{m_G(S-s)+1}. \quad \blacksquare$$

▶ 命题 3.4.6 设 F 非格点，$X \sim F$，且 $\mathrm{E}\, X^2 < \infty$，则

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}\, Y(t) = \frac{\mathrm{E}\, X^2}{2\mu}.$$

证法一：记 $h(t) = \mathrm{E}\,[(X-t)_+]$，则 $\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{E}\, X^2/2$，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\, Y(t) &= \mathrm{E}\,[Y(t)|S_{N(t)} = 0]\cdot \overline{F}(t) \\
&\quad + \int_0^t \mathrm{E}\,[Y(t)|S_{N(t)} = y]\overline{F}(t-y)\,\mathrm{d}m(y) \\
&= \mathrm{E}\,[X-t|X>t]\overline{F}(t) \\
&\quad + \int_0^t \mathrm{E}\,[X-(t-y)|X>t-y]\overline{F}(t-y)\,\mathrm{d}m(y) \\
&= h(t) + \int_0^t h(t-y)\,\mathrm{d}m(y) \longrightarrow \frac{\mathrm{E}\, X^2}{2\mu}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

- 命题 3.4.6 设 F 非格点，$X \sim F$, 且 $\mathrm{E}\,X^2 < \infty$, 则

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}\,Y(t) = \frac{\mathrm{E}\,X^2}{2\mu}.$$

证法二：对首次更新发生时刻 X_1 取条件，得

$$\mathrm{E}\,Y(t) = \mathrm{E}\,[Y(t)|X_1 > t] \cdot \overline{F}(t) + \int_0^t \mathrm{E}\,[Y(t)|X_1 = y]\,\mathrm{d}F(y).$$

记 $h(t) = \mathrm{E}\,[(X - t)_+]$，$g(t) = \mathrm{E}\,Y(t)$, 则

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-y)\,\mathrm{d}F(y).$$

因此，

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-y)\,\mathrm{d}m(y). \quad \blacksquare$$

- 推论 3.4.7 设 F 非格点，$X \sim F$, 且 $\mathrm{E}\, X^2 < \infty$, 则

$$\lim_{t\to\infty}\left[m(t) - \frac{t}{\mu}\right] = \frac{\mathrm{E}\, X^2}{2\mu^2} - 1.$$

证：注意到

$$S_{N(t)+1} = t + Y(t),$$

于是,

$$\mathrm{E}\, S_{N(t)+1} = t + \mathrm{E}\, Y(t) \longrightarrow t + \frac{\mathrm{E}\, X^2}{2\mu}.$$

又

$$\mathrm{E}\, S_{N(t)+1} = \mu[m(t) + 1]$$

得证. ∎

▶ 定义 3.5.1 设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 独立，$X_1 \sim G$, $X_k \sim F$, $k \ge 2$, 且 $F(0) < 1$, 定义 $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$,

$$N_D(t) = \max\{n: \ S_n \le t, n \ge 0\},$$

则称 $\{N_D(t), t \ge 0\}$ 为延迟 (Delayed) 更新过程.

背景：于时刻 t 观察一个标准更新过程，且时刻 t 非更新点，此时看未来观察到的过程即为延迟更新过程，且 $G(x) = \mathrm{P}\,(Y(t) \le x)$.

性质：

- $\mathrm{P}\,(N_D(t) = 0) = \overline{G}(t)$,

  $\mathrm{P}\,(N_D(t) = n) = G * F^{(n-1)}(t) - G * F^{(n)}(t)$, $n \ge 1$;
- 更新函数 $m_D(t) = \mathrm{E}\,N_D(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G * F^{(n-1)}(t)$,

$$m_D(t) = G(t) + \int_0^t m_D(t-s)\,\mathrm{d}F(s).$$

- 引理 对任意 $0 \le s \le t$,

$$\mathrm{P}\left(S_{N_D(t)} \le s\right) = \overline{G}(t) + \int_{[0,s]} \overline{F}(t-y)\,\mathrm{d}m_D(y).$$

证： 约定 $S_0 = 0$, 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(S_{N_D(t)} \le s\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}\left(S_n \le s, S_{n+1} > t\right) \\
&= \overline{G}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,s]} \overline{F}(t-y)\,\mathrm{d}G * F^{(n-1)}(y) \\
&= \overline{G}(t) + \int_{[0,s]} \overline{F}(t-y)\,\mathrm{d}m_D(y). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

$S_{N_D(t)}$ 的分布:

当 $G(0)=0$ 时,

- $S_{N_D(t)}$ 于 0 点的概率堆积 $\mathrm{P}\left(S_{N_D(t)}=0\right)=\overline{G}(t)$;
- $\mathrm{d}F_{S_{N_D(t)}}(y)=\overline{F}(t-y)\,\mathrm{d}m_D(y)$, $y>0$.

- 命题 3.5.1 记 $\mu = \mu_F$，F 对应的均值.
  - $N_D(t)/t \to 1/\mu$, a.s., $t \to \infty$;
  - $m_D(t)/t \to 1/\mu$, $t \to \infty$;
  - 若 F 非格子点，$a > 0$, 则

$$m_D(t+a) - m_D(t) \to \frac{a}{\mu}, \quad t \to \infty;$$

  - 若 F, G 皆为格子点，且周期为 d, 则

$$\mathrm{E}[\text{于时刻 } nd \text{ 发生的更新数}] \to \frac{d}{\mu}, \quad n \to \infty;$$

  - 若 F 非格子点，$\mu < \infty$, h 直接黎曼可积，则

$$\int_0^t h(t-s)\,\mathrm{d}m_D(s) \to \frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \to \infty.$$

▶【例 3.5 (A)】 (花样问题) 观察 iid 离散随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$. 花样：$x_1 x_2 \cdots x_k$. $N(n)$ 表示到时刻 n 为止花样出现的次数, 则 $\{N(n), n \geq 1\}$ 为延迟更新过程.

- 求花样出现的速率 $1/\mu$, 其中 μ 是相邻两个花样之间的间隔时间. 注意到此时 F, G 为格子点分布，周期为 1，所以

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\mu} &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\,[\text{时刻 } n \text{ 出现的花样次数}] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\,(\text{时刻 } n \text{ 出现花样}) \\
&= \prod_{i=1}^{k} \mathrm{P}\,(X = x_i).
\end{aligned}
$$

- 以 T_A 表示等待花样 A 首次出现所需的时间; 以 $T_{A|B}$ 表示给定花样 B 已经出现，等待花样 A 出现还需的额外等待时间. 求 $\mathrm{E}\, T_A$.

(续) 求 $\mathrm{E}\, T_A$

设 A 为 $x_1x_2\cdots x_k$. 分两种情况.

- 设一个花样 A 的出现对下一个花样 A 的发生没有影响. 此时, $\{N(n), n\geq 1\}$ 为标准更新过程,

$$\mathrm{E}\, T_A = \mu = 1\Big/\prod_{i=1}^{k}\mathrm{P}\,(X=x_i).$$

- 设一个花样 A 的出现对下一个花样 A 的发生有影响. 举例, A= "0101", $\mathrm{P}\,(X=1)=p$, $\mathrm{P}\,(X=0)=1-p=q$, 则

$$T_{0101} = T_{01} + T_{0101|01},$$

其中 T_{01} 与 $T_{0101|01}$ 独立. 于是,

$$\mathrm{E}\, T_{0101} = \mathrm{E}\, T_{01} + \mathrm{E}\, T_{0101|01} = \frac{1}{pq} + \frac{1}{p^2q^2}.$$

(续) 求 $\mathrm{E}\, T_A$

- 举例，独立抛掷硬币，每次以概率 p 出现 H，以概率 $q=1-p$ 出现 T，A=“HTHHTHH”，则

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{HTHHTHH}} &= T_{\mathrm{HTHH}} + T_{\mathrm{HTHHTHH|HTHH}} \\ &= T_{\mathrm{H}} + T_{\mathrm{HTHH|H}} + T_{\mathrm{HTHHTHH|HTHH}} \end{aligned}$$

其中 T_{H}, T_{HTHH} 与 $T_{\mathrm{HTHHTHH|HTHH}}$ 独立. 于是,

$$\mathrm{E}\, T_{\mathrm{HTHHTHH}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^3 q} + \frac{1}{p^5 q^2}.$$

(续) 求 $\mathrm{E}\, T_{B|A}$

- 举例，独立抛掷硬币，每次以概率 p 出现 H，以概率 $q=1-p$ 出现 T，A=“HTHT”，B=“THTT”，则

$$T_{B|A} = T_{\mathrm{THTT}|\mathrm{THT}},$$

$$\mathrm{E}\, T_{\mathrm{THTT}} = \mathrm{E}\, T_{\mathrm{THT}} + \mathrm{E}\, T_{\mathrm{THTT}|\mathrm{THT}},$$

$\Longrightarrow$

$$\mathrm{E}\, T_{B|A} = \mathrm{E}\, T_{\mathrm{THTT}} - \mathrm{E}\, T_{\mathrm{THT}} = \frac{1}{q^3 p} - \frac{1}{q^2 p}.$$

由 $T_{A|B} = T_A$ 得

$$\mathrm{E}\, T_{A|B} = \mathrm{E}\, T_A = \frac{1}{p^2 q^2} + \frac{1}{pq}.$$

(续) 求 $P_A := \mathrm{P}(\text{A 于 B 之前出现})$

- 举例，A= “HTHT” ， B= “THTT” , $M = \min\{T_A, T_B\}$, 则

$$\mathrm{E}\,T_A = \mathrm{E}\,M + \mathrm{E}\,(T_A - M|\text{B 在 A 前}) \cdot \mathrm{P}\,(\text{B 在 A 前}),$$

即

$$\mathrm{E}\,T_A = \mathrm{E}\,M + \mathrm{E}\,T_{A|B}(1 - P_A). \qquad (*.11)$$

类似，

$$\mathrm{E}\,T_B = \mathrm{E}\,M + \mathrm{E}\,T_{B|A} \cdot P_A. \qquad (*.12)$$

求解 $(*.11)$ 和 $(*.12)$ 得 $\mathrm{E}\,M$ 和 P_A.

特别，当 $p = 1/2$ 时，$\mathrm{E}\,T_A = 4 + 16 = 20$, $\mathrm{E}\,T_B = 2 + 16 = 18$, $\mathrm{E}\,T_{A|B} = \mathrm{E}\,T_A = 20$, $\mathrm{E}\,T_{B|A} = 16 - 8 = 8$. 代入 $(*.11)$ 和 $(*.12)$ 得

$$\mathrm{E}\,M = 90/7, \quad P_A = 9/14.$$

利用初等概率求 $\mathrm{E}\, T_A$

举例，独立抛掷硬币，每次以概率 p 出现 H (以“1”表示), 以概率 $q=1-p$ 出现 T（以“0”表示），A=“00”，B=“01”.

- 求 $\mathrm{E}\, T_A$:

$$\mathrm{E}\, T_{00} = q\,\mathrm{E}\,[T_{00}|\text{首次}"0"] + p\,\mathrm{E}\,[T_{00}|\text{首次}"1"].$$

再对第 2 次抛掷结果取条件，得

$$\mathrm{E}\, T_{00} = q\big[2q + p(2+\mathrm{E}\, T_{00})\big] + p(1+\mathrm{E}\, T_{00}).$$

于是，

$$\mathrm{E}\, T_{00} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}.$$

- 求 $\mathrm{E}\,T_B$：对第 2 次抛掷结果取条件，

$$\mathrm{E}\,[T_{01}|\text{首次}"0"] = 2p + q\big(1 + \mathrm{E}\,[T_{01}|\text{首次}"0"]\big)$$
$$\Longrightarrow \mathrm{E}\,[T_{01}|\text{首次}"0"] = 1 + \frac{1}{p}.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,T_{01} &= q\,\mathrm{E}\,[T_{01}|\text{首次}"0"] + p\,\mathrm{E}\,[T_{01}|\text{首次}"1"] \\ &= q\left(1+\frac{1}{p}\right) + p(1+\mathrm{E}\,T_{01}).\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\mathrm{E}\,T_{01} = \frac{1}{pq}.$$

※ 当 $p = 1/2$，比较 $\mathrm{E}\,T_{00} = 6$ 与 $\mathrm{E}\,T_{01} = 4$.

▶ 【例 3.5 (B)】 一个系统由 n 个元件并联构成，每个元件独立工作，元件 i 的运行是一个交替更新过程，工作寿命$\sim \mathrm{Exp}(1/\lambda_i)$，一旦失效，立即进行修理，修理时间$\sim \mathrm{Exp}(1/\mu_i)$. 假设 n 个元件于时刻 0 皆正常工作，以 $N(t)$ 表示 $(0,t]$ 时间段系统失效的次数，则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个延迟更新过程，系统失效时刻为更新点. 求

(1) 系统两次失效之间的期望时长；

(2) 系统一个工作期的平均时长；

(3) 系统长时间处于工作状态的概率.

分析：

- 时刻 t 为更新点，当且仅当 t 之前瞬间恰有一个元件在正常工作，但该元件于 t 时刻失效，其它元件未修复；
- 时刻 t 系统转入工作状态，当且仅当 t 之前瞬间元件皆失效，但 t 时刻一个元件修复.

解：相邻两个更新点之间的一个循环时长记为 T，一个循环内系统处于工作和失效的时长分别记为 T_{on} 和 T_{off}；$T = T_{\mathrm{on}} + T_{\mathrm{off}}$. 由 Blackwell 定理得

$$\begin{aligned}
\frac{h}{\mathrm{E}\,T} &= \lim_{t\to\infty}[m_D(t+h) - m_D(t)] \\
&= \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\,(\text{系统于 } (t, t+h] \text{ 有一次失效}) + \circ(h) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}}_{\mathrm{P}\,(\text{元件 } i \text{ 工作})} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\lambda_i}h + \circ(h)\right)}_{\text{元件 } i \text{ 于 } (t,t+h) \text{ 失效}} \cdot \prod_{j\neq i} \underbrace{\frac{\mu_j}{\lambda_j+\mu_j} e^{-h/\mu_j}}_{\text{其它元件失效，但于 } (t,t+h) \text{ 未修复}} + \circ(h) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{\lambda_j+\mu_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu_i} h + \circ(h).
\end{aligned}$$

※ 长远来看，元件 i 处于“on”和“off”的概率分别为 $\lambda_i/(\lambda_i+\mu_i)$ 和 $\mu_i/(\lambda_i+\mu_i)$.

(续) 于是,

$$\mathrm{E}\,T = 1 \Big/ \prod_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{\lambda_j + \mu_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu_i}.$$

显然,

$$\mathrm{E}\,T_{\text{off}} = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu_i}$$

(T_{off} 可以表示为 n 个独立指数随机变量的最小值), 因此,

$$\mathrm{E}\,T_{\text{on}} = \left(1 - \prod_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{\lambda_j + \mu_j}\right) \Big/ \prod_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{\lambda_j + \mu_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu_i}.$$

$$\mathrm{P}\,(\text{系统于时刻 } t \text{ 工作}) \longrightarrow 1 - \prod_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{\lambda_j + \mu_j}, \quad t \to \infty. \ \blacksquare$$

- 平衡分布 F_e：
$$F_e(x) = \frac{1}{\mu_F} \int_0^x \overline{F}(y)\,\mathrm{d}y,$$
其中 F 为一个非负随机变量的 cdf.
- 平衡更新过程：$G = F_e$

※
一个平衡更新过程可视为于时刻 0 去看一个更新间隔分布为 F 且从无穷远过去演化而来的更新过程. 此时，由推论 3.4.5′ 知，“$Y(0)$”$\sim F_e$

- **定理 3.5.2** 考虑一个平衡更新过程 $\{N_D(t), t \geq 0\}$.

(1) $m_D(t) = t/\mu$;

(2) $Y_D(t) \sim F_e, \forall\, t \geq 0$;

(3) $\{N_D(t), t \geq 0\}$ 有平稳增量.

证： (1) 设 $m(t)$ 对应于更新间隔分布为 F 的标准更新过程，则

$$m_D(t) = \lim_{s\to\infty}[m(t+s) - m(s)] = \frac{t}{\mu}.$$

(2) 基于上面的观察.

(3) 直接由（2）得到.

(续) (2) 另证 对 $S_{N_D(t)}$ 取条件,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(Y_D(t)>x\right) &= \mathrm{P}\left(Y_D(t)>x \mid S_{N_D(t)}=0\right)\overline{G}(t) \\
&\quad + \int_0^t \mathrm{P}\left(Y_D(t)>x \mid S_{N_D(t)}=y\right)\overline{F}(t-y)\,\mathrm{d}m_D(y) \\
&= \mathrm{P}\left(X_1-t>x \mid X_1>t\right)\overline{G}(t) \\
&\quad + \int_0^t \mathrm{P}\left(X-(t-y)>x \mid X>t-y\right)\overline{F}(t-y)\,\mathrm{d}y/\mu \\
&= \overline{F}_e(t+x)+\frac{1}{\mu}\int_x^{t+x}\overline{F}(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \overline{F}_e(x). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

▶ 定义 设 $\{(X_n, R_n), n \ge 1\}$ 为 iid 随机向量，其中 $\{X_n, n \ge 1\}$ 为更新过程 $\{N(t), t \ge 0\}$ 的更新发生间隔，R_n 是第 n 个更新发生时得到的酬劳. 定义

$$R(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} R_j,$$

则称 $\{R(t), t \ge 0\}$ 为更新酬劳过程.

注

- R_n 与 X_n 不必独立;
- 记号: $\mathrm{E}\,X = \mathrm{E}\,X_n$, $\mathrm{E}\,R = \mathrm{E}\,R_n$, 且

$$(X_1, R_1) \overset{\mathrm{d}}{=} (X, R).$$

- **定理 3.6.1** 设 R_n 为非负随机变量, $\mathrm{E}\,R < \infty$, $\mathrm{E}\,X < \infty$, 则

(1) $$\frac{R(t)}{t} \longrightarrow \frac{\mathrm{E}\,R}{\mathrm{E}\,X}, \text{ a.s., } t \to \infty;$$

(2) $$\frac{\mathrm{E}\,[R(t)]}{t} \longrightarrow \frac{\mathrm{E}\,R}{\mathrm{E}\,X}, \ t \to \infty.$$

※ 在定理 3.6.1 中, 没有“假设间隔分布 F 的非格子点”的条件.

证: (1) 注意到 $N(t) \to \infty$, $t \to \infty$, 及

$$\frac{R(t)}{t} = \frac{\sum_{k=1}^{N(t)} R_k}{N(t)} \cdot \frac{N(t)}{t},$$

利用强大数律即可.

(续) (2) $N(t)+1$ 为 $\{R_n, n \geq 1\}$ 的一个停时，所以

$$\mathrm{E}\,R(t) = \mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)+1} R_k\right] - \mathrm{E}\,R_{N(t)+1} = \mathrm{E}\,R \cdot [m(t)+1] - \mathrm{E}\,R_{N(t)+1},$$

以下仅证明 $\mathrm{E}\,[R_{N(t)+1}]/t \to 0$, $t \to \infty$. 为此，定义

$$g(t) = \mathrm{E}\,[R_{N(t)+1}], \quad h(t) = \mathrm{E}\,[R_1 1_{\{X_1 > t\}}],$$

对 $S_{N(t)}$ 取条件得

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathrm{E}\,[R_1 | X_1 > t]\overline{F}(t) + \int_0^t \mathrm{E}\,[R | X > t-y]\overline{F}(t-y)\,\mathrm{d}m(y) \\ &= h(t) + \int_0^t h(t-y)\,\mathrm{d}m(y). \end{aligned}$$

(续) 显然，$h(t) \le \mathrm{E}\,R$, $h(t) \downarrow$, $h(t) \to 0$, 于是对 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $T > 0$, 当 $t > T$ 时，$h(t) < \epsilon$. 因此，

$$
\begin{aligned}
\frac{|g(t)|}{t} &\le \frac{h(t)}{t} + \int_0^{t-T} \frac{h(t-y)}{t}\,\mathrm{d}m(y) + \int_{t-T}^{t} \frac{h(t-y)}{t}\,\mathrm{d}m(y) \\
&\le \frac{\epsilon}{t} + \frac{\epsilon}{t} m(t-T) + \frac{\mathrm{E}\,R}{t}[m(t) - m(t-T)] \\
&\to \frac{\epsilon}{\mathrm{E}\,X}, \quad t \to \infty,
\end{aligned}
$$

即 $g(t)/t \to 0$, $t \to \infty$. ∎

注

- R_n 可以是在第 n 个更新区间里以任意方式给付;
- R_n 可正可负.

- 【例 3.6 (A)】 On/Off 交替更新过程

$$\frac{\text{在 } [0,t] \text{ 中系统处于 On 的时长}}{t} \longrightarrow \frac{\mathrm{E}\, T_{\mathrm{on}}}{\mathrm{E}\, T_{\mathrm{on}} + \mathrm{E}\, T_{\mathrm{off}}}, \quad t \to \infty.$$

- 【例 3.6 (B)】 更新过程

$$\frac{1}{t}\int_0^t A(s)\,\mathrm{d}s \longrightarrow \frac{\mathrm{E}\, X^2}{2\mathrm{E}\, X}, \quad t \to \infty,$$

其中 $X \sim F$, F 为更新间隔分布. 类似,

$$\frac{1}{t}\int_0^t Y(s)\,\mathrm{d}s \longrightarrow \frac{\mathrm{E}\, X^2}{2\mathrm{E}\, X}, \quad t \to \infty.$$

因此,

$$\frac{1}{t}\int_0^t X_{N(s)+1}\,\mathrm{d}s \longrightarrow \frac{\mathrm{E}\, X^2}{\mathrm{E}\, X}, \quad t \to \infty.$$

G/G/1-系统

顾客按更新过程到达，到达间隔时间 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim F$, 服务台提供的服务时间 $\{Y_n, n \geq 1\}$ iid $\sim G$, 满足

$$\mathrm{E}\, Y_i < \mathrm{E}\, X_i < \infty. \tag{$*$.13}$$

假设时间 0 第一位顾客到达，系统采用 FCFS 规则. 记

$$n(t) = \text{时刻 } t \text{ 系统里顾客人数}.$$

- 系统的运行构成一个更新过程，更新点对应一个忙期的开始，因此系统的平均队长

$$L = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t n(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\mathrm{E}\,T}\cdot \mathrm{E}\int_0^T n(s)\,\mathrm{d}s \tag{$*$.14}$$

存在且有限, 其中 T 为一个循环（相邻两个忙期之间的间隔）.

- 求 $\mathrm{E}\,T$. 设 N 为在一个循环中接受服务的顾客人数, 则

$$N = \inf\left\{n:\ \sum_{k=1}^{n}(X_k - Y_k) > 0\right\}.$$

由 (∗.13) 及命题 7.1.1 知 $\mathrm{E}\,N < \infty$. 又 N 为 $\{X_n, n \geq 1\}$ 和 $\{Y_n, n \geq 1\}$ 的停时, 所以

$$\mathrm{E}\,T = \mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{N} X_k\right] = \mathrm{E}\,N \cdot \mathrm{E}\,X. \qquad (*.15)$$

- 以 W_i 表示第 i 个顾客在系统里的停留时间 (不再独立同分布), 则顾客在系统里平均花费时间

$$W := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i = \frac{\mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{N} W_k\right]}{\mathrm{E}\,N} \qquad (*.16)$$

存在且有限. 引进离散时间更新过程, 时刻 k 对应顾客 k 到达.

- 定理 3.6.2 （Little 公式, 1961） 设 $\lambda = 1/\mathrm{E}\,X$ (顾客到达率), 则

$$\underbrace{L}_{\text{平均队长}} = \underbrace{\lambda}_{\text{到达率}} \cdot \underbrace{W}_{\text{平均花费时间}}$$

证：注意在上述的更新过程的一个循环中，

$$\int_0^T n(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{N} W_k.$$

由 $(*.14)$, $(*.15)$ 和 $(*.16)$ 得证 $L = \lambda W$. ∎

Little 公式

在现实生活中，我们已不自觉地应用了该公式.

- 【例 1】 一个步兵排平均有 30 名战士，每名战士在该排服役时间为 3 年，即
$$L = 30, \quad W = 3,$$
则
$$\lambda = L/W = 10,$$
即平均每年有 10 名战士退役，同时有 10 名新战士加入.

- 【例 2】 某图书馆有藏书 100 万册，每天借出去 5000 本，每本书的借期为 2 周（平均），问平均留在该图书馆的书有多少册？
解：因为
$$\lambda = 5000 \text{ 本}/\text{天}, \quad W = 14 \text{ 天},$$
所以
$$L = \lambda W = 70000 \text{ 本}.$$
因此，留在图书馆的书平均有 93 万册.

- **定义** $\{Z_n, n \geq 0\}$ 称为对称随机游动过程，若 $Z_0 = 0$, $Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, 其中 $\{Y_n, n \geq 1\}$ iid, 满足

$$\mathrm{P}\left(Y_n = 1\right) = \mathrm{P}\left(Y_n = -1\right) = \frac{1}{2}.$$

本节目的

- 介绍 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 的基本性质；
- 介绍 ξ 的反正弦性质，其中 ξ 的定义如下：用直线依次将 Z_k 与 Z_{k+1} 连接，

$$\frac{[0, 2n] \text{ 时间段中过程为正的时间}}{2n} \xrightarrow{d} \xi,$$

这里 ξ 是一个随机变量，而非常数.

令

$$u_n = \mathrm{P}(Z_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n},$$

可验证

$$u_n = \frac{2n-1}{2n} u_{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

再由选票问题得

$$\mathrm{P}(Z_1 \neq 0, \ldots, Z_{2n-1} \neq 0, Z_{2n} = 0) = \frac{\binom{2n}{n}(1/2)^{2n}}{2n-1} = \frac{u_n}{2n-1}. \qquad (*.17)$$

注　利用 Stirling 公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

可以验证：$u_n \sim 1/\sqrt{n\pi} \to 0,\ n \to \infty$.

▶ 引理 3.7.3 $\mathrm{P}(Z_1 \neq 0, Z_2 \neq 0, \ldots, Z_{2n} \neq 0) = u_n$.

证: 利用 (∗.17) 得

$$\mathrm{P}(Z_1 \neq 0, Z_2 \neq 0, \ldots, Z_{2n} \neq 0) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{2k-1}.$$

下归纳证明

$$u_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{2k-1}. \tag{∗.18}$$

当 $n = 1$ 时, (∗.18) √. 假设 (∗.18) 对 n 成立, 则

$$1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{u_k}{2k-1} = u_n - \frac{u_{n+1}}{2n+1} = u_{n+1}.$$

归纳证毕. ∎

- 引理 3.7.4 对 $k=0,1,\ldots,n$,

$$\mathrm{P}\left(Z_{2k}=0, Z_{2k+1}\neq 0,\ldots,Z_{2n}\neq 0\right)=u_k u_{n-k}.$$

※ 给出了游动过程在时刻 $2n$ 之前最后一次访问 0 的时间分布.

证:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(Z_{2k}=0, Z_{2k+1}\neq 0,\ldots,Z_{2n}\neq 0\right)\\
&\quad=\mathrm{P}\left(Z_{2k+1}\neq 0,\ldots,Z_{2n}\neq 0 | Z_{2k}=0\right)\cdot\mathrm{P}\left(Z_{2k}=0\right)\\
&\quad=u_{n-k}u_k,
\end{aligned}$$

其中最后等式利用引理 3.7.3. ∎

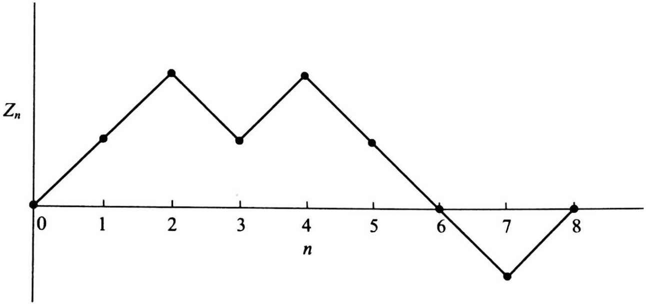


图 3.7.1　随机徘徊的一条样本路径

$E_{k,n}=\{$到时刻 $2n$ 有 $2k$ 单位时间为正，$2(n-k)$ 单位时间为负$\}$

- 定理 3.7.5　记 $b_{k,n}:=\mathrm{P}\left(E_{k,n}\right)$, 则

$$b_{k,n}=u_k u_{n-k}, \quad k=0,1,\ldots,n. \tag{*.19}$$

证：归纳法. 当 $n=1$ 时，(∗.19) $\surd$, 因 $b_{o,1}=b_{1,1}=u_1=1/2$, $u_0=1$. 假设 $b_{k,m}=u_k u_{m-k}$ 对 $m<n$ 正确. 设 T 为游动首次访问 0 时刻, 则

- $b_{n,n}=u_n$. 对 T 取条件,

$$
\begin{aligned}
b_{n,n} &= \sum_{r=1}^{n} \mathrm{P}\left(E_{n,n} | T=2r\right) \mathrm{P}\left(T=2r\right)+\mathrm{P}\left(E_{n,n} | T>2n\right) \mathrm{P}\left(T>2n\right) \\
&= \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2} b_{n-r,n-r} \mathrm{P}\left(T=2r\right)+\frac{1}{2} \mathrm{P}\left(T>2n\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \mathrm{P}\left(Z_{2(n-r)}=0\right) \cdot \mathrm{P}\left(T=2r\right)+\frac{1}{2} \mathrm{P}\left(T>2n\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \mathrm{P}\left(Z_{2n}=0 | T=2r\right) \cdot \mathrm{P}\left(T=2r\right)+\frac{1}{2} \mathrm{P}\left(T>2n\right) \\
&= \frac{1}{2} u_n+\frac{1}{2} u_n=u_n \quad (\text{引理 } 2.7.3)
\end{aligned}
$$

- $b_{0,n} = u_n$. 同上可证.
- $b_{k,n} = u_k u_{n-k}$, $1 \le k < n$. 对 T 取条件,

$$
\begin{aligned}
b_{k,n} &= \sum_{r=1}^{n} \mathrm{P}\left(E_{k,n} | T=2r\right) \mathrm{P}\left(T=2r\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} b_{k-r,n-r} \mathrm{P}\left(T=2r\right) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} b_{k,n-r} \mathrm{P}\left(T=2r\right) \\
&= \frac{1}{2} u_{n-k} \sum_{r=1}^{n} u_{k-r} \mathrm{P}\left(T=2r\right) + \frac{1}{2} u_k \sum_{r=1}^{n} u_{n-r-k} \mathrm{P}\left(T=2r\right) \\
&= \frac{1}{2} u_{n-k} u_k + \frac{1}{2} u_k u_{n-k} \\
&= u_k u_{n-k}.
\end{aligned}
$$

由归纳法证毕. ∎

反正弦律

用直线依次将 Z_k 与 Z_{k+1} 连接，定义

$$\frac{[0,2n]\text{ 时间段中过程为正的时间}}{2n} \xrightarrow{d} \xi,$$

则

$$\mathrm{P}(\xi \le x) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}, \quad x \in [0,1].$$

注　这里 ξ 是一个随机变量，而非常数. 这和前述的相邻两个更新间隔时间期望有限情形的结论不一致，因为对于对称随机游动过程，记 T 表示首次回到 0 点的时间，则

$$\mathrm{E}\,T \ge \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(T > 2n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty \quad (u_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}),$$

作业

第 3 章第一次作业

1，2，3，8，9，11，14，15，16

第 3 章第二次作业

18，20，21，24，26，28，29，32