

Riemann ζ 函数的渐近分析与数值计算

林晓烁

中国科学技术大学数学科学学院

linxiaoshuo1225@mail.ustc.edu.cn

2023 年 6 月 24 日

- Bernoulli 数与 Bernoulli 多项式
- Euler-Maclaurin 求和公式
- Riemann ζ 函数的数值计算方法

定义 (Bernoulli 数)

通过幂级数

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

对 $n \in \mathbb{N}$ 定义 Bernoulli 数 B_n .

显然 $B_0 = 1$.

$$\begin{array}{cccccc} B_1 = -\frac{1}{2}, & B_2 = \frac{1}{6}, & B_3 = 0, & B_4 = -\frac{1}{30}, & B_5 = 0, & \\ B_6 = \frac{1}{42}, & B_7 = 0, & B_8 = -\frac{1}{30}, & B_9 = 0, & B_{10} = \frac{5}{66}, & \\ B_{11} = 0, & B_{12} = -\frac{691}{2730}, & B_{13} = 0, & B_{14} = \frac{7}{6}, & B_{15} = 0, & \\ B_{16} = -\frac{3617}{510}, & B_{17} = 0, & B_{18} = \frac{43867}{798}, & B_{19} = 0, & B_{20} = -\frac{174611}{330}, & \dots \end{array}$$

除 B_1 外奇数项均为 0, 而偶数项正负号交错出现.

相关的级数推导参见 Г. М. 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程 [M]. 2. 高等教育出版社, 2006: 417-421. 注意其中对 Bernoulli 数的编号与这里采用的略有不同. 需具备数学分析 A3 知识.

Bernoulli 数与 Bernoulli 多项式

Bernoulli 多项式有多种等价定义, 我们选用母函数定义法.

定义 (Bernoulli 多项式)

对任意 $x \in \mathbb{C}$, 函数

$$F_x : \rho\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{ze^{xz}}{e^z - 1}$$

是解析函数. 我们通过母函数

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(x)}{k!} z^k \quad (z \in \rho\mathbb{B}, x \in \mathbb{C})$$

来定义 Bernoulli 多项式 $B_k(x)$.

Bernoulli 多项式的基本性质

$$(1) \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.$$

$$(2) \quad B_n(0) = B_n.$$

$$(3) \quad B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x).$$

$$(4) \quad B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}.$$

$$(5) \quad B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x).$$

Bernoulli 数与 Bernoulli 多项式

前 7 个 Bernoulli 多项式 (含 $B_0(x)$) 如下:

$$B_0(x) = 1,$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},$$

$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x,$$

$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}.$$

Bernoulli 数与 Bernoulli 多项式

我们后面关心的是它们在 $[0, 1]$ 上的性质.

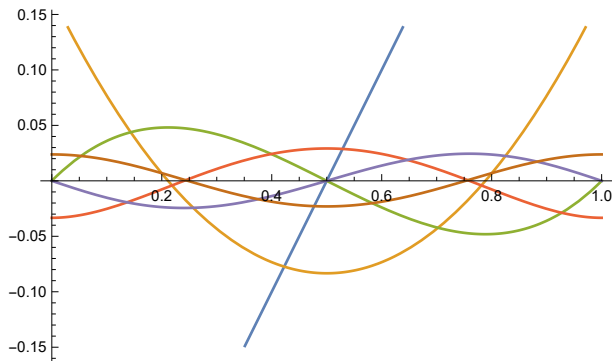


图: 前 6 个 Bernoulli 多项式 (不含 $B_0(x)$) 在 $[0, 1]$ 上的图像

Euler-Maclaurin 求和公式

解析数论中渐近分析的基本手段

下面我们记 \tilde{B}_n 为函数 $B_n(x)|_{[0,1]}$ 在 \mathbb{R} 上以 1 为周期的延拓, 即

$$\tilde{B}_n(x) := B_n(x - [x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

由前述性质可知, 对 $n \geq 2$, $B_n(0) = B_n(1)$ 且 $\tilde{B}_n \in C^{n-2}(\mathbb{R})$.

定理 (Euler-Maclaurin 求和公式)

设 $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$, $f \in C^{2m+1}[a, b]$ ($m \in \mathbb{N}^*$). 则

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^b f(k) &= \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{2} [f(a) + f(b)] + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(x) \Big|_a^b \\ &\quad + \frac{1}{(2m+1)!} \int_a^b \tilde{B}_{2m+1}(x) f^{(2m+1)}(x) dx. \end{aligned}$$

证明参见 Amann H, Escher J. Analysis II[M]. 1. Birkhäuser Cham, 2008. 证明过程较繁琐, 其核心在于分部积分法与 Bernoulli 多项式基本性质的反复配合使用. 需具备数学分析 A1 知识.

Riemann ζ 函数的估值方法

利用 Euler-Maclaurin 求和公式

对 $s \in \mathbb{C}$, 若 $\operatorname{Re}(s) > 1$, 则由 Euler-Maclaurin 求和公式有

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{N-1} n^{-s} + \sum_{n=N}^{+\infty} n^{-s} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} n^{-s} + \int_N^{+\infty} x^{-s} dx + \frac{1}{2} N^{-s} + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} s(s+1) \cdots (s+2k-2) N^{-s-2k+1} \\ &\quad - \underbrace{\frac{s(s+1) \cdots (s+2m)}{(2m+1)!} \int_N^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(x) x^{-s-2m-1} dx}_{\text{记为余项 } R_{2m}}.\end{aligned}$$

Riemann ζ 函数的数值计算方法

对余项 R_{2m} 的估计

$$\begin{aligned} |R_{2m}| &= \left| \frac{s(s+1)\cdots(s+2m)}{(2m+1)!} \int_N^{+\infty} \tilde{B}_{2m+1}(x) x^{-s-2m-1} dx \right| \\ &= \left| \frac{s(s+1)\cdots(s+2m+1)}{(2m+2)!} \int_N^{+\infty} [B_{2m+2} - \tilde{B}_{2m+2}(x)] x^{-s-2m-2} dx \right| \\ &\leq \frac{|s(s+1)\cdots(s+2m+1)|}{(2m+2)!} \int_N^{+\infty} |B_{2m+2} - \tilde{B}_{2m+2}(x)| x^{-\sigma-2m-2} dx, \end{aligned}$$

其中 $\sigma = \operatorname{Re}(s)$.

Riemann ζ 函数的数值计算方法

对余项 R_{2m} 的估计

注意到 $B_{2m+2} - \tilde{B}_{2m+2}(x)$ 与 B_{2m+2} 同号, 则有

$$\begin{aligned} & \int_N^{+\infty} \left| B_{2m+2} - \tilde{B}_{2m+2}(x) \right| x^{-\sigma-2m-2} dx \\ &= \int_N^{+\infty} (-1)^m \left[B_{2m+2} - \tilde{B}_{2m+2}(x) \right] x^{-\sigma-2m-2} dx \\ &= |B_{2m+2}| \int_N^{+\infty} x^{-\sigma-2m-2} dx - \int_N^{+\infty} (-1)^m \tilde{B}_{2m+2}(x) x^{-\sigma-2m-2} dx \\ &= \frac{|B_{2m+2}|}{\sigma + 2m + 1} N^{-\sigma-2m-1} - \frac{\sigma + 2m + 2}{2m + 3} \int_N^{+\infty} (-1)^m \tilde{B}_{2m+3}(x) x^{-\sigma-2m-3} dx \\ &\leq \left| \frac{B_{2m+2}}{\sigma + 2m + 1} \right| N^{-\sigma-2m-1}. \end{aligned}$$

Riemann ζ 函数的数值计算方法

对余项 R_{2m} 的估计

最后就得到

$$\begin{aligned} |R_{2m}| &\leq \left| \frac{s(s+1)\cdots(s+2m+1)B_{2m+2}N^{-\sigma-2m-1}}{(2m+2)!(\sigma+2m+1)} \right| \\ &= \left| \frac{s+2m+1}{\sigma+2m+1} \right| \cdot \underbrace{\left| \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} s(s+1)\cdots(s+2m)N^{-s-2m-1} \right|}_{\text{恰好是舍掉的第一项的模长}}. \end{aligned}$$

上述方法不仅对 $\operatorname{Re}(s) > 1$ 成立. 从推导过程可见, 只要 $\operatorname{Re}(s+2m+1) > 1$ 即适用. 另外, 因为此处 m 是任意的, 所以这也可以作为 $\zeta(s)$ 可以解析延拓至 $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ 上 (即除去极点 1 的整个复平面) 的一种证明方式.

Riemann ζ 函数的数值计算方法

例子: 计算 $\zeta(2)$

将 $s = 2$ 代入前面的公式,

$$\begin{aligned}\zeta(2) &= \sum_{n=1}^{N-1} n^{-2} + \int_N^{+\infty} x^{-2} dx + \frac{1}{2} N^{-2} \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} 2(2+1)\cdots(2+2k-2) N^{-2-2k+1} + R_{2m}.\end{aligned}$$

现在的目标是选取比较大的 N 使 R_{2m} 在 m 不那么小时就在所需精度以内. 试取 $N = 5$, $m = 2$, 代入前面的余项估计式,

$$|R_4| \leq \left| \frac{B_6}{6!} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5^{-7} \right| = \frac{1}{42 \cdot 5^7} \approx 3.047619 \times 10^{-7}.$$

于是在此误差范围内对 $\zeta(2)$ 的估计为

$$\zeta(2) \approx \sum_{n=1}^4 \frac{1}{n^2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 5^2} + \frac{1}{6 \cdot 5^3} - \frac{1}{30 \cdot 5^5} \approx \underbrace{1.64493}_{\text{精确位}} 3778 \sim \frac{\pi^2}{6}.$$

```

def zeta_approx(s, N, m):
    part1 = 0
    for index in range(1, N):
        part1 += index ** (-s)
    part2 = N ** (1 - s) / (s - 1)
    part3 = 0.5 * N ** (-s)
    part4 = 0
    prod = 1
    for k in range(1, m + 1):
        prod = 1
        for l in range(0, 2 * k - 1):
            prod *= (s + l)
        part4 += (bernoulli(2 * k)[2 * k] / factorial(2 * k) * prod * N ** (-s - 2 * k + 1))
    approx = part1 + part2 + part3 + part4
    magnitude = abs(approx)
    prod *= ((s + 2 * m - 1) * (s + 2 * m))
    remainder = abs((s + 2 * m + 1) / (s.real + 2 * m + 1) * (
        bernoulli(2 * m + 2)[2 * m + 2] / factorial(2 * m + 2) * prod * N ** (-s - 2 * m - 1)))
    return approx, magnitude, remainder

```

图: 基于 Python 的数值计算方法实现

Riemann ζ 函数的数值计算方法

例子：计算 $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ ——临界线上的非平凡零点在哪里？

Riemann 猜想

Riemann ζ 函数的所有非平凡零点都位于复平面上 $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 直线上。

我们用同样的方法在这条临界线上计算模长 $\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|$ 。

```
from zeta_approx import zeta_approx as ap
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

plt.rc('font', size=14)
plt.rc('text', usetex=True)
t = np.arange(-50, 50, 0.001)
plt.plot(t, ap(0.5 + t * complex(0, 1), 30, 30)[1])
plt.xlabel(r"$t$", loc="right")
plt.ylabel(r"$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$", loc="top", rotation=0)
plt.grid(linestyle=':', linewidth=0.75)
plt.show()
```

图：基于 Python 绘制 $\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|$ 的图像

$$|\zeta(\frac{1}{2} + it)|$$

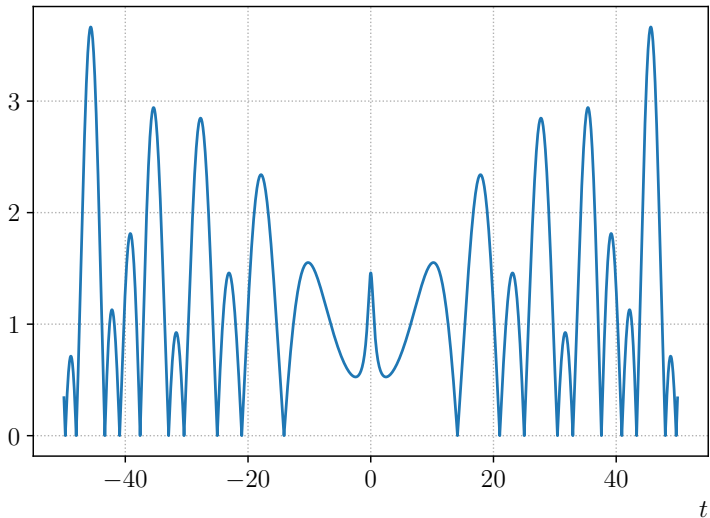


图: $|\zeta(\frac{1}{2} + it)|$ 在 $t \in [-50, 50]$ 上的图像

表: $\zeta(s)$ 在上半临界线的前 30 个零点 (保留至小数点后 9 位)

n	t_n	n	t_n	n	t_n
1	14.134725142	11	52.970321478	21	79.337375020
2	21.022039639	12	56.446247697	22	82.910380854
3	25.010857580	13	59.347044003	23	84.735492981
4	30.424876126	14	60.831778525	24	87.425274613
5	32.935061588	15	65.112544048	25	88.809111208
6	37.586178159	16	67.079810529	26	92.491899271
7	40.918719012	17	69.546401711	27	94.651344041
8	43.327073281	18	72.067157674	28	95.870634228
9	48.005150881	19	75.704690699	29	98.831194218
10	49.773832478	20	77.144840069	30	101.317851006

来源: Andrew Odlyzko: Tables of zeros of the Riemann zeta function

Riemann ζ 函数的数值计算方法

检验临界线上的第一个零点 $s = \frac{1}{2} + 14.134725142i$ (近似值)

```
s=0.5+14.134725142j
```

```
N=45
```

```
m=45
```

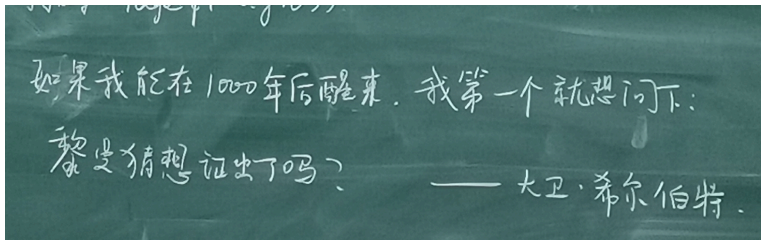
```
 $\zeta((0.5+14.134725142j))$  的近似值为  $(-3.3085758525258635e-11+2.078153517326431e-10j)$ 
```

```
模长为  $2.1043262064840111e-10$ 
```

```
余项模长控制在  $3.3429298882175905e-77$  以内
```

从数量级可以认为这确实是 $\zeta(s)$ 的一个零点

完



——2022年11月26日摄于第五教学楼教室