实用随机过程

胡太忠
thu@ustc.edu.cn

安徽 合肥 中国科学技术大学

2024 年 2 月

第 2 章　　Poisson 过程

- Poisson 过程的等价定义
- Poisson 过程的性质
- 非齐次 Poisson 过程
- 复合 Poisson 过程与条件 Poisson 过程

计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为计数过程，若

- $N(t)$ 取非负整数；
- $N(s) \leq N(t)$, $\forall s < t$;
- 对于任意 $s < t$, $N(t) - N(s)$ 表示在时间段 $(s, t]$ 内发生的事件数.

▶ 定义 2.1.1 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为强度 λ 的 Poisson 过程, 若

- $N(0) = 0$;
- 过程具有独立增量；
- $N(t+s) - N(s) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$, $\forall\, s, t \geq 0$.

- 定义 2.1.2 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为强度 λ 的 Poisson 过程, 若
  - $N(0) = 0$;
  - 过程具有平稳增量和独立增量性质;
  - $\mathrm{P}\left(N(h) = 1\right) = \lambda h + \circ(h)$;
  - $\mathrm{P}\left(N(h) \geq 2\right) = \circ(h)$.

$\{N(t), t \geq 0\}$ 称为强度 λ 的 齐次Poisson 过程，记为 HPP(λ)

§2.1 Poisson 过程

- **定理 2.1.1** 定义 2.1.1 $\Longleftrightarrow$ 定义 2.1.2

分析：($\Longleftarrow$) 仅证明 $N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$. 为此，将 $[0,t]$ 区间 k 等分：$I_{kj}, j=1,\ldots,k$. 记 N_K^* 为发生事件的区间数.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(\text{在某个区间发生事件数} \geq 2\right) \\
&\quad \leq \sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}\left(\text{在区间 } I_{kj} \text{ 发生事件数} \geq 2\right) = k \circ \left(\frac{t}{k}\right) = \circ(1).
\end{aligned}
$$

于是，$N_k^* \sim B(k, \lambda t/k + \circ(1/k))$, 且 $N_k^* \to N(t)$, $k \to \infty$. 故

$$N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t).$$

证明：($\Longleftarrow$) 仅证 $N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$. 记 $p_n(t) = \mathrm{P}(N(t) = n)$. 由

$$p_0(t+h) = \mathrm{P}(N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0) = p_0(t)[1 - \lambda h + \circ(h)]$$

得

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t), \quad t > 0. \tag{$*$.1}$$

同样，对任意 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} p_n(t+h) &= \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(N(t) = n - j, N(t+h) - N(t) = j) \\ &= p_n(t)[1 - \lambda h] + p_{n-1}(t) \cdot \lambda h + \circ(h), \end{aligned}$$

化简得

$$p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \quad t > 0. \tag{$*$.2}$$

记 $N(t)$ 的概率母函数为 $\mathbb{P}(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(t)z^n$, 则

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{P}(z,t)=\cdots=-\lambda\mathbb{P}(z,t)+\lambda z\mathbb{P}(z,t)=\lambda(z-1)\mathbb{P}(z,t).$$

求解得

$$\log\mathbb{P}(z,t)=\lambda t(z-1)+c(z), \tag{$*$.3}$$

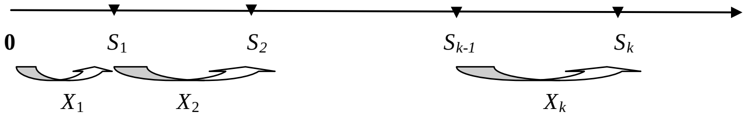
其中 $c(z)$ 待定. 由 $p_0(0)=1$, $p_k(0)=0$, $\forall\,k>0$, 得

$$\mathbb{P}(z,0)\equiv 1.$$

代入 ($*$.3) 得 $c(z)\equiv 0$, 于是

$$\mathbb{P}(z,t)=\exp\left\{\lambda t(z-1)\right\},$$

即 $N(t)\sim\mathrm{Poisson}(\lambda t)$. ∎



事件发生时刻： $S_0 = 0 < S_1 < S_2 < \cdots < S_k < \cdots$
事件发生间隔： $X_k = S_k - S_{k-1}$, $k \geq 1$

- **定理 2.2.1** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 HPP(λ)，则 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

证明：$X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ $\surd$. 对任意 $s, t > 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X_2 > t | X_1 = s\right) &= \mathrm{P}\left(N(t+s) = 1 | N(s) = 1, N(s-) = 0\right) \\ &= \mathrm{P}\left(N(t+s) - N(s) = 0 | N(s) = 1, N(s-) = 0\right) \\ &= \mathrm{P}\left(N(t+s) - N(s) = 0\right) = e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

即 X_1, X_2 iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. 余类似. ∎

- 定义 2.2.1 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为强度 λ 的 Poisson 过程, 若事件发生间隔序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.
- 定理 2.2.2 定义 2.1.1 $\Longleftrightarrow$ 定义 2.2.1

证明: $\Longrightarrow \surd$.
$(\Longleftarrow)$ 由指数分布无记忆性知, $\{N(t), t \geq 0\}$ 具有平稳独立增量性. 下仅证 $N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$. 注意到 $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ 及

$$S_n \leq t \Longleftrightarrow N(t) \geq n,$$

得

$$\mathrm{P}\left(N(t) \geq n\right) = \mathrm{P}\left(S_n \leq t\right) = \cdots = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad n \geq 0.$$

于是, $\mathrm{P}\left(N(t) = n\right) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^n / n!$, $n \geq 0$. ∎

定义 2.2.1 的应用:

- 利用 $S_n \le t \iff N(t) \ge n$, 可以求出 $\Gamma(n,\lambda)$ 的 cdf 和 pdf.
- 局部几何方法:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\,(t < S_n < t+h) &= \mathrm{P}\,(N(t+h) - N(t) = 1, N(t) = n-1) + \circ(h) \\ &= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot \lambda h + \circ(h), \end{aligned}$$

于是 $\Gamma(n,\lambda)$ 的 pdf 为

$$f_{S_n}(t) = e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t > 0.$$

- 有利于将 Poisson 过程推广到更新过程.
- 有利于做 Poisson 过程的计算机模拟仿真.

- 定理 2.3.1 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 HPP(λ)，则

$$\Big[(S_1, S_2, \ldots, S_n) \Big| N(t) = n\Big] \stackrel{\mathrm{d}}{=} \Big(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}\Big),$$

其中 $U_1, U_2, \ldots, U_n$ iid $\sim U(0, t)$，$U_{1:n} < U_{2:n} < \cdots < U_{n:n}$ 为 $U_1, \ldots, U_n$ 的次序统计量.

※ $\Big(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}\Big)$ 的联合 pdf 为

$$g(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad \forall\, 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t.$$

- 定理 2.3.1* 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 HPP(λ)，则

$$\left[(S_1, S_2, \ldots, S_n) \middle| S_{n+1} = t\right] \overset{\mathrm{d}}{=} \left(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}\right),$$

其中 $U_1, U_2, \ldots, U_n$ iid $\sim U(0, t)$，$U_{1:n} < U_{2:n} < \cdots < U_{n:n}$ 为 $U_1, \ldots, U_n$ 的次序统计量.

证法一：直接利用 $(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}) \longleftrightarrow (S_1, S_2, \ldots, S_{n+1})$ 初等变换.

证法二：利用

$$\begin{aligned}
&[(S_1, S_2, \ldots, S_n)|S_{n+1} = t] \\
&= \quad [(S_1, S_2, \ldots, S_n)|N(t-) = n, N(t) - N(t-) = 1] \\
&\overset{\mathrm{d}}{=} \quad [(S_1, S_2, \ldots, S_n)|N(t-) = n] \\
&\overset{\mathrm{d}}{=} \quad [(S_1, S_2, \ldots, S_n)|N(t) = n]. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

- 【例 2.3(A)】 假设乘客按 HPP(λ) 过程到达火车站，火车于时刻 t 开出. 求 $(0, t]$ 时段到达乘客的等待时间总和的期望, 即

$$\mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)\right].$$

应用定理 2.3.1:

$$\mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)\right]=\mathrm{E}\left\{\mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)\middle| N(t)\right]\right\}=\mathrm{E}\left[\frac{t}{2}N(t)\right]=\frac{\lambda t^2}{2}.$$

▶ 【例 2.3(C)】 一元件易收到冲击，冲击按 HPP(λ) 过程到达，第 i 个冲击带来的损伤为 D_i. 假设 $\{D_i, i \geq 1\}$ iid, 且独立于 HPP 过程，损伤随时间按负指数衰减，且可以叠加. 于是 t 时刻元件的总损伤为

$$D(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-S_k)}, \quad \alpha > 0,$$

求 $\mathrm{E}\, D(t)$.

应用定理 2.3.1:

$$\mathrm{E}\,[D(t)|N(t)=n] = \mathrm{E}\, D \cdot e^{-\alpha t} \mathrm{E} \sum_{k=1}^{n} e^{\alpha U_k} = n \cdot \mathrm{E}\, D \cdot \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha t}.$$

定理 2.3.1 的应用：Poisson 过程事件分类

设时刻 s 发生的事件以概率 $p(s)$ 划入 I 型，以概率 $1-p(s)$ 划入 II 型.
$N_i(t) = (0, t]$ 时段发生的 i 型事件个数，$i = 1, 2$.

- 命题 2.3.2 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 HPP(λ)，则 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 独立，且

$$N_1(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda p t), \qquad N_2(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda(1-p)t),$$

其中

$$p = \frac{1}{t}\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s, \quad t > 0.$$

※ 命题 2.3.2 可以推广到分成有限或可列类事件情形

证明：对任意 $m, n \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{P}\left(N_1(t)=m, N_2(t)=n\right) \\
= \ & \underbrace{\mathrm{P}\left(N_1(t)=m, N_2(t)=n \mid N(t)=m+n\right)}_{\Delta_{m,n}} \cdot \mathrm{P}\left(N(t)=m+n\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_{m,n} &= \mathrm{P}\left(\begin{array}{l} \text{于 } S_1, S_2, \ldots, S_{m+n} \text{ 时刻发生事件} \\ \text{划入 I, II 型分别为 } m,\ n \text{ 个} \end{array} \middle| N(t)=m+n\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\begin{array}{l} \text{于 } U_{1:(m+n)}, U_{2:(m+n)}, \ldots, U_{(m+n):(m+n)} \text{ 时刻} \\ \text{发生事件划入 I, II 型分别为 } m,\ n \text{ 个} \end{array}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\begin{array}{l} \text{于 } U_1, U_2, \ldots, U_{m+n} \text{ 时刻发生} \\ \text{事件划入 I, II 型分别为 } m,\ n \text{ 个} \end{array}\right) \\
&= \binom{m+n}{m} p^m (1-p)^n,
\end{aligned}
$$

其中

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{P}\,(\text{于 } U \text{ 发生事件划入 I 型}) \\ &= \mathrm{E}\,[\mathrm{P}\,(\text{于 } U \text{ 发生事件划入 I 型}|U)] = \mathrm{E}\,p(U) \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\,(N_1(t) = m, N_2(t) = n) \\ &\quad = e^{-\lambda p t}\frac{(\lambda p t)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda(1-p)t}\frac{(\lambda(1-p)t)^n}{n!}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

※ 在命题 2.3.2 中，若 $p(s) \equiv p$, 则 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{HPP}(\lambda p)$, $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{HPP}(\lambda(1-p))$, 且相互独立.

▶ 定理 2.3.2 设 $\{N_i(t), t \geq 0\}$ 为 HPP(λ_i)， $i = 1, 2$, 且两个过程相互独立, 记

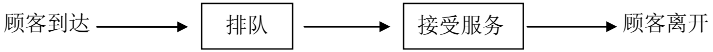
$$N(t) = N_1(t) + N_2(t),$$

则

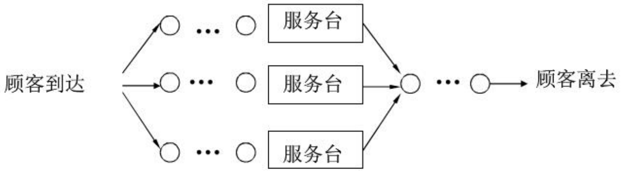
$$\{N(t), t \geq 0\} \text{ 为 HPP } (\lambda_1 + \lambda_2).$$

※ 利用指数分布的无记忆性说明 $\{N(t), t \geq 0\}$ 具有平稳独立增量性

随机服务系统



如： （1） 多服务台并联



（2） 多服务台串联

随机服务系统分类： D.G. Kendall 于 1953 年提出的分类方法，基于顾客到达间隔时间、服务时间分布和服务台个数三个特征. 记号：

$$X/Y/Z,$$

- X 处填写表示顾客相继到达时间间隔分布的代码，
- Y 处填写表示服务时间分布的代码，
- Z 处填写系统服务台的个数.

X 可取“M”、“GI”、“D”等，Y 可取“M”、“G”、“D”等，其中

- M —— 指数分布（其无记忆性决定过程的 Markov 性）
- GI —— 一般相互独立的时间间隔分布
- D —— 确定的时长，退化分布
- G —— 服务时间的一般分布

随机服务系统分类： Kendall 扩充记号

$$X/Y/Z/A/B/C \quad \text{或} \quad [X/Y/Z]:[A/B/C],$$

其中前三项意义同前不变，

- A 处填写系统容量限制数 N，
- B 处填写顾客源数目 m，
- C 处填写系统服务规则，常见的有如下四种：

  (1) 先到先服务 (FCFS, First Come First Serve)

  (2) 后到先服务 (LCFS, Last Come First Serve)

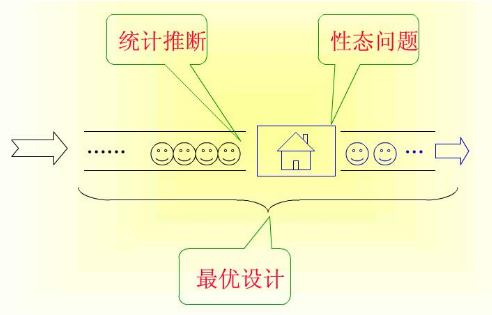
  (3) 有优先权的服务 (PR, Priority)

  (4) 随机服务 (SIRO, Service in Random Order)

随机服务系统举例:

- $M/G/k$ 系统：顾客到达时间间隔服从指数分布（到达过程为 Poisson 过程），服务台提供的服务时间具有一般的分布，系统有 k 个服务台.
- $\mathrm{GI}/D/\infty$ 系统：顾客到达时间间隔独立且具有一般分布（到达过程为更新过程），服务台提供的服务时间是固定常数，系统有无穷多个服务台.
- $M/G/1/N/\infty/\mathrm{FCFS}$ 系统

随机服务系统研究：



系统指标：平均队长、平均服务时间、平均等待时间、流失顾客比例、期望休闲期长度、期望忙期长度，等

- 【例 2.3(B)】 $M/G/\infty$ 系统：顾客到达过程服从 HPP(λ) 过程，顾客服务时间独立，且共同 cdf 为 G. 定义

$$\begin{aligned} N_1(t) &= \text{时刻 } t \text{ 服务完毕的顾客数}, \\ N_2(t) &= \text{时刻 } t \text{ 正在接受服务的顾客数} \end{aligned}$$

则 $N_1(t) \perp N_2(t)$, 且

$$N_1(t) \sim \mathrm{Poisson}(\eta_1(t)), \quad N_2(t) \sim \mathrm{Poisson}(\eta_2(t)),$$

其中

$$\eta_1(t) = \lambda \int_0^t G(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \eta_2(t) = \lambda \int_0^t \overline{G}(x)\,\mathrm{d}x.$$

※ 应用命题 2.3.2：时刻 s 发生的事件划入 I 型概率为

$$p(s) = G(t-s), \quad s \le t \text{ (可定义对 } \forall s)$$

- 【例】 设 $N \sim \mathrm{Poisson}(10)$, $\{X_n, n \geq 1\}$ 为 iid 序列，满足

$$\mathrm{P}(X_1 = 0) = \mathrm{P}(X_1 = 2) = \frac{2}{5}, \quad \mathrm{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{5},$$

且 N 独立于 $\{X_n, n \geq 1\}$. 记 $S = \sum_{j=1}^{N} X_j$, 求 $\mathrm{P}(S = 5)$.

※ 引入 Poisson 过程，再应用命题 2.3.2

▶【例】 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$, 证明 $nX_{1:n}$, $(n-1)(X_{2:n}-X_{1:n})$, …, $(n-k+1)(X_{k:n}-X_{(k-1):n}), \ldots, X_{n:n}-X_{(n-1):n}$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

※ 引入 Poisson 过程，再应用定理 2.3.2 和指数分布的无记忆性

模型:

- 设 n 个元件寿命分别为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$, 元件一旦失效立即用同一型号元件替换，每个元件是独立工作. 记 $N(t)$ 为 $(0, t]$ 时间段失效的元件个数, 则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 HHP$(n\lambda)$, 其首个事件（失效）发生时刻为 $X_{1:n} \sim \mathrm{Exp}(n\lambda)$.
- 当第一个失效发生时，扔掉该元件，把该时刻点记为时间起点（0 点），考虑余下的正在工作的 $(n-1)$ 个元件，一旦失效立即给与替换，则 $X_{2:n}-X_{1:n} \sim \mathrm{Exp}((n-1)\lambda)$, 且独立于 $X_{1:n}$.
- 余下略.

▶ 定义 2.4.1 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为强度函数 $\lambda(t)$ 的非齐次 Poisson 过程，若

- $N(0) = 0$;
- 过程具有独立增量性质；
- $\mathrm{P}\left(N(t+h) - N(t) = 1\right) = \lambda(t)h + o(h)$;
- $\mathrm{P}\left(N(t+h) - N(t) \geq 2\right) = o(h)$.

※

(1) 非齐次 Poisson 过程，记为 NHPP（Non-homogeneous Poisson Process）

(2) 在上述定义中，要求 $\lambda(t)$ 具有连续性

- **定理 2.4.1** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为强度函数 $\lambda(t)$ 的 NHPP, 则

$$N(t+s) - N(t) \sim \mathrm{Poi}\left(m(t+s) - m(t)\right), \quad t \geq 0, s > 0,$$

其中 $m(t)$ 为均值函数

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s.$$

※ NHPP 的等价定义

- **定义 2.4.2** 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为强度函数 $\lambda(t)$ 的 NHPP, 若
  - $N(0) = 0$;
  - 过程具有独立增量性质;
  - $N(t+s) - N(s) \sim \mathrm{Poi}\left(m(t+s) - m(s)\right), \forall\, s \geq 0, t > 0.$

- **定理 2.4.1** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为强度函数 $\lambda(t)$ 的 NHPP, 则

$$N(t+s) - N(t) \sim \mathrm{Poi}\,(m(t+s) - m(t)), \quad t \geq 0, s > 0,$$

其中 $m(t)$ 为均值函数

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s.$$

※ NHPP 的等价定义

- **定义 2.4.2** 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为强度函数 $\lambda(t)$ 的 NHPP, 若
  - $N(0) = 0$;
  - 过程具有独立增量性质;
  - $N(t+s) - N(s) \sim \mathrm{Poi}\,(m(t+s) - m(s)), \forall\, s \geq 0, t > 0.$

定理 2.4.1 证明： 固定 t, 记 $p_n(s) = \mathrm{P}(N(t+s) - N(t) = n)$. 由

$$\begin{aligned} p_0(s+h) &= \mathrm{P}(N(t+s) - N(t) = 0, N(t+s+h) - N(t+s) = 0) \\ &= p_0(s)[1 - \lambda(t+s)h + \circ(h)] \end{aligned}$$

得

$$p_0'(s) = -\lambda(t+s)p_0(t+s), \quad t > 0. \tag{*.4}$$

同样，对任意 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} p_n(s+h) &= \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(N(t+s) - N(t) = n-j, N(t+s+h) - N(t+s) = j) \\ &= p_n(s)[1 - \lambda(t+s)h] + p_{n-1}(s) \cdot \lambda(t+s)h + \circ(h), \end{aligned}$$

化简得

$$p_n'(s) = -\lambda(t+s)p_n(s) + \lambda(t+s)p_{n-1}(s), \quad s > 0. \tag{*.5}$$

记 $N(t+s)-N(t)$ 的概率母函数为 $\mathbb{P}(z,s)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(s)z^n$，则

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathbb{P}(z,s)=\lambda(t+s)(z-1)\mathbb{P}(z,s).$$

求解得

$$\log \mathbb{P}(z,s)=(z-1)[m(t+s)-m(t)]+c(z), \tag{$*$.6}$$

其中 $c(z)$ 待定. 由 $p_0(0)=1$, $p_k(0)=0$, $\forall\, k>0$, 得

$$\mathbb{P}(z,0)\equiv 1.$$

代入 $(*.3)$ 得 $c(z)\equiv 0$，于是

$$\mathbb{P}(z,s)=\exp\left\{[m(t+s)-m(t)](z-1)\right\},$$

即 $N(t+s)-N(t)\sim \mathrm{Poi}\,(m(t+s)-m(t))$. ∎

HPP 与 NHPP 关系：

- NHPP 可视为 HPP 随机抽样

  设 $\lambda(t)$ 连续，满足

$$\lambda(t) \leq \lambda_0 < \infty, \quad \forall\, t \geq 0.$$

设 $\{N^*(t), t \geq 0\}$ 是 HPP(λ_0)，且于时刻 s 发生的事件以概率

$$p(s) = \frac{\lambda(s)}{\lambda_0}$$

划入 I 型，以 $N(t)$ 为 $(0, t]$ 时间段划入 I 型事件数，则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的 NHPP.

HPP 与 NHPP 关系：

- NHPP 可视为 HPP 对时间作变换产生的新过程

  设 $\lambda(t) > 0$ 连续，定义

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s, \quad t > 0.$$

  设 $\{N^*(t), t \geq 0\}$ 是 HPP(1)，定义

$$N(t) = N^*(m(t)),$$

  则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的 NHPP.

HPP 与 NHPP 关系:

- HPP 可视为 NHPP 对时间作变换产生的新过程

  设 $\lambda(t) > 0$ 连续, 定义

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s, \quad t > 0.$$

  设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的 NHPP, 定义

$$N^*(t) = N(m^{-1}(t)),$$

  则 $\{N^*(t), t \geq 0\}$ 是 HPP(1).

HPP 与 NHPP 关系的应用:

- 定理 2.4.1 设计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的事件发生时刻为

$$0 < S_1 < S_2 < \cdots < S_n < \cdots,$$

且 $m(0) = 0$, $m'(t) = \lambda(t) > 0$. 若

$$m(S_1),\ m(S_2) - m(S_1), \ldots, m(S_n) - m(S_{n-1}), \ldots \quad \text{iid} \sim \text{Exp}(1),$$

则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的 NHPP.

证明: 定义 $N^*(t) = N(m^{-1}(t))$, 则 $\{N^*(t), t \geq 0\}$ 事件发生时刻为

$$0 < m(S_1) < m(S_2) < \cdots < m(S_n) < \cdots,$$

则 $\{N^*(t), t \geq 0\}$ 是 HPP(1), 于是 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的 NHPP. ∎

NHPP 的等价定义

- 定义 2.4.3 设计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的事件发生时刻为

$$0 < S_1 < S_2 < \cdots < S_n < \cdots,$$

且 $m(0) = 0$, $m'(t) = \lambda(t) > 0$. 若

$$m(S_1),\ m(S_2) - m(S_1), \ldots, m(S_n) - m(S_{n-1}), \ldots \quad \text{iid} \sim \text{Exp}(1),$$

则称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的 NHPP.

记录值过程

- 【例 2.4 (A)】 考虑非负序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim F$, F 的 pdf 满足 $f(x) > 0$, $x > 0$, 该序列对应的记录值序列为

$$0 < R_1 < R_2 < \cdots < R_n < \cdots .$$

定义一个计数过程

$$N(t) = \#\{n : \ R_n \leq t, n \geq 1\}, \quad t \geq 0\},$$

则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的 NHPP, 其中

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)}, \quad t > 0.$$

记录值过程

证法一： 只验证定义 2.4.1 中（3）和（4）两条. 先约定 $X_0 = 0$, 则

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{P}\left(N(t+h) - N(t) \geq 1\right) \\
= & \ \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n \in (t, t+h),\ X_n > \max\{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\}\right) \\
= & \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_n \in (t, t+h),\ X_n > \max\{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\}\right) \\
= & \ \int_t^{t+h} \sum_{n=1}^{\infty} F^{n-1}(s)\,\mathrm{d}F(s) = \lambda(t)h + \circ(h).
\end{aligned}
$$

类似，

$$
\mathrm{P}\left(N(t+h) - N(t) \geq 2\right) = \circ(h).
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(N(t+h)-N(t)\geq 2\right)\\
=&\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=0}^{\infty}\left\{(t,t+h)\text{ 中前两个记录值发生时刻为 } n \text{ 和 } n+m+1\right\}\right)\\
=&\circ(h)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\mathrm{P}\left(\left\{(t,t+h)\text{ 中前两个记录值发生时刻为 } n \text{ 和 } n+m+1\right\}\right)\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}F^{n-1}(t)\int_t^{t+h}F^m(s)[F(t+h)-F(s)]\,\mathrm{d}F(s)+\circ(h)\\
=&\frac{1}{\overline{F}(t)}\cdot\int_t^{t+h}\frac{1}{\overline{F}(s)}[F(t+h)-F(s)]\,\mathrm{d}F(s)+\circ(h)\\
=&\frac{1}{\overline{F}(t)}\cdot\int_t^{t+h}\frac{1}{\overline{F}(s)}[f(s)h+\circ(h)]\,\mathrm{d}F(s)+\circ(h)\\
=&\circ(h).
\end{aligned}
$$

记录值过程

证法二： 首先，

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s = -\log \overline{F}(t), \quad t \geq 0.$$

由定义 2.4.3, 仅证明

$$\{m(R_n) - m(R_{n-1}), n \geq 1\} \text{ iid} \sim \mathrm{Exp}(1), \tag{$*$.7}$$

其中约定 $R_0 = 0$. 注意到

- $\{m(R_n), n \geq 1\}$ 为序列 $\{-\log \overline{F}(X_k), k \geq 1\}$ 的记录值序列；
- $\{-\log \overline{F}(X_k), k \geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Exp}(1)$,

$\Longrightarrow$ $(*.7)$ $\surd$ (利用例 1.6(B)). ∎

最小修理过程

▶【例 2.4 (C)】 一个元件于时刻 0 投入使用，元件寿命为 $X \sim F$, F 的 pdf 满足 $f(x) > 0$, $x > 0$. 元件一旦失效立即对元件进行最小修理（即恢复到元件失效前的状态），修理时间不计. 记 $N(t)$ 为该元件于 $(0, t]$ 时间段进行最小修理的次数, 则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的 NHPP, 其中

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)}, \quad t > 0.$$

※ 最小修理

元件于时刻 t 进行最小修理是指修好后的元件剩余寿命 X_t 满足：

$$\mathrm{P}\left(X_t > s\right) = \frac{\overline{F}(t+s)}{\overline{F}(t)}, \quad s > 0,$$

即
$$X_t \stackrel{\mathrm{d}}{=} [X - t | X > t].$$

最小修理过程

证明： 首先，$m(t)=\int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s=-\log\overline{F}(t)$，设最小修理时刻序列为 $\{S_n, n\geq 1\}$. 由定义 2.4.3，仅证明

$$\{m(S_n)-m(S_{n-1}), n\geq 1\} \text{ iid} \sim \mathrm{Exp}(1), \tag{$*$.8}$$

其中约定 $S_0=0$. 注意到

- $m(S_1)=-\log\overline{F}(X)\sim \mathrm{Exp}(1)$;
- 对 $\forall\, s>0, t>0$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(m(S_2)-m(S_1)>t \middle| m(S_1)=s\right)\\
=\;& \mathrm{P}\left(S_2>F^{-1}(1-e^{-s-t}) \middle| S_1=F^{-1}(1-e^{-s})\right)\\
=\;& \mathrm{P}\left(X>F^{-1}(1-e^{-s-t}) \middle| X>F^{-1}(1-e^{-s})\right)=e^{-t},
\end{aligned}$$

即 $m(S_2)-m(S_1), m(S_1)$ iid $\sim \mathrm{Exp}(1)$.

余下类似可证. ∎

※ 对比

记录值过程		最小修理过程
例 2.4 (A)		例 2.4 (C)
事件：创纪录		事件：进行最小修理
记录值 $R_n,\ n \geq 1$	$\longleftrightarrow$	最小修理时刻 $S_n,\ n \geq 1$
$\mathrm{P}\left(R_n - R_{n-1} > t \middle| R_{n-1} = s\right)$ $= \frac{\overline{F}(t+s)}{\overline{F}(s)}$		$\mathrm{P}\left(S_n - S_{n-1} > t \middle| S_{n-1} = s\right)$ $= \frac{\overline{F}(t+s)}{\overline{F}(s)}$

$M/G/\infty$-系统输出过程

▶ 【例 2.4 (B)】 考虑一个 $M/G/\infty$-系统, 顾客到达过程为 HPP(λ), 服务台提供的服务时间 $\sim G$, 记 $N_{\text{out}}(t)$ 为 $(0, t]$ 时间段服务完毕的顾客人数, 则 $\{N_{\text{out}}(t), t \geq 0\}$ 是强度函数为 $\lambda G(t)$ 的 NHPP.

分析: 定义

$$m(t) = \lambda \int_0^t G(s)\,\mathrm{d}s,$$

仅需注明

- $N_{\text{out}}(t+s) - N_{\text{out}}(s) \sim \mathrm{Poi}\left(m(t+s) - m(s)\right), \forall\, s, t > 0$;
- 对互不相交区间 A 和 B,

$$N_{\text{out}}(A) \text{ 和 } N_{\text{out}}(B) \text{ 相独立}.$$

$M/G/\infty$-系统输出过程

为此，视于 $(s, s+t]$ 被服务完毕离开系统的那个顾客到达为 I-型事件，于时刻 y 的到达划入 I-型的概率为

$$p(y) = \begin{cases} G(s+t-y) - G(s-y), & y \le s, \\ G(t+s-y), & s < y \le s+t, \\ 0, & y > s+t, \end{cases}$$

记 $N_1(u)$ 为 $(0, u]$ 时间段 I-型事件数，则

$$N_{\text{out}}(t+s) - N_{\text{out}}(s) = N_1(s+t) \sim \text{Poi}\,(\eta),$$

其中

$$\eta = \lambda \int_0^{s+t} p(y)\,\mathrm{d}y = m(t+s) - m(s).$$

类似可证 $N_{\text{out}}(A) \perp N_{\text{out}}(B)$. ∎

▶ 定义 2.5.1 $\{S(t), t \geq 0\}$ 称为复合 Poisson 过程，若 $S(t)$ 可表示为

$$S(t) = \sum_{n=0}^{N(t)} X_n,$$

其中,

(1) $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 HPP(λ);

(2) $\{X, X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim F$;

(3) $\{X_n, n \geq 1\}$ 独立于 $\{N(t), t \geq 0\}$.

※ 复合 Poisson 随机变量，复合 Poisson 过程, 应用

复合 Poisson 过程 $\{S(t), t \geq 0\}$ 性质

(1) 具有平稳和独立增量性质;

(2) 求均值、方差（设 $\mathrm{E}\, X_1^2 < \infty$）

- 矩母函数（mgf）法：设 X 的 mgf 为 $M_X(z)$, 则 $S(t)$ 的 mgf 为

$$M_{S(t)}(z) = \exp\left\{\lambda t(M_X(z) - 1)\right\}.$$

于是，$\mathrm{E}\,[S(t)] = \lambda t \cdot \mathrm{E}\, X$, $\mathrm{Var}\,(S(t)) = \lambda t \cdot \mathrm{E}\, X^2$.

- 两步走方法：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,[S(t)] &= \mathrm{E}\left\{\mathrm{E}\,[S(t)|N(t)]\right\} = \mathrm{E}\left[N(t)\cdot \mathrm{E}\, X\right] = \lambda t \cdot \mathrm{E}\, X, \\
\mathrm{Var}\,(S(t)) &= \mathrm{E}\left[\mathrm{Var}\,(S(t)|N(t))\right] + \mathrm{Var}\left(\mathrm{E}\,[S(t)|N(t)]\right) \\
&= \mathrm{E}\,[N(t)\cdot \mathrm{Var}\,(X)] + \mathrm{Var}\,(N(t)\cdot \mathrm{E}\, X) \\
&= \lambda t \cdot \mathrm{E}\, X^2.
\end{aligned}$$

(2) 求均值、方差（设 $\mathrm{E}\, X_1^2 < \infty$）

- Poisson 过程事件分类方法 (仅适用于 X 离散取值情形)：设 X 取值于 $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ 且 $p_j = \mathrm{P}\,(X = x_j)$, $j = 1, \ldots, m$. 记

$$N_j(t) = \#\{k:\ X_k = x_j, 1 \le k \le N(t)\},$$

则 $N_1(t), \ldots, N_m(t)$ 相互独立，$N_j(t) \sim \mathrm{Poi}(\lambda t p_j)$, $\forall j$, 且

$$S(t) = \sum_{j=1}^{m} x_j N_j(t).$$

于是

$$\mathrm{E}\,[S(t)] = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot \lambda t p_j = \lambda t \cdot \mathrm{E}\, X,$$

$$\mathrm{Var}\,(S(t)) = \sum_{j=1}^{m} x_j^2 \cdot \lambda t p_j = \lambda t \cdot \mathrm{E}\, X^2.$$

复合 Poisson 过程 $\{S(t), t \geq 0\}$ 性质

(3) 高阶中心矩

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,[S(t)] &= \lambda t \cdot \mathrm{E}\,X, \\
\mathrm{Var}\,(S(t)) &= \lambda t \cdot \mathrm{E}\,X^2, \\
\mathrm{E}\,[S(t) - \mathrm{E}\,S(t)]^3 &= \lambda t \cdot \mathrm{E}\,X^3, \\
\mathrm{E}\,[S(t) - \mathrm{E}\,S(t)]^4 &\neq \lambda t \cdot \mathrm{E}\,X^4.
\end{aligned}
$$

▶ 【例 2.5 (A)】 （冲击模型） 一个元件易于收到外界的冲击，冲击发生可以用 HHP(α) 描述，于时刻 s 发生的冲击造成的损失其分布为 F_s, 依赖于 s. 于是，$(0,t]$ 时间段冲击造成的损失累计为

$$W(t)=\sum_{j=1}^{N(t)} Z_j,$$

此处 Z_j 之间既不独立，也不同分布.

※ $W(t)$ 的随机表示： 设 $Y(s)$ 表示于时刻 s 发生的冲击所造成的损失，独立于 $\{S_n, n\geq 1\}$, 则

$$W(t)=\sum_{j=1}^{N(t)} Y(S_j),$$

设 $\{U_k, k \geq 1\}$ iid $\sim U(0,t)$. 应用定理 2.3.1, 得

$$\begin{aligned}[W(t)|N(t)=n] &= \left[\sum_{j=1}^{n} Y(S_j)|N(t)=n\right] \\ &\stackrel{\mathrm{d}}{=} \left[\sum_{j=1}^{n} Y(U_{j:n})\right] = \left[\sum_{j=1}^{n} Y(U_j)\right]\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$W(t) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sum_{j=1}^{N(t)} Y(U_j) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j,$$

其中 $X_j = Y(U_j)$, $j \geq 1$, iid $\sim F$, $\{X_k, k \geq 1\}$ 独立于 $\{N(t), t \geq 0\}$, 且

$$F(x) = \frac{1}{t}\int_0^t F_s(x)\,\mathrm{d}s.$$

一个复合 Poisson 恒等式

复合 Poisson 随机变量： $W=\sum_{j=1}^{N} X_j$, $N\sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, $X_1\sim F$

- **命题 2.5.1** 设 $X\sim F$, $X\perp W$, 则

$$\mathrm{E}\left[W\,h(W)\right]=\lambda\cdot\mathrm{E}\left[X\,h(W+X)\right],\quad \forall\, h(t).$$

证明: 设 X 独立于所有的随机变量. 对任意 $n\geq 0$,

$$\mathrm{E}\left[W\,h(W)|N=n\right] = n\cdot\mathrm{E}\left[X\,h\left(X+\sum_{i=1}^{n-1}X_i\right)\right],$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[W\,h(W)\right] &= \lambda\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\mathrm{E}\left[X\,h\left(X+\sum_{i=1}^{n-1}X_i\right)\right] \\ &= \lambda\cdot\mathrm{E}\left[X\,h(W+X)\right]. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

命题 2.5.1 的应用

复合 Poisson 随机变量： $W=\sum_{j=1}^{N} X_j$， $N\sim \mathrm{Poi}(\lambda)$， $X_1\sim F$

- 推论 2.5.2 设 $X\sim F$, 则对任意正整数 n,

$$\mathrm{E}\left[W^n\right]=\lambda\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\mathrm{E}\left[W^j\right]\cdot\mathrm{E}\left[X^{n-j}\right].$$

证明: 在命题 2.5.1 中取 $h(x)=x^{n-1}$, 则

$$\mathrm{E}\left[W^n\right]=\mathrm{E}\left[W\cdot W^{n-1}\right]=\lambda\cdot\mathrm{E}\left[X\left(W+X\right)^{n-1}\right].$$

求 pmf 的递推公式

复合 Poisson 随机变量： $W=\sum_{j=1}^{N} X_j$, $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, $X_1 \sim F$, X_1 为正整值随机变量. 定义

$$\alpha_i = \mathrm{P}\left(X_1 = i\right), \quad P_j = \mathrm{P}\left(W = j\right), \quad i \geq 1,\ j \geq 0.$$

- 推论 2.5.3

$$P_0 = e^{-\lambda}, \quad P_n = \frac{\lambda}{n} \sum_{j=1}^{n} j \alpha_j P_{n-j}, \quad n \geq 1.$$

证明: 设 $n \geq 1$, 在命题 2.5.1 中取 $h(x) = \frac{1}{n} \cdot 1_{\{n\}}(x)$, 则

$$\begin{aligned} P_n &= \lambda \mathrm{E}\left[X\, h(W+X)\right] = \lambda \mathrm{E}\left\{\mathrm{E}\left[X\, h(W+X)|X\right]\right\} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \lambda \alpha_j \mathrm{E}\left[j \cdot h(W+j)\right] = \mathrm{RHS}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

▶ 定义 2.6.1 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为条件 Poisson 过程，若存在一个非负随机变量 $\Lambda \sim G$，使得

$$[\{N(t), t \geq 0\} | \Lambda = \lambda] \text{ 为 } \mathrm{HPP}(\lambda).$$

※

- 不是 Poisson 过程；
- 具有平稳增量，但不具有独立增量；
- 求 $\mathrm{P}\left(N(t+s) - N(t) = n\right)$；
- 求 $\mathrm{P}\left(\Lambda \leq x | N(t) = n\right]$.
- 【例 2.6(A)】

▶ 定理 2.6.1 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为条件 Poisson 过程，则

$$\Big[(S_1, S_2, \ldots, S_n) \Big| N(t) = n\Big] \stackrel{\mathrm{d}}{=} \Big(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}\Big),$$

其中 $U_1, U_2, \ldots, U_n$ iid $\sim U(0, t)$，$U_{1:n} < U_{2:n} < \cdots < U_{n:n}$ 为 $U_1, \ldots, U_n$ 的次序统计量.

※ $\Big(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}\Big)$ 的联合 pdf 为

$$g(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad \forall\, 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t.$$

- 定理 2.6.1* 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为条件 Poisson 过程，则

$$\left[(S_1, S_2, \ldots, S_n) \middle| S_{n+1} = t\right] \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}\right),$$

其中 $U_1, U_2, \ldots, U_n$ iid $\sim U(0, t)$，$U_{1:n} < U_{2:n} < \cdots < U_{n:n}$ 为 $U_1, \ldots, U_n$ 的次序统计量.

证明：直接利用 $(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}) \longleftrightarrow (S_1, S_2, \ldots, S_{n+1})$ 初等变换.

作业

第 2 章第一次作业

4，5，14–20

第 2 章第二次作业

22，30，31，32，38，39