

# 实分析作业

附任广斌老师课件索引

<https://xiaoshuo-lin.github.io>



**习题 1** 设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 记  $f_1(x) = f(x)$ ,  $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$  ( $n = 2, 3, \dots$ ). 若存在  $n_0$ , 使得  $f_{n_0}(x) = x$ , 则  $f$  是  $\mathbb{R}$  到  $f(\mathbb{R})$  上的一一映射.

**证明** 设  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  满足  $f(x_1) = f(x_2)$ , 则  $x_1 = f_{n_0}(x_1) = f_{n_0}(x_2) = x_2$ . 故  $f: \mathbb{R} \rightarrow f(\mathbb{R})$  是单射.  $\square$

**习题 2** 不存在  $\mathbb{R}$  上的连续函数  $f$ , 它在  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  上是一一映射, 而在  $\mathbb{Q}$  上则不是一一映射.

**证明** 设  $\mathbb{R}$  上的连续函数  $f$  在  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  上是一一映射, 欲证  $f$  在  $\mathbb{Q}$  上亦为一一映射, 由  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \sqcup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ , 只需证  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  为双射.

( $f$  是单射) 若存在  $x_1 < x_2$  使得  $f(x_1) = f(x_2)$ , 则  $f$  在  $[x_1, x_2]$  上非常值函数. 由闭区间上连续函数的性质,  $f$  必在  $(x_1, x_2)$  上取到它在  $[x_1, x_2]$  上的最值, 不妨设  $x_0 \in (x_1, x_2)$  为最大值点. 由介值定理, 对任意  $y \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (f(x_1), f(x_0))$ , 其原像集至少含有两个元素, 且其中至多有一个无理数, 进而至少有一个有理数, 现任意取定其一. 注意到不同的无理数对应不同的有理数, 由此即得单射  $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (f(x_1), f(x_0)) \rightarrow \mathbb{Q}$ , 但这与  $(f(x_1), f(x_0))$  上无理数不可数矛盾.

( $f$  是满射) 对任意  $y \in \mathbb{R}$ , 取  $y_1, y_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  使得  $y_1 < y < y_2$ , 则存在  $x_1, x_2$  使得  $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ . 由介值定理, 存在  $x_1$  与  $x_2$  之间的数  $x_0$  使得  $f(x_0) = y$ , 因此  $f$  是满射.  $\square$

**习题 3**  $f: X \rightarrow Y$  是满射当且仅当对任意  $B \subseteq Y$ , 有  $f(f^{-1}(B)) = B$ .

**证明** 若  $X$  是单点集, 结论显然成立. 下设  $X$  至少含有两个元素.

( $\Rightarrow$ ) 对任意  $y \in Y$ , 存在  $x_y \in X$  使得  $f(x_y) = y$ , 于是  $\bigcup_{y \in B} \{x_y\} \subset f^{-1}(B)$ , 从而

$$B \supset f(f^{-1}(B)) \supset f\left(\bigcup_{y \in B} \{x_y\}\right) = \bigcup_{y \in B} \{f(x_y)\} = B \implies f(f^{-1}(B)) = B.$$

( $\Leftarrow$ ) 对任意  $y \in Y$ , 考虑  $\{y\} \subseteq Y$ , 则对任意  $x \in f^{-1}(\{y\})$ , 有  $f(x) = y$ . 故  $f: X \rightarrow Y$  是满射.  $\square$

**习题 4** 设  $f: X \rightarrow Y, A \subset X, B \subset Y$ , 试问: 下列等式成立吗?

(1)  $f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)$ .

(2)  $f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$ .

**解答** (1) 成立. 由  $Y = B \sqcup (Y \setminus B)$  得  $f^{-1}(Y) = f^{-1}(B) \sqcup f^{-1}(Y \setminus B)$ , 因此  $f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)$ .

(2) 一般不成立. 如取  $X = Y = \mathbb{R}, A = B = \{0\}, f \equiv 0$ , 则  $f(X \setminus A) = \{0\} \neq \emptyset = f(X) \setminus f(A)$ .  $\square$

**习题 5** 设  $E \subset \mathbb{R}$  是非空完全集, 试证明对任意的  $x \in E$ , 存在  $y \in E$ , 使得  $x - y$  为无理数.

**证明** 往证  $E$  是不可数集, 从而对任意  $x \in E$ , 集合  $\{x - y : y \in E\}$  不可数, 结合  $\mathbb{Q}$  可数即知, 存在  $y \in E$  使得  $x - y \notin \mathbb{Q}$ .

◇ 若  $E$  为有限集, 则  $E$  中每一点均为孤立点, 与  $E = E'$  矛盾.

◇ 若  $E$  为可数集,  $E = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . 假设  $E$  不含孤立点. 任取  $y_1 \in E$  满足  $y_1 \neq x_1$ , 再取  $\delta_1 \in (0, 1)$  使得  $x_1 \notin \overline{\mathbb{B}(y_1, \delta_1)}$ . 由  $y_1$  为  $E$  的极限点, 存在  $y_2 \neq x_2$  满足  $y_2 \in \mathbb{B}(y_1, \delta_1) \cap E$ . 取  $\delta_2 \in (0, \frac{1}{2})$ , 使得

$\mathbb{B}(y_2, \delta_2) \subset \mathbb{B}(y_1, \delta_1)$ , 且  $x_2 \notin \overline{\mathbb{B}(y_2, \delta_2)}$ . 由  $y_2$  为  $E$  的极限点, 存在  $y_3 \neq x_3$  满足  $y_3 \in \mathbb{B}(y_2, \delta_2) \cap E$ . 如此继续得到  $\{y_n\}, \{\delta_n\}$  满足

$$\delta_n \in (0, \frac{1}{n}), \quad \mathbb{B}(y_n, \delta_n) \subset \mathbb{B}(y_{n-1}, \delta_{n-1}),$$

$$x_n \notin \overline{\mathbb{B}(y_n, \delta_n)}, \quad y_{n+1} \in \mathbb{B}(y_n, \delta_n) \cap E, \quad y_{n+1} \neq x_{n+1}, \quad \forall n \geq 2.$$

由闭球套定理, 存在唯一  $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathbb{B}(y_n, \delta_n)}$ . 由  $E$  为闭集,  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in E$ . 但由上述构造,  $y \neq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , 即  $y \notin E$ , 矛盾. 故  $E$  是可数集得证.  $\square$

**习题 6** 试证明  $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{13}$  属于 Cantor 集.

**证明** 由

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2n}} = 0.0202 \cdots (3),$$

$$\frac{1}{13} = \frac{2}{27} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{27}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{3n}} = 0.002002 \cdots (3)$$

即知它们均属于 Cantor 集.  $\square$

**习题 7** 考虑单位区间  $[0, 1]$ , 固定实数  $\xi \in (0, 1)$ . 先挖去  $[0, 1]$  中央长度为  $\xi$  的开区间, 再分别挖去余下两个区间中央相对长度为  $\xi$  的开区间, 如此继续. 记  $\mathcal{C}_\xi$  为上述操作余下点集的极限. (Cantor 集  $\mathcal{C}$  即  $\xi = \frac{1}{3}$  的情形.)

- (1) 证明:  $\mathcal{C}_\xi$  在  $[0, 1]$  中的补集是总长度为 1 的开区间的并集.
- (2) 直接说明  $m^*(\mathcal{C}_\xi) = 0$ .

**证明** (1) 第  $n$  次操作挖去  $2^{n-1}$  个长度为  $\xi \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{n-1}$  的区间. 因此,  $\mathcal{C}_\xi$  在  $[0, 1]$  中的补集的总长度为

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \xi \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{n-1} = \xi \sum_{n=0}^{\infty} (1-\xi)^n = 1.$$

- (2) 记第  $n$  次操作后余下集合为  $\mathcal{C}_n$ . 由  $|\mathcal{C}_n| = 2^n \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^n = (1-\xi)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  及  $\mathcal{C}_\xi \subset \mathcal{C}_n (\forall n)$  即知

$$0 \leq m^*(\mathcal{C}_\xi) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| : \mathcal{C}_\xi \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, Q_j \text{ 为闭区间} \right\} \leq \inf_{n \geq 1} \{|\mathcal{C}_n|\} = 0 \implies m^*(\mathcal{C}_\xi) = 0. \quad \square$$

**习题 8** 构造闭集  $\hat{\mathcal{C}}$ , 在构造的第  $k$  步中, 挖去  $2^{k-1}$  个居于各区间中央的长度为  $\ell_k$  的开区间, 且满足

$$\ell_1 + 2\ell_2 + \cdots + 2^{k-1}\ell_k < 1.$$

- (1) 选取充分小的  $\ell_j$  使得  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}\ell_k < 1$ . 证明  $m(\hat{\mathcal{C}}) > 0$ , 具体言之,  $m(\hat{\mathcal{C}}) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}\ell_k$ .
- (2) 证明: 若  $x \in \hat{\mathcal{C}}$ , 则存在点列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  满足  $x_n \notin \hat{\mathcal{C}}$ , 但  $x_n \rightarrow x$  且  $x_n \in I_n$ , 这里  $I_n$  是  $\hat{\mathcal{C}}$  的余集的子区间且  $|I_n| \rightarrow 0$ .

(3) 证明  $\hat{C}$  是完全集, 且不含开区间.

(4) 证明  $\hat{C}$  是不可数集.

**证明** (1) 记第  $n$  次操作后余下集合为  $C_n$ , 则

$$m([0, 1] \setminus C_n) = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \ell_k \implies m(C_n) = 1 - \sum_{k=1}^n 2^{n-1} 2^{k-1} \ell_k.$$

由于  $C_n \downarrow \hat{C}$ , 我们有

$$m(\hat{C}) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(C_n) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \ell_k > 0.$$

(2) 对取定的  $x \in \hat{C}$ , 用  $J_n$  表示第  $n$  次操作后余下集合中包含  $x$  的闭区间. 令  $I_n$  为第  $n$  次操作中  $J_{n-1}$  挖去的开区间, 并记其中点为  $x_n$ , 则  $x_n \notin \hat{C}$  且  $|x_n - x| \leq |J_{n-1}| \rightarrow 0$ . 因此  $x_n \rightarrow x$  且  $|I_n| \rightarrow 0$ .

(3) ① 由于闭集对任意交封闭,  $\hat{C}$  是闭集, 因此为证  $\hat{C}$  是完全集, 只需证  $\hat{C}$  无孤立点. 沿用 (2) 中记号  $J_n$  与  $I_n$ , 并令  $x_n$  为  $I_n$  的一个端点, 则  $x_n \in \hat{C}$  且  $|x_n - x| \leq |J_{n-1}| \rightarrow 0$ , 因此  $x_n \rightarrow x$ , 这说明  $x$  不是孤立点. 故  $\hat{C}$  是完全集.

② 假设  $\hat{C}$  含开区间  $I$ , 则对任意  $x \in I \subset \hat{C}$ , 存在包含  $x$  的闭区间  $J \subset I$ , 此时  $d(x, \hat{C}^c) \geq d(\hat{C}^c, J) \geq d(I^c, J) > 0$ , 因此不存在满足 (2) 中性质的点列, 矛盾. 故  $\hat{C}$  不含开区间.

(4) 习题 5 已证  $\mathbb{R}$  中非空完全集为不可数集. □

**习题 9** 试证明全体超越数 (即不是整系数方程  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$  的根) 的基数是  $\mathfrak{c}$ .

**证明** 由于  $\text{card}(\mathbb{C}) = \text{card}(\mathbb{R}^2) = \mathfrak{c}$ , 由 Cantor 连续统假设, 只需证  $\mathbb{C}$  中超越数全体不可数. 记  $\mathbb{C}$  中代数数全体为  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ , 则由  $\pi \notin \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$  知  $\pi + \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$  中元素均为超越数, 因此  $\text{card}(\mathbb{C} \setminus \mathcal{O}_{\mathbb{C}}) \geq \text{card}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}})$ . 又若超越数全体可数, 则  $\mathbb{C} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \sqcup (\mathbb{C} \setminus \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$  亦可数, 矛盾. 故  $\text{card}(\mathbb{C} \setminus \mathcal{O}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{c}$ . □

**习题 10** 设  $\{f_n(x)\}$  是闭集  $F \subset \mathbb{R}$  上的连续函数列, 则  $f_n(x)$  在  $F$  上的收敛点集是  $F_{\sigma\delta}$  集.

**证明** 由 Cauchy 收敛原理,  $x_0 \in F$  是函数列  $\{f_n(x)\}$  的收敛点当且仅当对任意  $k \geq 1$ , 存在  $m \in \mathbb{N}$ , 使得对任意的  $n \geq m$ , 均有  $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \frac{1}{k}$ , 也即

$$\left\{ x_0 \in F : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) \text{ 存在} \right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{ x \in F : |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

由  $f_n(x) \in \mathcal{C}(F)$  知  $|f_n(x) - f_m(x)| \in \mathcal{C}(F)$ , 进而

$$\bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{ x \in F : |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

是可列个闭集之交, 仍为闭集, 进而  $f_n(x)$  在  $F$  上的收敛点集是  $F_{\sigma\delta}$  集. □

**习题 11** 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上具有介值性. 若对任意的  $r \in \mathbb{Q}$ , 点集  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = r\}$  为闭集, 试证明  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ .

**证明** 用反证法, 设  $x_0 \in \mathbb{R}$  是  $f(x)$  的不连续点, 则存在  $\varepsilon > 0$  使得对任意  $n \in \mathbb{N}$ , 均存在  $x_n \in \mathbb{B}(x_0, \frac{1}{n})$  满足  $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ . 现取定此  $\varepsilon$  与数列  $\{x_n\}$ , 并选取

$$r_+ \in (f(x_0), f(x_0) + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}, \quad r_- \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0)) \cap \mathbb{Q}.$$

由  $f(x)$  的介值性, 存在  $x_n$  与  $x$  之间的数  $y_n$ , 使得  $f(y_n) = r_+$  或  $r_-$ . 不妨设有无穷个  $y_n$  使得  $f(y_n) = r_+$ , 则  $\{y_n\}$  中有含于  $f^{-1}(r_+)$  的子列. 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$ , 而  $f^{-1}(r_+)$  为闭集, 因此  $x_0 \in f^{-1}(r_+)$ , 但这与  $f(x_0) < r_+$  矛盾. 故  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ .  $\square$

**习题 12** 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的可微函数, 且对任意的  $t \in \mathbb{R}$ , 点集  $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) = t\}$  是闭集, 试证明  $f'(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的连续函数.

**证明** 由 Darboux 定理,  $f'(x)$  在  $\mathbb{R}$  上具有介值性. 由习题 11 即知  $f'(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ .  $\square$

**习题 13** 设  $E \subset \mathbb{R}$ , 且存在  $q \in (0, 1)$ , 使得对任一区间  $(a, b)$ , 都有开区间列  $\{I_n\}$ :

$$E \cap (a, b) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < (b-a)q,$$

试证明  $m(E) = 0$ .

**证明** 由已知条件,  $m^*(E \cap (a, b)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < (b-a)q$ . 设  $\{\tilde{I}_n\}_{n=1}^{\infty}$  是  $E$  的一个开区间覆盖, 则

$$m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap \tilde{I}_n) \leq q \sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{I}_n|,$$

进而由外测度定义知

$$m^*(E) \leq qm^*(E).$$

再由  $q \in (0, 1)$  即得  $m^*(E) = 0$ . 因此对任意  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $m^*(A \cap E) = 0$  且  $m^*(A \cap E^c) \leq m^*(A)$ , 从而

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

即满足 Carathéodory 条件 (另一半不等式由外测度的  $\sigma$ -次可加性可得), 故  $E$  可测, 进而  $m(E) = 0$ .  $\square$

**习题 14** 设  $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ ,  $A_1 \subset A_2$ ,  $A_1$  是可测集, 且  $m(A_1) = m^*(A_2) < +\infty$ , 试证明  $A_2$  是可测集.

**证明** 由于  $A_1$  是可测集, 由 Carathéodory 条件,

$$m^*(A_2) = m^*(A_2 \cap A_1) + m^*(A_2 \cap A_1^c) = m^*(A_1) + m^*(A_2 \setminus A_1).$$

而  $m(A_1) = m^*(A_2) < +\infty$ , 因此  $m^*(A_2 \setminus A_1) = 0$ , 同习题 13 最后的讨论即知  $m(A_2 \setminus A_1) = 0$ . 于是  $A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$  亦可测.  $\square$

**习题 15** 设  $\{E_k\}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的可测集列, 若  $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) < +\infty$ , 试证明

$$m\left(\limsup_{k \rightarrow \infty} E_k\right) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} m(E_k).$$

**证明** 由于  $\limsup_{k \rightarrow \infty} E_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$ , 而  $\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$  关于  $k$  构成递减的可测集列, 因此由递减可测集列的测度

与极限换序得

$$m\left(\limsup_{k \rightarrow \infty} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\right) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{j \geq k} m(E_j) = \limsup_{k \rightarrow \infty} m(E_k). \quad \square$$

**习题 16** 设  $\{E_k\}$  是  $[0, 1]$  中的可测集列,  $m(E_k) = 1$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), 试证明

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1.$$

**证明** 由  $m(E_k) = 1$  得  $m([0, 1] \setminus E_k) = 0$ . 因此由测度的  $\sigma$ -次可加性,

$$1 \geq m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1 - m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} ([0, 1] \setminus E_k)\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} m([0, 1] \setminus E_k) = 1,$$

得所欲证. □

**习题 17** 设  $E \subset [0, 1]$ . 若  $m(E) = 1$ , 试证明  $\bar{E} = [0, 1]$ ; 若  $m(E) = 0$ , 试证明  $E^\circ = \emptyset$ .

**证明** 由  $E \subset [0, 1]$  可知  $\bar{E} \subset [0, 1]$ . 若  $m(E) = 1$ , 假设  $\bar{E} \neq [0, 1]$ , 则存在  $x_0 \in (0, 1) \setminus \bar{E}$ , 而后者为开集, 从而存在  $\delta > 0$ , 使得  $\mathbb{B}(x_0, \delta) \subset (0, 1) \setminus \bar{E}$ . 于是  $m(E) \leq m(\bar{E}) \leq 1 - m(\mathbb{B}(x_0, \delta)) = 1 - 2\delta < 1$ , 矛盾. 若  $m(E) = 0$ , 则  $m(E^c) = 1 - m(E) = 1$ , 由前述知  $\overline{E^c} = [0, 1]$ , 进而  $E^\circ = (\overline{E^c})^c = \emptyset$ . □

**习题 18** 设  $\{A_n\}$  是互不相交的可测集列,  $B_n \subset A_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 试证明

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n).$$

**证明** 由外测度的  $\sigma$ -次可加性, 只需证 LHS  $\geq$  RHS. 由于

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &\stackrel{A_1 \text{ 可测}}{\underset{\text{Carathéodory 条件}}{=}} m^*(B_1) + m^*\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n\right) = \dots \\ &\stackrel{A_k \text{ 可测}}{\underset{\text{Carathéodory 条件}}{=}} \sum_{n=1}^k m^*(B_n) + m^*\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} B_n\right) \geq \sum_{n=1}^k m^*(B_n), \end{aligned}$$

令  $k \rightarrow \infty$  即得 LHS  $\geq$  RHS, 进而结论得证. □

**习题 19** 设  $E \subset \mathbb{R}$ , 且  $0 < \alpha < m(E)$ , 试证明存在  $E$  中的有界闭集  $F$ , 使得  $m(F) = \alpha$ .

**证明** 考虑函数

$$f: [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty], \quad x \mapsto m(E \cap [-x, x]).$$

对  $0 \leq x_1 < x_2 < +\infty$ , 有  $|f(x_2) - f(x_1)| \leq 2|x_2 - x_1|$ , 即  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上 Lipschitz 连续. 再由递增可测集列的测度与极限换序可知  $f(x)$  在  $x = +\infty$  处也连续, 因此  $f(x)$  是  $[0, +\infty]$  上的连续函数, 它将连通集  $[0, +\infty]$  映为连通集. 由于  $f(0) = 0$ ,  $f(+\infty) = m(E)$ , 必存在  $x_0 \in [0, +\infty]$  (进一步地,  $x_0 \in [0, +\infty)$ ), 使得  $f(x_0) = \alpha$ , 此时  $F := E \cap [-x_0, x_0]$  为  $E$  中的有界闭集且  $m(F) = \alpha$ , 即为所求. □

**习题 20** 设  $E_1, E_2, \dots, E_k$  是  $[0, 1]$  中的可测集, 且有  $\sum_{i=1}^k m(E_i) > k - 1$ , 试证明  $m\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right) > 0$ .

**证明** 由

$$m\left(\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right)^c\right) = m\left(\bigcup_{i=1}^k E_i^c\right) \leq \sum_{i=1}^k m(E_i^c) = k - \sum_{i=1}^k m(E_i) < k - (k-1) = 1$$

即得  $m\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right) = 1 - m\left(\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right)^c\right) > 0$ . □

**习题 21** 设  $A \in \mathcal{M}$ ,  $B \subset \mathbb{R}^n$ , 试证明

$$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) = m^*(A) + m^*(B).$$

**证明** 由欲证形式可不妨设  $m(A) < +\infty$  且  $m^*(B) < +\infty$ . 由于  $A$  可测, 由 Carathéodory 条件,

$$\begin{aligned} m^*(B) &= m^*(B \cap A) + m^*(B \cap A^c), \\ m^*(A \cup B) &= m^*((A \cup B) \cap A) + m^*((A \cup B) \cap A^c) = m(A) + m^*(B \cap A^c). \end{aligned}$$

由于上面出现的 (外) 测度均有限, 将两式作差后移项即得证. □

**习题 22** 设  $\{B_k\}$  是  $\mathbb{R}^n$  中递减可测集列,  $m^*(A) < +\infty$ . 令  $E_k = A \cap B_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ),  $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ , 试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m^*(E_k) = m^*(E).$$

**证明** 由于  $B_k$  可测, 由 Carathéodory 条件,

$$m^*(A) = m^*(E_k) + m^*(A \cap B_k^c).$$

注意到  $\{A \cap B_k^c\}$  为递增集合列, 由于递增集合列的外测度与极限可换序, 在上式中令  $k \rightarrow \infty$  就得到

$$m^*(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} m^*(E_k) + m^*\left(A \cap \left(\lim_{k \rightarrow \infty} B_k\right)^c\right).$$

由于  $\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$  可测, 由 Carathéodory 条件,

$$m^*(A) = m^*\left(A \cap \lim_{k \rightarrow \infty} B_k\right) + m^*\left(A \cap \left(\lim_{k \rightarrow \infty} B_k\right)^c\right).$$

由于  $m^*\left(A \cap \left(\lim_{k \rightarrow \infty} B_k\right)^c\right) \leq m^*(A) < +\infty$ , 联立以上两式即得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m^*(E_k) = m^*\left(A \cap \lim_{k \rightarrow \infty} B_k\right) = m^*(E). \quad \square$$

**习题 23** 设  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $H \supset E$  且  $H$  是可测集. 若  $H \setminus E$  的任一可测子集皆为零测集, 试问  $H$  是  $E$  的等测包吗?

**解答**  $m(H) = m^*(E)$ , 但可能无法取成  $G_\delta$  型等测包.

(1) 设  $G$  为  $E$  的等测包, 由于  $(H \setminus G) \subset (H \setminus E)$  且  $H \setminus G$  可测, 由题设即得  $m(H \setminus G) = 0$ , 于是

$$m^*(E) \leq m(H) \leq m(H \cup G) = m(G) + m(H \setminus G) = m(G) = m^*(E) \implies m(H) = m^*(E).$$

(2) (一个反例) 记  $\mathcal{N} = \{Z \in \mathcal{M} : Z \subset [0, 1] \text{ 且 } m(Z) = 0\}$ . 注意到

$$2^{\mathfrak{c}} = \text{card}(2^{\mathfrak{C}}) \leq \text{card}(\mathcal{N}) \leq \text{card}(2^{[0,1]}) = 2^{\mathfrak{c}} \quad (\mathfrak{C} \text{ 表示 Cantor 集}),$$

由 Cantor-Bernstein 定理即得  $\text{card}(\mathcal{N}) = 2^{\mathfrak{c}}$ . 又

$$\text{card}(\{[0, 1] \text{ 中的 } G_\delta \text{ 集}\}) \leq \text{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathfrak{c},$$

因此存在非  $G_\delta$  集  $Z \in \mathcal{N}$ . 令  $E = [2, 3]$ ,  $H = E \sqcup Z$ , 则由 Lebesgue 测度的完备性,  $H \setminus E = Z$  的任一子集皆为零测集. 下证  $H$  不是  $G_\delta$  集. 用反证法, 假设  $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ , 其中  $G_k$  为开集, 则  $G_k \setminus E$  亦为开集, 且

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus E) = \left( \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \right) \setminus E = H \setminus E = Z,$$

但这与  $Z$  不是  $G_\delta$  集矛盾. 故  $H$  不是  $E$  的  $G_\delta$  型等测包.  $\square$

**习题 24** 点集  $E$  可测  $\iff$  对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在开集  $G_1, G_2 : G_1 \supset E, G_2 \supset E^c$ , 使得  $m(G_1 \cap G_2) < \varepsilon$ .

**证明** ( $\implies$ ) 若  $E$  可测, 则对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在开集  $G_1 \supset E$  与闭集  $F \subset E$ , 使得

$$m(G_1 \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而

$$m(G_1 \setminus F) = m((G_1 \setminus E) \cup (E \setminus F)) \leq m(G_1 \setminus E) + m(E \setminus F) < \varepsilon.$$

取  $G_2 = F^c$  为开集, 则  $G_2 \supset E^c$ , 且  $m(G_1 \cap G_2) = m(G_1 \setminus F) < \varepsilon$ .

( $\impliedby$ ) 若对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在开集  $G_1 \supset E, G_2 \supset E^c$ , 使得  $m(G_1 \cap G_2) < \varepsilon$ , 令  $F = G_2^c$ , 则  $F \subset (E^c)^c = E$ , 且  $m(G_1 \setminus F) = m(G_1 \cap G_2) < \varepsilon$ , 进而  $m^*(G_1 \setminus E) \leq m(G_1 \setminus F) < \varepsilon$ , 即  $E$  可测.  $\square$

**习题 25** 设  $f(x)$  定义在可测集  $E \subset \mathbb{R}^n$  上. 若  $f^2(x)$  在  $E$  上可测, 且  $\{x \in E : f(x) > 0\}$  是可测集, 证明  $f(x)$  在  $E$  上可测.

**证明** 往证对任意  $a \in \mathbb{R}$ , 右半开直线  $(a, +\infty)$  的原像可测.

(1) 若  $a \geq 0$ , 则

$$f^{-1}((a, +\infty)) = (f^2)^{-1}((a^2, +\infty)) \cap f^{-1}((0, +\infty))$$

为  $E$  中可测集之交, 故  $f^{-1}((a, +\infty))$  可测.

(2) 若  $a < 0$ , 则

$$f^{-1}((a, +\infty)) = f^{-1}((a, 0]) \cup f^{-1}((0, +\infty)) = \left( (f^2)^{-1}([0, a^2]) \cap f^{-1}((-\infty, 0]) \right) \cup f^{-1}((0, +\infty))$$

由  $f^{-1}((-\infty, 0]) = E \setminus f^{-1}((0, +\infty))$  知上式 RHS 可测, 即  $f^{-1}((a, +\infty))$  可测.  $\square$

**习题 26** 设  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ . 若有定义在  $[a, b]$  上的函数  $g(x) : g(x) = f(x)$ , a.e.  $x \in [a, b]$ , 试问:  $g(x)$  在  $[a, b]$  上必是几乎处处连续的吗?

**解答** 不一定, 考虑  $[a, b]$  上的 Dirichlet 函数  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [a, b]}$ , 有  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [a, b]} \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$ , 但  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [a, b]}$  无处连续.  $\square$

**习题 27** 设  $z = f(x, y)$  是  $\mathbb{R}^2$  上的连续函数,  $g_1(x), g_2(x)$  是  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  上的实值可测函数, 试证明  $F(x) = f(g_1(x), g_2(x))$  是  $[a, b]$  上的可测函数.

**证明** 记  $G(x) = (g_1(x), g_2(x))$ , 则  $G^{-1}([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = g_1^{-1}([a_1, b_1]) \cap g_2^{-1}([a_2, b_2])$  可测, 而  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ , 因此  $\mathbb{R}^2$  中任意开集关于  $F = f \circ G$  的原像均可测, 即  $F$  是可测函数.  $\square$

**习题 28** 设  $f(x)$  在  $[a, b)$  上存在右导数, 试证明右导函数  $f'_+(x)$  是  $[a, b)$  上的可测函数.

**证明** 对任意  $x \in [a, b)$ ,  $f'_+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = n[f(x + \frac{1}{n}) - f(x)]$ . 由右导数存在可知  $f(x)$  在  $[a, b)$  上右连续, 下证  $f(x)$  在  $[a, b)$  上的不连续点集可数. 对正整数  $n$ , 定义

$$E_n = \{x \in [a, b) : \text{存在 } \delta > 0, \text{ 使得只要 } x_1, x_2 \in \mathbb{B}(x, \delta), \text{ 就有 } |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{n}\}.$$

则  $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$  为  $f(x)$  的连续点集, 从而只需证  $f(x)$  的不连续点集  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c$  可数, 即证每个  $E_n^c$  可数. 对取定的  $n$ , 任取  $x \in E_n^c$ , 由于  $f(x)$  在  $x$  处右连续, 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$|f(y) - f(x^+)| < \frac{1}{2n}, \quad \forall y \in (x, x + \delta).$$

进而

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x^+)| + |f(x_2) - f(x^+)| < \frac{1}{n}, \quad \forall x_1, x_2 \in (x, x + \delta),$$

即  $(x, x + \delta) \subset E_n$ . 这说明对任意  $x \in E_n^c$ , 均存在以  $x$  为左端点开区间  $I_x \subset E_n$ , 于是存在  $E_n^c$  到  $\mathbb{Q}$  的单射, 从而  $E_n^c$  可数. 故  $f(x)$  与  $f(x + \frac{1}{n})$  几乎处处连续, 从而二者均可测,  $n[f(x) + f(\frac{1}{n})]$  可测, 再由可测函数列的极限仍可测即得  $f'_+$  可测.  $\square$

**习题 29** 设在可测集  $E \subset \mathbb{R}$  上,  $f_n(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$ , 且  $f_n(x) \xrightarrow{m} g(x)$ , 试问: 是否有关系式

$$g(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in E?$$

**解答** 由于  $f_n(x) \xrightarrow{m} g(x)$ , 根据 Riesz 定理, 存在子列  $f_{n_k}(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} g(x)$ , 设除去零测集  $Z_1$  后  $f_{n_k}(x) \rightarrow g(x)$ . 又  $f_{n_k}(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$ , 设除去零测集  $Z_2$  后  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ . 于是在  $E \setminus (Z_1 \cup Z_2)$  上有  $f(x) = g(x)$ , 而  $m(Z_1 \cup Z_2) = 0$ , 故  $f(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} g(x), x \in E$ .  $\square$

**习题 30** 试问:  $f_n(x) = \cos^n x$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 是  $[0, \pi]$  上依测度收敛列吗?

**解答** 对任意  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,  $\{x \in [0, \pi] : |\cos^n x| \geq \varepsilon\} = [0, \arccos \sqrt[n]{\varepsilon}] \cup (\pi - \arccos \sqrt[n]{\varepsilon}, \pi]$ , 其测度为  $2 \arccos \sqrt[n]{\varepsilon} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . 故  $f_n(x) \xrightarrow{m} 0$ .  $\square$

**习题 31** 设在  $E$  上  $f_k(x) \xrightarrow{m} 0, g_k(x) \xrightarrow{m} 0$ , 证明  $f_k(x)g_k(x) \xrightarrow{m} 0$ .

**证明** 对任意  $\varepsilon > 0$ , 记  $F_k(\varepsilon) = \{x \in E : |f_k(x)| \geq \varepsilon\}$ ,  $G_k(\varepsilon) = \{x \in E : |g_k(x)| \geq \varepsilon\}$ , 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(F_k(\sqrt{\varepsilon})) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(G_k(\sqrt{\varepsilon})) = 0.$$

再记  $H_k(\varepsilon) = \{x \in E : |f_k(x)g_k(x)| \geq \varepsilon\}$ , 注意到  $H_k(\varepsilon) \subset (F_k(\sqrt{\varepsilon}) \cup G_k(\sqrt{\varepsilon}))$ , 因此

$$m(H_k(\varepsilon)) \leq m(F_k(\sqrt{\varepsilon})) + m(G_k(\sqrt{\varepsilon})) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

故  $\lim_{k \rightarrow \infty} m(H_k(\varepsilon)) = 0$ , 即  $f_k(x)g_k(x) \xrightarrow{m} 0$ . □

**习题 32** 设  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上几乎处处连续的函数, 试问是否存在  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ , 使得

$$g(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}?$$

**解答** 不一定存在, 考虑  $f(x) = \mathbf{1}_{[0, +\infty)}$ , 则  $f(x)$  仅在  $x = 0$  处不连续, 但不存在  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  使得  $g(x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} f(x)$ . 这是因为, 若存在这样的  $g$ , 由  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ,

◇ 若  $g(0) \neq 0$ , 则存在  $\delta > 0$ , 使得在  $(-\delta, 0]$  上  $g(x) \neq 0$ , 与  $g(x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} f(x)$  矛盾.

◇ 若  $g(0) \neq 1$ , 则存在  $\delta > 0$ , 使得在  $[0, \delta)$  上  $g(x) \neq 1$ , 与  $g(x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} f(x)$  矛盾. □

**习题 33** 若  $f_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 在  $E \subset \mathbb{R}$  上依测度收敛于  $f(x) \equiv 0$ , 试问: 是否有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(\{x \in E : |f_n(x)| > 0\}) = 0?$$

**解答** 否. 取  $f_n(x) = \frac{1}{n}$ , 则对任意  $\varepsilon > 0$ , 当  $n > \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$  时,  $m(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = m(\emptyset) = 0$ , 即  $f_n \xrightarrow{m} f$ . 但对每个  $n$ , 均有  $m(\{x \in E : |f_n(x)| > 0\}) = m(\mathbb{R}) = +\infty$ . □

**习题 34** 设  $E \subset \mathbb{R}$  上的可测函数列  $\{f_k(x)\}$  满足

$$f_k(x) \geq f_{k+1}(x) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

若  $f_k(x)$  在  $E$  上依测度收敛到 0, 试问:  $f_k(x)$  在  $E$  上是否几乎处处收敛到 0?

**解答** 是. 由 Riesz 定理, 可取定子列  $f_{k_n}(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$ . 对于充分大的正整数  $i$ , 总存在唯一正整数  $n$  使得  $k_n \leq i < k_{n+1}$ , 从而  $f_{k_n}(x) \geq f_i(x) \geq f_{k_{n+1}}(x)$ . 由于所选的  $n$  随  $i$  单调递增, 夹逼即得  $f_i(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$ . □

**习题 35** 设  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的实值可测函数, 试问: 是否存在  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ , 使得

$$m(\{x \in \mathbb{R} : |f(x) - g(x)| > 0\}) = 0?$$

**解答** 否. 习题 32 的阶梯函数  $f(x) = \mathbf{1}_{[0, +\infty)}$  即为反例. □

**习题 36** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可测, 试证明存在多项式列  $\{P_n(x)\}$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in [a, b].$$

**证明** 记  $E = [a, b]$ . 由于  $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ , 由 Lusin 定理, 存在闭集  $F_1 \subset E$ , 使得  $m(E \setminus F_1) < 1$  且  $f \in \mathcal{C}(F_1)$ . 再由  $f \in \mathcal{L}(E \setminus F_1, \mathbb{R})$ , 存在闭集  $\tilde{F}_2 \subset E \setminus F_1$ , 使得  $m((E \setminus F_1) \setminus \tilde{F}_2) < \frac{1}{2}$  且  $f \in \mathcal{C}(\tilde{F}_2)$ , 从而闭集  $F_2 := F_1 \cup \tilde{F}_2$  使得  $m(E \setminus F_2) < \frac{1}{2}$  且  $f \in \mathcal{C}(F_2)$ . 重复此步骤即可构造  $E$  中递增闭集列  $\{F_n\}$ , 使得  $m(E \setminus F_n) < \frac{1}{n}$  且  $f \in \mathcal{C}(F_n)$ . 由 Tietze 扩张定理, 存在  $g \in \mathcal{C}(E)$  使得在  $F_n$  上有  $g(x) = f(x)$ . 由

Weierstrass 逼近定理, 存在多项式列  $\{P_n(x)\}$ , 使得

$$|g(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n}, \quad x \in E,$$

从而

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n}, \quad x \in F_n.$$

令  $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ , 则  $m(E \setminus F) = 0$ . 对任意  $x_0 \in F$ , 存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时,  $x_0 \in F_n$ , 从而

$$|f(x_0) - P_n(x_0)| < \frac{1}{n}, \quad \forall n > N \implies \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x_0) = f(x_0).$$

故在  $F$  上  $P_n(x) \rightarrow f(x)$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in [a, b]. \quad \square$$

**习题 37** 设  $f(x)$  是  $E \subset \mathbb{R}^n$  上几乎处处大于零的可测函数, 且满足  $\int_E f(x) dx = 0$ , 试证明  $m(E) = 0$ .

**证明** 记  $E_n = \{x \in E : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ , 则  $E = Z \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , 其中  $Z = \{x \in E : f(x) = 0\}$  为零测集. 由于

$$0 = \int_{E_n} f(x) dx \geq \frac{1}{n} m(E_n) \implies m(E_n) = 0, \quad \forall n \geq 1,$$

由测度的  $\sigma$ -次可加性即得  $m(E) \leq 0$ , 从而  $m(E) = 0$ . □

**习题 38** 设  $\{f_k(x)\}$  是  $E$  上的非负可测函数列. 若有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad f_k(x) \leq f(x) \quad (x \in E; k = 1, 2, \dots),$$

则对  $E$  的任一可测子集  $e$ , 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_e f_k(x) dx = \int_e f(x) dx.$$

**证明** 对  $\{f_k(x)\}$  运用 Fatou 引理可得

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_e f_k(x) dx \geq \int_e f(x) dx,$$

对  $\{f(x) - f_k(x)\}$  运用 Fatou 引理可得

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_e [f(x) - f_k(x)] dx \geq 0 \implies \int_e f(x) dx \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_e f_k(x) dx.$$

因此

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_e f_k(x) dx \geq \int_e f(x) dx \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_e f_k(x) dx \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_e f_k(x) dx,$$

每个不等号只能为等号, 得所欲证. □

**习题 39** 若  $f \in \mathcal{L}^1(E)$ , 则

$$m(\{x \in E : |f(x)| > k\}) = O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (k \rightarrow \infty).$$

**证明** 由  $|f| \in \mathcal{L}^1(E)$  即知

$$km(\{x \in E : |f(x)| > k\}) = \int_E k \mathbf{1}_{\{x \in E : |f(x)| > k\}} dx \leq \int_E |f(x)| dx < +\infty. \quad \square$$

**习题 40** 设  $f \in \mathcal{L}^1(E)$ , 记  $E_k = \{x \in E : |f(x)| < \frac{1}{k}\}$ , 试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} |f(x)| dx = 0.$$

**证明** 记  $g_k(x) = |f(x)| \mathbf{1}_{E_k}$ , 则  $g_k(x)$  可测,  $g_k(x) \rightarrow 0$ , 且  $|g_k(x)| \leq |f(x)| \in \mathcal{L}^1(E)$ . 由 Lebesgue 控制收敛定理即得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} |f(x)| dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(x) dx = \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) dx = 0. \quad \square$$

**习题 41** 设  $f(x)$  是  $[0, 1]$  上的递增函数, 试证明对  $E \subset [0, 1]$ ,  $m(E) = t$ , 有  $\int_{[0,t]} f(x) dx \leq \int_E f(x) dx$ .

**证明** 由于

$$[0, t] = ([0, t] \setminus E) \cup ([0, t] \cap E), \quad E = ([0, t] \cap E) \cup ([t, 1] \cap E),$$

其中  $m([0, t] \setminus E) = m([t, 1] \cap E)$ , 且

$$f(a) \leq f(b), \quad \forall a \in [0, t] \setminus E, \forall b \in [t, 1] \cap E.$$

因此由  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上递增可得

$$\int_{[0,t] \setminus E} f(x) dx \leq f(t) \cdot m([0, t] \setminus E) = f(t) \cdot m([t, 1] \cap E) \leq \int_{[t,1] \cap E} f(x) dx.$$

故

$$\int_{[0,t]} f(x) dx = \int_{[0,t] \setminus E} f(x) dx + \int_{[0,t] \cap E} f(x) dx \leq \int_{[t,1] \cap E} f(x) dx + \int_{[0,t] \cap E} f(x) dx = \int_E f(x) dx. \quad \square$$

**习题 42** 设  $f \in \mathcal{L}^1((0, +\infty))$ , 试证明函数  $g(x) = \int_{[0,+\infty)} \frac{f(t)}{x+t} dt$  在  $(0, +\infty)$  上连续.

**证明** 对任意  $x \in (0, +\infty)$  与  $h \in \mathbb{B}(x, \frac{x}{2})$ ,

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x+h)| &= \left| \int_{[0,+\infty)} \frac{hf(t)}{(x+t)(x+h+t)} dt \right| \leq \int_{[0,+\infty)} \frac{|h| \cdot |f(t)|}{x \cdot \frac{x}{2}} dt \\ &= \frac{2|h|}{x^2} \int_{[0,+\infty)} |f(t)| dt \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

故  $g(x) \in \mathcal{C}((0, +\infty))$ . □

**习题 43** 设  $f_k \in \mathcal{L}^1(E)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), 且  $f_k(x)$  在  $E$  上一致收敛于  $f(x)$ . 若  $m(E) < +\infty$ , 试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

**证明** 由于  $f_k(x) \Rightarrow f(x)$ , 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 当  $k > N$  时,  $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in E$ . 此时

$$\left| \int_E [f_k(x) - f(x)] dx \right| \leq \int_E |f_k(x) - f(x)| dx \leq \varepsilon m(E),$$

得所欲证. □

**习题 44** 设  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  是紧集, 试证明  $\lim_{|y| \rightarrow +\infty} \int_{E+\{y\}} |f(x)| dx = 0$ .

**证明** 设  $d = \text{diam } E$ , 则当  $|y|$  充分大时,  $E + \{y\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}(\mathbf{0}, |y| - d)$ , 此时

$$\int_{E+\{y\}} |f(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}(\mathbf{0}, |y| - d)} |f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}(\mathbf{0}, |y| - d)} dx.$$

由于  $\lim_{|y| \rightarrow +\infty} |f(x)| \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}(\mathbf{0}, |y| - d)} = 0$ ,  $|f(x)| \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}(\mathbf{0}, |y| - d)} \leq |f(x)| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ , 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}(\mathbf{0}, |y| - d)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{|y| \rightarrow +\infty} |f(x)| \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}(\mathbf{0}, |y| - d)} dx = 0,$$

得所欲证. □

**习题 45** 设  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ,  $a > 0$ , 试证明级数  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\frac{x}{a} + n)$  在  $\mathbb{R}$  上几乎处处绝对收敛, 其和函数  $S(x)$  以  $a$  为周期, 且  $S \in \mathcal{L}^1([0, a])$ .

**证明** 由于  $f(\frac{x}{a} + n) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \forall n$ , 由 Levi 单调收敛定理,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{[0, a]} |f(\frac{x}{a} + n)| dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[0, a]} \sum_{n=-k}^k |f(\frac{x}{a} + n)| dx = \int_{[0, a]} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(\frac{x}{a} + n)| dx.$$

而非负可积函数积分关于积分限的  $\sigma$ -可加性,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{[0, a]} |f(\frac{x}{a} + n)| dx = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{[n, n+1]} |f(x)| dx = a \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx,$$

因此

$$\int_{[0, a]} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(\frac{x}{a} + n)| dx = a \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty,$$

从而  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(\frac{x}{a} + n)|$  几乎处处有限, 也即  $S(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\frac{x}{a} + n)$  在  $\mathbb{R}$  上几乎处处绝对收敛, 且以  $a$

为周期. 又  $a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{[n, n+1]} |f(x)| dx < +\infty$ , 由逐项积分定理,

$$\int_{[0, a]} S(x) dx = \int_{[0, a]} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\frac{x}{a} + n) dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{[0, a]} f(\frac{x}{a} + n) dx = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbf{1}_{[n, n+1]} dx$$

$$= a \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=-k}^k \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbf{1}_{[n, n+1]} dx = a \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbf{1}_{[-k, k+1]} dx,$$

而  $f(x) \mathbf{1}_{[-k, k+1]} \rightarrow f(x)$ ,  $|f(x) \mathbf{1}_{[-k, k+1]}| \leq |f(x)| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\int_{[0, a]} S(x) dx = a \int_{\mathbb{R}} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x) \mathbf{1}_{[-k, k+1]} dx = a \int_{\mathbb{R}} f(x) dx,$$

故  $S(x) \in \mathcal{L}^1([0, a])$ . □

**习题 46** 设  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ,  $p > 0$ , 试证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-p} f(nx) = 0, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

**证明** 记  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-p} f(nx)|$ , 则由非负可测函数的逐项积分定理,

$$\int_{\mathbb{R}} S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |n^{-p} f(nx)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \int_{\mathbb{R}} |f(nx)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p-1} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty,$$

由此可知  $S(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , 从而  $S(x)$  几乎处处有限,  $|n^{-p} f(nx)| \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$ , 明所欲证. □

**习题 47** 设  $x^s f(x), x^t f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上可积, 其中  $s < t$ , 试证明积分

$$\int_{[0, +\infty)} x^u f(x) dx, \quad u \in (s, t)$$

存在且是  $u \in (s, t)$  的连续函数.

**证明** 记  $g(x) = |x^s f(x)| \mathbf{1}_{[0, 1]}$ ,  $h(x) = |x^t f(x)| \mathbf{1}_{(1, +\infty)}$ , 则  $g(x), h(x) \in \mathcal{L}^1([0, +\infty))$ , 从而  $g(x) + h(x) \in \mathcal{L}^1([0, +\infty))$ . 对于  $x \in [0, +\infty)$ , 有  $|x^u f(x)| \leq g(x) + h(x)$ , 因此  $|x^u f(x)| \in \mathcal{L}^1([0, +\infty))$  即  $x^u f(x) \in \mathcal{L}^1([0, +\infty))$ . 对任意固定的  $x \in (0, +\infty)$ ,  $x^u f(x) \in \mathcal{C}((s, t))$ , 因此  $\int_{[0, +\infty)} x^u f(x) dx \in \mathcal{C}((s, t))$ . □

**习题 48** 设  $f(x)$  是  $(0, 1)$  上的正值可测函数. 若存在常数  $c$ , 使得

$$\int_{[0, 1]} [f(x)]^n dx = c \quad (n = 1, 2, \dots),$$

试证明存在可测集  $E \subset (0, 1)$ , 使得  $f(x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} \mathbf{1}_E(x)$ . 再问: 若  $f(x)$  不是非负的又如何?

**证明** (1) 由  $f$  正值且可测, 只需证  $m([f > 1]) = m([0 < f < 1]) = 0$ .

① 记  $A_k = [f \geq 1 + \frac{1}{k}]$  ( $k \geq 1$ ), 则

$$c = \int_{[0, 1]} [f(x)]^n dx \geq \int_{A_k} [f(x)]^n dx \geq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n m(A_k),$$

其中  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n = +\infty$ , 因此只能有  $m(A_k) = 0$ , 进而  $m([f > 1]) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 0$ .

② 在  $[0 < f \leq 1]$  上, 由  $|f|^n \leq 1$ , 运用 Lebesgue 控制收敛定理即得

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} [f(x)]^n dx \stackrel{\text{①}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0 < f \leq 1]} [f(x)]^n dx = \int_{[0 < f \leq 1]} \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x)]^n dx = m([f = 1]).$$

因此

$$c = \int_{[0,1]} f(x) dx = m([f = 1]) + \int_{[0 < f < 1]} f(x) dx \implies \int_{[0 < f < 1]} f(x) dx = 0,$$

由习题 37 即得  $m([0 < f < 1]) = 0$ .

(2) 若  $f(x)$  不是非负的, 由于  $f^2(x)$  非负可测, 且满足

$$\int_{[0,1]} [f^2(x)]^n dx = c \quad (n = 1, 2, \dots),$$

与 (1) 同样处理可知存在可测集  $E \subset (0, 1)$ , 使得  $f^2(x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} \mathbf{1}_E(x)$ . 于是

$$0 = \int_{[0,1]} f(x)[f(x) - 1] dx = \int_E f(x)[f(x) - 1] dx = \int_{[f=-1]} f(x)[f(x) - 1] dx = 2m([f = -1]),$$

因此仍有  $f(x) = \mathbf{1}_E(x)$ . □

**习题 49** 设  $f \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ , 试证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} n \ln \left( 1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) dx = 0.$$

**证明** 设  $g(x) = \ln(1 + x^2) - x$ , 由  $g'(x) = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2} \leq 0$  及  $g(0) = 0$  知对  $x \in [0, 1]$  有  $g(x) \leq 0$  即  $\ln(1 + x^2) \leq x$ . 因此  $\left| n \ln \left( 1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) \right| \leq |f(x)| \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ . 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} n \ln \left( 1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) dx = \int_{[0,1]} \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left( 1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) dx.$$

由熟知的不等式  $\ln(1 + t) \leq t$  可得

$$0 \leq n \ln \left( 1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) \leq \frac{|f(x)|^2}{n},$$

而  $f \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ ,  $f(x)$  几乎处处有限, 因此由上式可得

$$n \ln \left( 1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) \xrightarrow{\text{a.e.}} 0, \quad x \in [0, 1].$$

由于零测集上积分值为 0,

$$\int_{[0,1]} \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left( 1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) dx = \int_{[0,1]} 0 dx = 0,$$

得所欲证. □

**习题 50** 设  $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_k \supset \cdots$ ,  $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ ,  $f \in \mathcal{L}^1(E_k)$  ( $k = 1, 2, \cdots$ ), 试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

**证明** 由于  $f(x)\mathbb{1}_{E_k}(x) \downarrow f(x)\mathbb{1}_E(x)$ , 且  $(f(x)\mathbb{1}_{E_1}(x))^+ = f^+(x)\mathbb{1}_{E_1}(x) \in \mathcal{L}^+(E_1) \cap \mathcal{L}^1(E_1)$ , 由推广的 Levi 单调收敛定理,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_1} f(x)\mathbb{1}_{E_k}(x) dx = \int_{E_1} f(x)\mathbb{1}_E(x) dx = \int_E f(x) dx. \quad \square$$

**习题 51** 设  $f \in \mathcal{L}^1(E)$ , 且  $f(x) > 0$  ( $x \in E$ ), 试证明  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E [f(x)]^{\frac{1}{k}} dx = m(E)$ .

**证明** 不妨设  $f$  只取有限值. 设  $g_k(x) = [f(x)]^k \mathbb{1}_{[f < 1]}$ ,  $h_k(x) = [f(x)]^k \mathbb{1}_{[f \geq 1]}$ , 则  $[f(x)]^k = g_k(x) + h_k(x)$ , 且  $g_k \uparrow \mathbb{1}_{[f < 1]}$ ,  $h_k \downarrow \mathbb{1}_{[f \geq 1]}$ ,  $|h_k| \leq |f| \in \mathcal{L}^1(E)$ , 由 Levi 单调收敛定理及 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E [f(x)]^{\frac{1}{k}} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(x) dx + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E h_k(x) dx = \int_E \mathbb{1}_{[f < 1]} dx + \int_E \mathbb{1}_{[f \geq 1]} dx = m(E). \quad \square$$

**习题 52** 设  $f(x), f_n(x)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) 是  $[0, 1]$  上的非负可积函数. 若  $f_n(x) \xrightarrow{m} f(x)$ , 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_n(x) dx = \int_{[0,1]} f(x) dx,$$

试证明对  $[0, 1]$  的任一可测子集  $E$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

**证明** 用反证法, 假设结论不成立, 则存在可测子集  $E \subset [0, 1]$ ,  $\{f_n(x)\}$  的子列  $\{f_{n_k}(x)\}$  与  $\varepsilon > 0$ , 使得

$$\left| \int_E f_{n_k}(x) dx - \int_E f(x) dx \right| \geq \varepsilon, \quad \forall k.$$

由于  $f_{n_k}(x) \xrightarrow{m} f(x)$ , 由 Riesz 定理, 存在子列  $\{f_{n_{k_j}}(x)\}$ , 使得  $f_{n_{k_j}}(x) \xrightarrow{a.e.} f(x)$ , 又

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_{n_{k_j}}(x) dx = \int_{[0,1]} f(x) dx,$$

由交换次序的充要条件即得  $\{f_{n_{k_j}}(x)\}$  在  $[0, 1]$  上一致可积, 从而在  $E$  上一致可积, 因此又有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_E f_{n_{k_j}}(x) dx = \int_E f(x) dx,$$

但这与  $\{f_{n_k}(x)\}$  的选取矛盾. 故原命题得证. □

**习题 53** 设  $f_k(x)$  是  $E$  上的非负可积函数列, 且  $f_k(x)$  在  $E$  上几乎处处收敛于  $f(x) \equiv 0$ . 若有

$$\int_E \max\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\} dx \leq M \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = 0.$$

**证明** 记  $g_k(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$ , 则  $0 \leq g_k(x) \uparrow \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) =: g(x)$ . 由 Levi 单调收敛定理,

$$\int_E g(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(x) dx \leq M \implies g(x) \in \mathcal{L}^1(E).$$

而  $f_k(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$  且  $|f_k(x)| \leq g(x)$ , 由 Lebesgue 控制收敛定理即得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = 0. \quad \square$$

**习题 54** 设  $\{f_k(x)\}$  是  $E$  上依测度收敛于  $f(x)$  的非负可测函数列, 试证明

$$\int_E f(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx.$$

**证明** 不妨设  $m(E) > 0$ . 由积分的绝对连续性, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对任意可测集  $A \subset E$ , 只要  $m(A) < \delta$ , 就有  $\int_A f(x) dx < \varepsilon$ . 记  $E_k = \{|f_k - f| \geq \frac{\varepsilon}{m(E)}\}$ , 由  $f_k \xrightarrow{m} f$  知存在  $N \in \mathbb{N}$ , 当  $k > N$  时  $m(E_k) < \delta$ , 此时

$$\begin{aligned} \int_E f(x) dx &= \int_{E_k} f(x) dx + \int_{E \setminus E_k} f(x) dx < \varepsilon + \int_{E \setminus E_k} \left( f_k(x) + \frac{\varepsilon}{m(E)} \right) dx \\ &\leq 2\varepsilon + \int_E f_k(x) dx. \end{aligned}$$

令  $k \rightarrow \infty$  并取下极限即得

$$\int_E f(x) dx \leq 2\varepsilon + \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx,$$

由  $\varepsilon > 0$  的任意性即得欲证. □

**习题 55** 设  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) \in \mathcal{L}^+(E)$ . 若存在  $E_k \subset E$ ,  $m(E \setminus E_k) < \frac{1}{k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), 使得极限  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x) dx$  存在, 试证明  $f(x) \in \mathcal{L}^1(E)$ .

**证明** 取  $\{E_k\}$  的子列  $\{E_{k_n}\}$ , 使得  $m(E \setminus E_{k_n}) < \frac{1}{2^n}$ . 由 Borel-Cantelli 引理,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (E \setminus E_{k_n})$  为零测集, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{E_{k_n}} \xrightarrow{\text{a.e.}} \mathbf{1}_E$ . 由 Fatou 引理,

$$\int_E f(x) dx = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{E_{k_n}}(x) f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{E_{k_n}} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x) dx < +\infty,$$

即  $f \in \mathcal{L}^1(E)$ . □

**习题 56** 设  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的非负可积函数, 令

$$F(x) = \int_{(-\infty, x]} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

若  $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , 试证明  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$ .

**证明**  $F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathbf{1}_{(-\infty, x]}(t) dt$ , 其中  $f(t)\mathbf{1}_{(-\infty, x]}(t) \rightarrow f(t) = |f(t)| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , 由连续版本的 Lebesgue 控制收敛定理,  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) dt$ . 假设  $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt \neq 0$  (即  $> 0$ ), 则存在  $N$ , 当  $x > N$  时  $F(x) > \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(t) dt$ , 从而

$$\int_{\mathbb{R}} F(x) dx = \int_{-\infty}^N F(x) dx + \int_N^{+\infty} F(x) dx \geq \int_{-\infty}^N F(x) dx + \frac{M-N}{2} \int_{\mathbb{R}} f(t) dt, \quad \forall M > N.$$

令  $M \rightarrow +\infty$  即得  $\int_{\mathbb{R}} F(x) dx = +\infty$ , 与  $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  矛盾. 故  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$ .  $\square$

**习题 57** 设  $f_k(x)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) 是  $\mathbb{R}^n$  上的非负可积函数列. 若对任一可测集  $E \subset \mathbb{R}^n$ , 都有

$$\int_E f_k(x) dx \leq \int_E f_{k+1}(x) dx,$$

试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx.$$

**证明** 设  $F_k = [f_k(x) > f_{k+1}(x)]$ , 则由

$$\int_{F_k} f_k(x) dx \leq \int_{F_k} f_{k+1}(x) dx$$

可知  $m(F_k) = 0$ . 令  $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ , 则  $m(F) = 0$ . 在  $E \setminus F$  上运用 Levi 单调收敛定理即得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E \setminus F} f_k(x) dx = \int_{E \setminus F} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx. \quad \square$$

**习题 58** 设  $\{E_k\}$  是  $\mathbb{R}^n$  中测度有限的可测集列, 且有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{1}_{E_k}(x) - f(x)| dx = 0,$$

试证明存在可测集  $E$ , 使得  $f(x) = \mathbf{1}_E(x)$ , a.e.  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**证明** 由  $\mathbf{1}_{E_k} \xrightarrow{L^1} f$  即知  $\mathbf{1}_{E_k} \xrightarrow{m} f$ , 由 Riesz 定理, 存在子列  $\mathbf{1}_{E_{k_j}} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ , 而特征函数仅取值 0, 1, 其极限函数的仍仅取值 0, 1, 因此也是一个特征函数, 即存在可测集  $E$ , 使得  $f(x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} \mathbf{1}_E(x)$ .  $\square$

**习题 59** 设  $f(x, y) \in \mathcal{L}^1([0, 1] \times [0, 1])$ , 试证明

$$\int_0^1 \left( \int_0^x f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left( \int_y^1 f(x, y) dx \right) dy.$$

**证明** 令  $E = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ , 则  $f\mathbf{1}_E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ , 由 Fubini 定理, 欲证 LHS =  $\int_{\mathbb{R}^2} f\mathbf{1}_E dx dy =$  RHS.  $\square$

**习题 60** 设  $A, B$  是  $\mathbb{R}^n$  中的可测集, 试证明

$$\int_{\mathbb{R}^n} m((A - \{x\}) \cap B) dx = m(A) \cdot m(B).$$

**证明** 由于  $\mathbf{1}_{A-\{x\}}(y)\mathbf{1}_B(y) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , 由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{A-\{x\}}(y)\mathbf{1}_B(y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{A-\{x\}}(y)\mathbf{1}_B(y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{A-\{x\}}(y) dx \right) \mathbf{1}_B(y) dy \stackrel{*}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{A-\{y\}}(x) dx \right) \mathbf{1}_B(y) dy = m(A) \cdot m(B), \end{aligned}$$

其中  $*$  处用到了  $y \in A - \{x\} \iff x + y \in A \iff x \in A - \{y\}$ . □

**习题 61** 设  $f(x), g(x)$  是  $E \subset \mathbb{R}$  上的可测函数且  $m(E) < +\infty$ , 若  $f(x) + g(y) \in \mathcal{L}^1(E \times E)$ , 试证明  $f(x), g(x) \in \mathcal{L}^1(E)$ .

**证明** (1) 先说明  $m(\{y \in E : |f(y)| = +\infty\}) = 0$ . 若否, 设  $A = \{x \in E : |g(x)| < +\infty\}$ , 则  $m(A) > 0$ , 令  $B = A \times \{y \in E : |f(y)| = +\infty\}$ , 则  $m(B) = m(A) \times m(\{y \in E : |f(y)| = +\infty\}) > 0$ , 而在  $B$  上  $|f(x) + g(y)| = +\infty$ , 这与  $f(x) + g(y) \in \mathcal{L}^1(E \times E)$  几乎处处有限矛盾.

(2) 由于  $f(x) + g(y) \in \mathcal{L}^1(E \times E)$ , 由 Fubini 定理, 对几乎处处的  $y \in E$ ,  $f(x) + g(y) \in \mathcal{L}^1(E)$ . 而  $m(E) < +\infty$ , 且由 (1) 可不妨设  $|g(y)| < +\infty$ , 因此  $g(y)$  对  $x$  在  $E$  上可积, 从而  $f(x) = [f(x) + g(y)] - g(y) \in \mathcal{L}^1(E)$ . 同理可得  $g(x) \in \mathcal{L}^1(E)$ . □

**习题 62** 计算下列积分:

$$(1) \int_{x>0} \int_{y>0} \frac{dx dy}{(1+y)(1+x^2y)}.$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx.$$

**解答** (1) 由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+y)(1+x^2y)} &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2y} \right) \frac{dy}{1+y} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \arctan(\sqrt{y}x) \Big|_0^{+\infty} dy = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)\sqrt{y}} dy \stackrel{y=t^2}{=} \pi \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

(2) 由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+y)(1+x^2y)} &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)(1+x^2y)} \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{1+y} - \frac{x^2}{1+x^2y} \right) dy dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+y}{1+x^2y} \Big|_{y=0}^{y=+\infty} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln \frac{1}{x^2}}{1-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx, \end{aligned}$$

再由 (1) 知所求积分为  $\frac{\pi^2}{4}$ . □

**习题 63** 设  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $m(E) > 0$ ,  $f(x) \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R})$ . 若函数  $F(x) = \int_E f(x-t) dt \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , 试证明  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ .

**证明** 由 Fubini 定理,

$$+\infty > \int_{\mathbb{R}} F(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_E(t) f(x-t) dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_E(t) \left( \int_{\mathbb{R}} f(x-t) dx \right) dt = m(E) \int_{\mathbb{R}} f(x) dx,$$

而  $m(E) > 0$ , 因此  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx < +\infty$ . 由于  $f(x) \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R})$ , 因此  $f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ .  $\square$

**习题 64** 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上非负可积,  $E \subset (0, +\infty)$ ,  $\int_E f(x) dx = 1$ . 试证明  $\int_E f(x) \cos x dx \neq 1$ .

**证明** 用反证法, 假设  $\int_E f(x) \cos x dx = 1$ , 则  $\int_E f(x)(1 - \cos x) dx = 0$ , 但  $f(x)(1 - \cos x) \geq 0$ , 因此在  $E$  上  $f(x)(1 - \cos x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} 0$ . 而  $m(\{x > 0 : \cos x = 0\}) = 0$ , 因此在  $E$  上  $f(x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} 0$ , 与  $\int_E f(x) dx = 1$  矛盾.  $\square$

**习题 65** 设  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ,  $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 且

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

试证明  $f_n(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$ .

**证明** 记  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|$ . 由逐项积分定理,

$$+\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} S(x) dx,$$

因此  $S(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , 从而  $S(x)$  几乎处处有限, 余项  $|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$ , 即  $f_n(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$ .  $\square$

**习题 66** 设数列  $\{a_n\}$  满足  $|a_n| < \ln n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ), 试证明

$$\int_{[2, +\infty)} \sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x} dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\ln n} n^{-2}.$$

**证明** 设  $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-x} \ln n \in \mathcal{L}^+([2, +\infty))$ , 由 Levi 单调收敛定理,

$$\int_2^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=2}^{\infty} \int_2^{+\infty} n^{-x} \ln n dx = - \sum_{n=2}^{\infty} n^{-x} \Big|_2^{+\infty} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

因此  $f(x) \in \mathcal{L}^1([2, +\infty))$ . 由  $|a_n| < \ln n$  可知  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x} < f(x)$ , 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\int_{[2, +\infty)} \sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x} dx = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \int_{[2, +\infty)} n^{-x} dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\ln n} n^{-2}. \quad \square$$

**习题 67** 设定义在  $E \times \mathbb{R}^n$  上的函数  $f(x, y)$  满足:

(1) 对每一个  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(x, y) \in \mathcal{L}(E)$ .

(2) 对每一个  $x \in E$ ,  $f(x, y) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ .

若存在  $g \in \mathcal{L}^1(E)$ , 使得  $|f(x, y)| \leq g(x)$ , a.e.  $x \in E$ , 则函数  $F(y) = \int_E f(x, y) dx \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ .

**证明** 对任意点列  $y_k \rightarrow y_0 \in \mathbb{R}^n$ , 由于  $|f(x, y_k)| \leq g(x) \in \mathcal{L}^1(E)$ , 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f(x, y_k) dx = \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} f(x, y_k) dx = \int_E f(x, y_0) dx.$$

再由 Heine 归结原理即知  $F(y) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ . □

**习题 68** 设  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , 且  $xf(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , 令  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ . 若  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$ , 试证明  $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ .

**证明** 由  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$  可知, 当  $x \geq 0$  时,

$$|F(x)| = \left| \int_{-\infty}^x f(t) dt \right| = \left| \int_x^{+\infty} f(t) dt \right| = \left| \int_0^{+\infty} f(t) \mathbf{1}_{[x, +\infty)}(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| \mathbf{1}_{[x, +\infty)}(t) dt,$$

因此

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |F(x)| dx &\leq \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f(t)| \mathbf{1}_{[x, +\infty)}(t) dt dx = \int_0^{+\infty} \int_0^t |f(t)| \mathbf{1}_{[0, t]}(x) dx dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^t |f(t)| dx dt = \int_0^{+\infty} t |f(t)| dt < +\infty. \end{aligned}$$

而当  $x < 0$  时,

$$|F(x)| = \left| \int_{-\infty}^x f(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^0 |f(t)| \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(t) dt,$$

因此

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 |F(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 |f(t)| \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(t) dt dx = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 |f(t)| \mathbf{1}_{[t, +\infty)}(x) dx dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_t^0 |f(t)| dx dt = \int_{-\infty}^0 |t f(t)| dt < +\infty, \end{aligned}$$

故  $\int_{\mathbb{R}} |F(x)| dx < +\infty$ , 即  $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . □

**习题 69** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \arctan(nx) dx$  的值.

**解答** 由于  $|\cos x| \leq 1$ ,  $|\arctan(nx)| \leq \frac{\pi}{2}$ , 且当  $x > 0$  时,  $\cos x \arctan(nx) \rightarrow \frac{\pi}{2} \cos x$ , 由 Lebesgue 控制收敛定理,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \arctan(nx) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \cos x dx = \frac{\pi}{2}$ . □

**习题 70** 设  $f \in \mathcal{L}^1((0, a))$ ,  $g(x) = \int_x^a \frac{f(t)}{t} dt$  ( $0 < x < a$ ), 试证明  $g \in \mathcal{L}^1((0, a))$ , 且

$$\int_0^a g(x) dx = \int_0^a f(x) dx.$$

**证明** 通过正负部分解, 可不妨设  $f(x) \geq 0$ . 由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned} \int_0^a g(x) dx &= \int_0^a \int_x^a \frac{f(t)}{t} dt dx = \int_0^a \int_0^a \frac{f(t)}{t} \mathbf{1}_{[x,a]}(t) dt dx \\ &= \int_0^a \int_0^t \frac{f(t)}{t} dx dt = \int_0^a f(t) dt < +\infty \implies g \in \mathcal{L}^1((0, a)). \end{aligned} \quad \square$$

**习题 71** 试证明:  $\int_{[0,+\infty)} e^{-x^2} \cos(2xt) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-t^2}$ .

**证明** 记  $f(t) = \int_{[0,+\infty)} e^{-x^2} \cos(2xt) dx$ , 则

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{+\infty} \left\{ \left( \int_p^t -2x \sin(2xs) e^{-x^2} ds \right) + \cos(2px) e^{-x^2} \right\} dx \\ &= \int_p^t \int_0^{+\infty} -2x \sin(2xs) e^{-x^2} dx ds + \int_0^{+\infty} \cos(2px) e^{-x^2} dx \\ &\stackrel{\text{Riemann-Lebesgue 引理}}{\underset{p \rightarrow -\infty}{\longrightarrow}} \int_{-\infty}^t \left\{ \int_0^{+\infty} \left( e^{-x^2} \sin(2xs) \right)' dx - 2s \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2xs) dx \right\} ds \\ &= \int_{-\infty}^t -2sf(s) ds, \end{aligned}$$

两边求导即得  $f'(t) = -2tf(t)$ , 结合  $f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  解得  $f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-t^2}$ . □

**习题 72** 设  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), 且对于任一可测集  $E \subset \mathbb{R}^n$ , 有

$$\begin{aligned} \int_E f_k(x) dx &\leq \int_E f_{k+1}(x) dx \quad (k = 1, 2, \dots), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx &= \int_E f(x) dx, \end{aligned}$$

试证明  $f_k(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$ .

**证明** 由题设, 存在零测集  $Z \subset \mathbb{R}^n$ , 使得在  $\mathbb{R}^n \setminus Z$  上  $\{f_k(x)\}$  为单调递增函数列, 设  $f_k(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} g(x)$ . 由推广的 Levi 单调收敛定理,

$$\int_E f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E g(x) dx,$$

由可测集  $E$  的任意性,  $m([f < g]) = m([f > g]) = 0$ , 即  $f(x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} g(x)$ . 故  $f_k(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$ . □

**习题 73** 设  $\{f_k(x)\}, \{g_k(x)\}$  是  $E \subset \mathbb{R}^n$  上的两个可测函数列, 且有  $|f_k(x)| \leq g_k(x), x \in E$ . 若

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) &= f(x), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = g(x), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(x) dx &= \int_E g(x) dx < +\infty, \end{aligned}$$

试证明  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx$ .

**证明** 由  $|f_k(x)| \leq g_k(x)$  取极限即得  $|f(x)| \leq g(x)$ , 从而  $|f_k(x) - f(x)| \leq |f_k(x)| + |f(x)| \leq g_k(x) + g(x)$ . 由 Fatou 引理,

$$\int_E \liminf_{k \rightarrow \infty} [g_k(x) + g(x) - |f_k(x) - f(x)|] dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E [g_k(x) + g(x) - |f_k(x) - f(x)|] dx,$$

也即

$$2 \int_E g(x) dx \leq 2 \int_E g(x) dx - \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k(x) - f(x)| dx \implies \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k(x) - f(x)| dx \leq 0,$$

因此  $f_k(x) \xrightarrow{L^1} f(x)$ , 从而

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \int_E f_k(x) dx - \int_E f(x) dx \right| \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k(x) - f(x)| dx = 0,$$

即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx. \quad \square$$

**习题 74** 设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的有界函数, 其不连续点集记为  $D$ . 若  $D$  只有可列个极限点, 试证明  $f(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ .

**证明** 由于  $D$  是  $F_\sigma$ -集 (见 PPT 5), 可设  $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ , 其中  $F_k \subset [a, b]$  为闭集. 为证  $m(D) = 0$ , 只需证  $m(F_k) = 0, \forall k$ . 若不然, 不妨设  $m(F_1) > 0$ , 由于  $F_1 \subset D$  只有可列个极限点,  $m(F_1') = 0$ , 从而  $m(F_1 \setminus F_1') > 0$ , 但这与  $F_1$  的孤立点集  $F_1 \setminus F_1'$  为可数集矛盾. 故  $m(D) = 0$ , 结合  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界即得  $f(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ .  $\square$

**习题 75** 设  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的有界函数. 若对于任意  $x \in \mathbb{R}$ , 极限  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h)$  存在, 试证明  $f(x)$  在任一区间  $[a, b]$  上是 Riemann 可积的.

**证明** 记  $f(x)$  的不连续点集为  $D$ , 由题设知  $D$  中的点均为可去间断点, 从而  $m(D) = 0$ . 结合  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界即知  $f(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ .  $\square$

**习题 76** 设  $E \subset [0, 1]$ , 试证明  $\mathbf{1}_E(x) \in \mathcal{R}([0, 1]) \iff m(\overline{E} \setminus E^\circ) = 0$ .

**证明** 由定义知  $\mathbf{1}_E$  的不连续点集恰为  $\partial E = \overline{E} \setminus E^\circ$ , 而  $\mathbf{1}_E(x)$  有界, 因此结论得证.  $\square$

**习题 77** 设  $f(x)$  是定义在  $[a, b]$  上的非负函数. 若  $f \notin \mathcal{L}^1([a, b])$ , 试问:  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有原函数吗?

**解答** 假设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有原函数  $F(x)$ , 则由  $F' = f$  非负知  $F$  在  $[a, b]$  上单调递增, 由 Lebesgue 定理,  $F \in \mathcal{W}^{1,1}([a, b])$  且  $\int_a^b |f(x)| dx \leq F(b) - F(a) < +\infty$ , 这与  $f \notin \mathcal{L}^1([a, b])$  矛盾. 故  $f(x)$  在  $[a, b]$  上无原函数.  $\square$

**习题 78** 设  $g(x)$  在  $[a, b]$  上有原函数  $G(x)$ ,  $F(x)$  在  $[a, b]$  上可微, 且  $F'(x) \geq 0$  ( $a \leq x \leq b$ ), 试证明  $h(x) = F(x)g(x)$  在  $[a, b]$  上有原函数.

**证明** 令  $H(x) = F(x)G(x) - \int_a^x G(t)F'(t) dt$ , 则

$$\frac{H(x+h) - H(x)}{h} = \frac{F(x+h)G(x+h) - F(x)G(x)}{h} - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} G(t)F'(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{F(x+h)[G(x+h) - G(x)] + G(x)[F(x+h) - F(x)]}{h} - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} G(t)F'(t) dt \\
&= F(x+h) \cdot \frac{G(x+h) - G(x)}{h} - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [G(t) - G(x)] \cdot F'(t) dt,
\end{aligned}$$

而

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(x+h) \cdot \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = F(x)g(x),$$

且由  $G(x)$  在  $[a, b]$  上一致连续可知, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $|h| < \delta$  时,  $|G(t) - G(x)| < \varepsilon, \forall t \in [x, x+h]$ , 因此由  $F'(t) \geq 0$  可得

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [G(t) - G(x)] \cdot F'(t) dt \right| \leq \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varepsilon F'(t) dt \right| \leq \varepsilon \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right| \xrightarrow{h \rightarrow 0} \varepsilon F'(x),$$

由  $\varepsilon > 0$  的任意性即知当  $h \rightarrow 0$  时上式  $\rightarrow 0$ . 故  $H'(x) = F(x)g(x), x \in [a, b]$ .  $\square$

**习题 79** 设  $\{x_n\} \subset [a, b]$ , 试作  $[a, b]$  上的递增函数, 其不连续点恰为  $\{x_n\}$ .

**解答**  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathbb{1}_{[x_n, b]}(x)$  在  $[a, b]$  上递增, 且在  $x_n$  处左右极限相差  $\frac{1}{2^n}$ .  $\square$

**习题 80** 设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的递增函数,  $E \subset (a, b)$ . 若对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $(a_i, b_i) \subset (a, b)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), 使得

$$\bigcup_i (a_i, b_i) \supset E, \quad \sum_i [f(b_i) - f(a_i)] < \varepsilon,$$

试证明  $f'(x) = 0$ , a.e.  $x \in E$ .

**证明** 由于  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调递增, 由 Lebesgue 微分定理,  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上几乎处处存在且有限, 从而  $f' \stackrel{\text{a.e.}}{\geq} 0$ . 由 Lebesgue 定理,

$$0 \leq \int_E f'(x) dx \leq \int_{\bigcup_i (a_i, b_i)} f'(x) dx \leq \sum_i \int_{a_i}^{b_i} f'(x) dx \leq \sum_i [f(b_i) - f(a_i)] < \varepsilon,$$

由  $\varepsilon > 0$  的任意性即知  $\int_E f'(x) dx = 0$ , 故  $f'(x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} 0$ .  $\square$

**习题 81** 若  $f(x) \in \text{AC}([a, b])$ , 且有

$$|f'(x)| \leq M, \quad \text{a.e. } x \in [a, b],$$

则

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \quad x, y \in [a, b].$$

**证明**  $|f(x) - f(y)| = \left| \int_x^y f'(t) dt \right| \leq \left| \int_x^y |f'(t)| dt \right| \leq M|x - y|$ .  $\square$

**习题 82** 设  $f_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 是  $[a, b]$  上递增的绝对连续函数列. 若  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  在  $[a, b]$  上收敛, 则其和函数在  $[a, b]$  上绝对连续.

**证明** 对任意  $\varepsilon > 0$ , 由于  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  在  $[a, b]$  上收敛, 存在正整数  $N$  使得

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(a) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(b) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由于  $f_n(x) \in AC([a, b])$ , 存在  $\delta_n > 0$ , 使得只要  $[a, b]$  中的不交区间列  $\{(a_i, b_i)\}$  满足  $\sum_i (b_i - a_i) < \delta_n$ , 就有

$$\sum_i |f(b_i) - f(a_i)| = \sum_i [f(b_i) - f(a_i)] < \frac{\varepsilon}{3N}.$$

取  $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_N\}$ , 则只要  $[a, b]$  中的不交区间列  $\{(a_i, b_i)\}$  满足  $\sum_i (b_i - a_i) < \delta$ , 就有

$$\begin{aligned} \sum_i \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(b_i) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a_i) \right| &= \sum_i \left[ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(b_i) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a_i) \right] \\ &= \sum_i \left( \sum_{n=1}^N [f_n(b_i) - f_n(a_i)] + \sum_{n=N+1}^{\infty} [f_n(b_i) - f_n(a_i)] \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_i [f_n(b_i) - f_n(a_i)] + \sum_{n=N+1}^{\infty} [f_n(b) - f_n(a)] \\ &\leq N \cdot \frac{\varepsilon}{3N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} [f_n(b) - f_n(a)] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(a) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(b) \right| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in AC([a, b])$ . □

**习题 83** 试证明  $f \in BV([a, b])$  当且仅当存在  $[a, b]$  上的递增函数  $F(x)$ , 使得

$$|f(x') - f(x'')| \leq F(x'') - F(x') \quad (a \leq x' < x'' \leq b).$$

**证明** ( $\Rightarrow$ ) 若  $f \in BV([a, b])$ , 则存在  $[a, b]$  上的递增函数  $f_1(x), f_2(x)$  使  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ . 令  $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , 则  $F(x)$  为  $[a, b]$  上的递增函数, 且对  $a \leq x' < x'' \leq b$ , 有

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &= |f_1(x') - f_1(x'') - [f_2(x') - f_2(x'')]| \leq |f_1(x') - f_1(x'')| + |f_2(x') - f_2(x'')| \\ &= F(x'') - F(x'). \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) 对任意分点  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , 有

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a) < +\infty \implies f \in BV([a, b]). \quad \square$$

**习题 84** 设  $f \in \text{BV}([a, b])$ . 若有  $\bigvee_a^b f = f(b) - f(a)$ , 试证明  $f(x)$  在  $[a, b]$  上递增.

**证明** 对任意分点  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ , 有

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \bigvee_a^b f \geq |f(b) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(a)| \\ &\geq [f(b) - f(x_2) + f(x_1) - f(a)] + |f(x_2) - f(x_1)| \\ &= f(b) - f(a) + |f(x_2) - f(x_1)| + [f(x_1) - f(x_2)] \\ &\geq f(b) - f(a). \end{aligned}$$

因此上面每一步均取等, 从而

$$f(b) - f(a) + |f(x_2) - f(x_1)| + [f(x_1) - f(x_2)] = f(b) - f(a) \iff f(x_2) - f(x_1) = |f(x_1) - f(x_2)|,$$

即  $f(x)$  在  $[a, b]$  上递增.  $\square$

**习题 85** 设  $E \subset [0, 1]$ . 若存在  $l \in (0, 1)$ , 使得对  $[0, 1]$  中的任一子区间  $[a, b]$ , 均有  $m(E \cap [a, b]) \geq l(b-a)$ , 试证明  $m(E) = 1$ .

**证明** 任取  $a \in (0, 1)$ , 由题设知, 对任意  $x \in [0, 1] \setminus \{a\}$ ,

$$\frac{1}{x-a} \int_a^x \mathbf{1}_E(t) dt \geq l.$$

而由微积分基本定理,  $\frac{d}{dx} \int_a^x \mathbf{1}_E(t) dt \stackrel{\text{a.e.}}{=} \mathbf{1}_E(x)$ , 因此在上式中令  $x \rightarrow a^+$  就有  $\mathbf{1}_E(x) \geq l > 0$ , a.e.  $x \in E$ , 也即  $\mathbf{1}_E(x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} 1$ , 故  $m(E) = 1$ .  $\square$

**习题 86** 对于  $[0, 1]$  上的 Dirichlet 函数  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ , 试问:  $[0, 1]$  中的 Lebesgue 点是什么?

**解答** 由于

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(t) - \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)| dt = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m([x, x+h] \setminus \mathbb{Q})}{h} = 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m([x, x+h] \cap \mathbb{Q})}{h} = 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

即  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$  在有理点的平均消没振荡为 1, 在无理点的平均消没振荡为 0, 因此  $[0, 1]$  中的 Lebesgue 点为  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .  $\square$

**习题 87** 设  $f(x)$  定义在  $[a, b]$  上. 若有

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|, \quad x, y \in [a, b],$$

则

$$|f'(x)| \leq M, \quad \text{a.e. } x \in [a, b].$$

**证明** 由条件, 只需证  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上几乎处处存在, 这得自  $\text{Lip}([a, b]) \subset \text{AC}([a, b]) \subset \text{W}^{1,1}([a, b])$ .  $\square$

**习题 88** 设  $f \in \text{BV}([0, 1])$ . 若对任意  $\varepsilon > 0$ ,  $f(x) \in \text{AC}([\varepsilon, 1])$ , 且  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 则  $f(x) \in \text{AC}([0, 1])$ .

**证明** 取点列  $\varepsilon_n \downarrow 0$ , 由微积分基本定理,

$$\int_0^x f'(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon_n}^x f'(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - f(\varepsilon_n)] = f(x) - f(0),$$

因此  $f'(x) \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ , 从而  $f(x) \in \text{AC}([0, 1])$ . □

**习题 89** 设  $f(x) \in \text{BV}([0, a])$ , 试证明函数

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad F(0) = 0$$

是  $[0, a]$  上的有界变差函数.

**证明** 由于  $f(x) \in \text{BV}([0, a])$ , 存在  $[0, a]$  上的递增函数  $f_1(x), f_2(x)$ , 使得  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ . 令

$$F_1(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f_1(t) dt, \quad F_2(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f_2(t) dt,$$

则对  $0 < x < y \leq a$ , 有

$$\begin{aligned} F_1(y) - F_1(x) &= \frac{1}{y} \int_x^y f_1(t) dt + \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \int_0^x f_1(t) dt \\ &\geq \frac{(y-x)f_1(x)}{y} + xf_1(x) \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) = 0, \end{aligned}$$

即  $F_1(x)$  是  $[0, a]$  上的递增函数. 同理可证  $F_2(x)$  是  $[0, a]$  上的递增函数. 故  $F(x) = F_1(x) - F_2(x) \in \text{BV}([0, a])$ . □

**习题 90** 设  $\{f_k(x)\}$  是  $[a, b]$  上的有界变差函数列, 且有

$$\begin{aligned} \bigvee_a^b f_k &\leq M \quad (k = 1, 2, \dots), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) &= f(x), \quad x \in [a, b], \end{aligned}$$

试证明  $f \in \text{BV}([a, b])$ , 且满足  $\bigvee_a^b f \leq M$ .

**证明** 任取  $[a, b]$  的分划  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , 有

$$\sum_{i=1}^n |f_k(x_i) - f_k(x_{i-1})| \leq \bigvee_a^b f_k \leq M,$$

在上式中令  $k \rightarrow \infty$ , 就得到

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M,$$

因此  $\bigvee_a^b f \leq M, f \in \text{BV}([a, b])$ . □

**习题 91** 设  $f \in \text{BV}([a, b])$ , 且点  $x_0 \in [a, b]$  是  $f(x)$  的连续点, 试证明  $\bigvee_a^x f$  在点  $x_0$  处连续.

**证明** 由于  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \delta) \subset [a, b].$$

由全变差的定义, 存在  $[x_0, x_0 + \delta]$  的分割  $x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x_0 + \delta$ , 使得

$$\bigvee_{x_0}^{x_0+\delta} f < \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned} \bigvee_{x_0}^{x_1} f &= \bigvee_{x_0}^{x_0+\delta} f - \bigvee_{x_1}^{x_0+\delta} f \leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2} - \sum_{i=2}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= |f(x_1) - f(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

因此

$$\bigvee_{x_0}^x f \leq \bigvee_{x_0}^{x_1} f < \varepsilon, \quad x_0 \leq x \leq x_1,$$

即  $\bigvee_a^x$  在  $x_0$  处右连续, 同理可证它在  $x_0$  处左连续. 故  $\bigvee_a^x f$  在点  $x_0$  处连续. □

**习题 92** 设  $m(E) < +\infty$ ,  $f(x) \in \mathcal{L}(E)$ ,  $0 < p_0 < +\infty$ , 则

$$\lim_{p \uparrow p_0} \int_E |f(x)|^p dx = \int_E |f(x)|^{p_0} dx.$$

**证明** 由 Levi 单调收敛定理及 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\begin{aligned} \lim_{p \uparrow p_0} \|f\|_p^p &= \lim_{p \uparrow p_0} \underbrace{\int_{[f(x)>1]} |f(x)|^p dx}_{\text{Levi 单调收敛定理}} + \lim_{p \uparrow p_0} \underbrace{\int_{[f(x)\leq 1]} |f(x)|^p dx}_{\text{Lebesgue 控制收敛定理}} \\ &= \int_{[f(x)>1]} |f(x)|^{p_0} dx + \int_{[f(x)\leq 1]} |f(x)|^{p_0} dx = \|f\|_{p_0}^{p_0}. \end{aligned} \quad \square$$

**习题 93** 设  $f(x), g(x) \in \mathcal{L}(E)$ , 且有

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}, \quad 1 \leq p < +\infty,$$

试证明  $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ .

**证明** 此时  $\frac{p}{r}$  与  $\frac{q}{r}$  为共轭指数, 由 Hölder 不等式,

$$\| |f|^r |g|^r \|_1 \leq \| |f|^r \|_{\frac{p}{r}} \| |g|^r \|_{\frac{q}{r}} \implies \|fg\|_r^r \leq \|f\|_p^r \cdot \|g\|_q^r \xrightarrow{r \geq 1} \|fg\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \quad \square$$

**习题 94** 设  $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$ ,  $w(x) > 0$ , 且  $\int_E w(x) dx = 1$ , 试证明

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left( \int_E |f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty.$$

**证明** 一方面,

$$\left( \int_E |f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_E \|f\|_\infty^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty,$$

令  $p \rightarrow \infty$  即知 LHS  $\leq$  RHS. 另一方面, 由本性上确界的定义, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在正测度子集  $F \subset E$ , 使得

$$|f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon, \quad \forall x \in F.$$

于是

$$\text{LHS} \geq \left( \int_F |f(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon) \left( \int_F w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \stackrel{p \geq 1}{\geq} \|f\|_\infty - \varepsilon,$$

令  $p \rightarrow \infty$ , 再令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  即得 LHS  $\geq$  RHS. 故结论得证.  $\square$

**习题 95** 设  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $g(x) \in \mathcal{L}(E)$ . 若对任意的  $f \in \mathcal{L}^2(E)$ , 有  $\|gf\|_2 \leq M\|f\|_2$ , 试证明  $|g(x)| \leq M$ , a.e.  $x \in E$ .

**证明** 不妨设  $M > 0$ . 令  $F_k = \{x \in E : |g(x)| > M + \frac{1}{k}\}$  ( $k \geq 1$ ), 取  $f_k(x) = \mathbf{1}_{F_k}(x) \in \mathcal{L}^2(E)$ , 若  $m(F_k) > 0$ , 则

$$\|gf_k\|_2^2 = \int_{F_k} |g(x)|^2 dx \geq (M + \frac{1}{k})^2 m(F_k) > (M\|f_k\|_2)^2,$$

与题设矛盾. 故  $m(F_k) = 0$  ( $\forall k \geq 1$ ), 从而

$$m(\{x \in E : |g(x)| > M\}) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = 0. \quad \square$$

**习题 96** 设  $f \in \mathcal{L}^2([0, 1])$ , 令

$$g(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{|x-t|^{\frac{1}{2}}} dt, \quad 0 < x < 1,$$

试证明

$$\left( \int_0^1 g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\sqrt{2} \left( \int_0^1 f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**证明** 注意到

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-t|^{\frac{1}{2}}} dt = \int_0^x \frac{1}{|x-t|^{\frac{1}{2}}} dt + \int_x^1 \frac{1}{|x-t|^{\frac{1}{2}}} dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt + \int_0^{1-x} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2(\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) \stackrel{*}{\leq} 2\sqrt{2},$$

这里  $*$  处用到了凸函数  $\sqrt{x}$  的 Jensen 不等式. 由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$g^2(x) = \left( \int_0^1 \frac{f(t)}{|x-t|^{\frac{1}{2}}} dt \right)^2 \leq \int_0^1 \left( \frac{1}{|x-t|^{\frac{1}{4}}} \right)^2 dt \int_0^1 \left( \frac{f(t)}{|x-t|^{\frac{1}{4}}} \right)^2 dt \leq 2\sqrt{2} \int_0^1 \left( \frac{f(t)}{|x-t|^{\frac{1}{4}}} \right)^2 dt,$$

进而

$$\int_0^1 g^2(x) dx \leq 2\sqrt{2} \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{f^2(t)}{|t-x|^{\frac{1}{2}}} dt \right) dx = 2\sqrt{2} \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{dx}{|x-t|^{\frac{1}{2}}} \right) f^2(t) dt \leq (2\sqrt{2})^2 \int_0^1 f^2(t) dt,$$

欲证已明.  $\square$

**习题 97** 试证明下列两个不等式是不能同时成立的:

$$(1) \int_0^\pi [f(x) - \sin x]^2 dx \leq \frac{4}{9}.$$

$$(2) \int_0^\pi [f(x) - \cos x]^2 dx \leq \frac{1}{9}.$$

**证明** 用反证法, 假设上述两个不等式均成立, 由 Minkowski 不等式,

$$\sqrt{\pi} = \left( \int_0^\pi (1 - \sin 2x) dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|\sin x - \cos x\|_2 \leq \|f(x) - \sin x\|_2 + \|f(x) - \cos x\|_2 \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1,$$

矛盾.  $\square$

**习题 98** 设  $f, g \in \mathcal{L}^3(E)$ , 且有

$$\|f\|_3 = \|g\|_3 = \int_E f^2(x)g(x) dx = 1,$$

试证明  $g(x) = |f(x)|$ , a.e.  $x \in E$ .

**证明** 由 Hölder 不等式,

$$1 = \int_E f^2(x)g(x) dx \leq \|f^2g\|_1 \leq \|f^2\|_{\frac{3}{2}} \cdot \|g\|_3 = \|f\|_3^2 \cdot \|g\|_3 = 1,$$

由于此时不等号均取等, 且由条件知  $g(x)$  不几乎处处为 0, 因此存在常数  $\lambda \geq 0$ , 使得

$$[f^2(x)]^{\frac{3}{2}} \stackrel{\text{a.e.}}{=} \lambda |g(x)|^3 \quad \text{即} \quad |f(x)|^3 \stackrel{\text{a.e.}}{=} \lambda |g(x)|^3,$$

由  $\|f\|_3 = \|g\|_3$  即知  $\lambda = 1$ , 进而  $|f(x)| \stackrel{\text{a.e.}}{=} |g(x)|$ . 由于

$$\int_E f^2(x)[|g(x)| - g(x)] dx = \int_E f^2(x)|g(x)| dx - \int_E f^2(x)g(x) dx = \int_E |f(x)|^3 dx - 1 = 0,$$

其中被积函数在  $E$  上非负, 因此  $f^2(x)[|g(x)| - g(x)] \stackrel{\text{a.e.}}{=} 0$  即  $g^2(x)[|g(x)| - g(x)] \stackrel{\text{a.e.}}{=} 0$ . 由此可见  $|g(x)| \stackrel{\text{a.e.}}{=} g(x)$ , 进而  $g(x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} |f(x)|$ .  $\square$

**习题 99** 设  $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{L}^2(E)$  是完全标准正交系, 试证明对  $f, g \in \mathcal{L}^2(E)$ , 有

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \langle g, \varphi_k \rangle.$$

**证明** 令  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x)$ , 则  $S_n(x) \xrightarrow{L^2} f(x)$ , 因此对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时,

$\|S_n - f\|_2 < \varepsilon$ . 由  $\langle S_n - f, g \rangle \leq \|S_n - f\|_2 \cdot \|g\|_2 \leq \varepsilon \|g\|_2$  可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle S_n - f, g \rangle = 0$ , 即

$$\langle f, g \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k, g \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \langle \varphi_k, g \rangle. \quad \square$$

**练习 1** 设  $E \subset \mathbb{R}^n$  是可测集, 则  $\lim_{h \rightarrow 0} m(E \cap (h + E)) = m(E)$ .

**证明** (1) 若  $m(E) < +\infty$ , 则  $\mathbf{1}_E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , 从而

$$\begin{aligned} |m(E \cap (h + E)) - m(E)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{E \cap (h + E)} dm - \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_E dm \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{1}_E \mathbf{1}_{h+E} - \mathbf{1}_E| dm \\ &\leq \|\mathbf{1}_{h+E} - \mathbf{1}_E\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{\text{积分平均连续性}} 0. \end{aligned}$$

(2) 若  $m(E) = +\infty$ , 令  $E_k = E \cap \mathbb{B}(0, k)$ , 则  $E_k \uparrow E$ , 由测度的从下方连续性即知  $\lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = m(E)$ . 由 (1) 有

$$\liminf_{h \rightarrow 0} m(E \cap (h + E)) \geq \liminf_{h \rightarrow 0} m(E_k \cap (h + E_k)) = m(E_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} m(E) = +\infty,$$

因此  $\lim_{h \rightarrow 0} m(E \cap (h + E)) = +\infty = m(E)$ . □

**练习 2** 设  $\mathbb{R} \ni \lambda_n \rightarrow +\infty$ ,  $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \lambda_n x \text{ 存在且有限} \right\}$ . 证明:  $m(A) = 0$ .

**证明** 由习题 10 可知  $A$  可测. 将极限函数零扩充为  $\mathbb{R}$  上函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_A(x) \sin \lambda_n x$ . 对任意有界可测集  $E$ , 由于  $|f(x)| \leq \mathbf{1}_E(x) \in \mathcal{L}^1(E)$ , 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\int_E f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \mathbf{1}_A(x) \sin \lambda_n x dx \xrightarrow[\text{PPT 20}]{\text{Riemann-Lebesgue 引理}} 0.$$

由 Lebesgue 点定理 (PPT 25) 可得

$$f(x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = 0.$$

对任意有界可测集  $E$ , 再次运用 Lebesgue 控制收敛定理与 Riemann-Lebesgue 引理, 有

$$0 = \int_E f^2(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \cap A} \sin^2 \lambda_n x dx = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \cap A} [1 - \cos(2\lambda_n x)] dx = \frac{1}{2} m(E \cap A).$$

于是

$$m(A) = m\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]\right) = 0. \quad \square$$

**练习 3** 设  $f_k, f \in \mathcal{L}^1(E)$ ,  $f_k \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ , 则  $f_k \xrightarrow{L^1} f$  当且仅当  $\|f_k\|_{\mathcal{L}^1(E)} \rightarrow \|f\|_{\mathcal{L}^1(E)}$ .

**证明** ( $\Rightarrow$ ) 由  $|\|f_k\|_{\mathcal{L}^1(E)} - \|f\|_{\mathcal{L}^1(E)}| \leq \|f_k - f\|_{\mathcal{L}^1(E)}$  即得.

( $\Leftarrow$ ) 由于  $f \in \mathcal{L}^1(E)$ , 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $A \subset E$  与  $\delta > 0$ , 使得

$$m(A) < +\infty, \quad \int_{A^c} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_C |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall C \subset E : m(C) < \delta.$$

由 Egorov 定理, 在  $A$  上  $f_k \xrightarrow{\text{a.un.}} f$ , 即存在  $B_0 \subset A$ , 使得  $m(A \setminus B_0) < \delta$ , 且在  $B_0$  上  $f_k \Rightarrow f$ . 于是

$$\int_E |f(x)| dx = \int_{A^c} |f(x)| dx + \int_{A \setminus B_0} |f(x)| dx + \int_{B_0} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \int_{B_0} |f(x)| dx,$$

结合  $f_k \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ , 由 Fatou 引理,

$$\begin{aligned} \int_E |f(x)| dx &< \varepsilon + \int_{B_0} |f(x)| dx \leq \varepsilon + \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{B_0} |f_k(x)| dx \\ &= \varepsilon + \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( \int_E |f_k(x)| dx - \int_{E \setminus B_0} |f_k(x)| dx \right) \\ &= \varepsilon + \int_E |f(x)| dx - \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{E \setminus B_0} |f_k(x)| dx. \end{aligned}$$

由此可得

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{E \setminus B_0} |f_k(x)| dx < \varepsilon.$$

故

$$\begin{aligned} \|f_k - f\|_{\mathcal{L}^1(E)} &\leq \int_{E \setminus B_0} |f_k(x)| dx + \int_{E \setminus B_0} |f(x)| dx + \int_{B_0} |f_k(x) - f(x)| dx \\ &= \int_{E \setminus B_0} |f_k(x)| dx + \underbrace{\int_{A^c} |f(x)| dx}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\int_{A \setminus B_0} |f(x)| dx}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \int_{B_0} |f_k(x) - f(x)| dx, \end{aligned}$$

两边同取上极限得

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_{\mathcal{L}^1(E)} \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + 0 = 2\varepsilon,$$

因此  $\|f_k - f\|_{\mathcal{L}^1(E)} \rightarrow 0$  即  $f_k \xrightarrow{L^1} f$ . □

**练习 4** 设  $a_n > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < +\infty$ ,  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} 0$ .

**证明** 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(a_n x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty,$$

由逐项积分定理,  $\sum_{n=1}^{\infty} |f(a_n x)| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , 进而  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} 0$ . □

**练习 5** 设  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $m(E) < +\infty$ ,  $f_n \in \mathcal{L}^1(E)$ ,  $f_n \Rightarrow f$ , 则  $f \in \mathcal{L}^1(E)$  且  $\int_E f_n(x) dx \rightarrow \int_E f(x) dx$ . 若  $m(E) = +\infty$ , 结论是否成立?

**证明** 由于  $f_n \Rightarrow f$ , 不妨设  $|f_1(x) - f(x)| < 1, \forall x \in E$ , 则  $|f(x)| < |f_1(x)| + 1 \in \mathcal{L}^1(E)$ , 由 Lebesgue 控

制收敛定理知  $f \in \mathcal{L}^1(E)$ . 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时,  $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{m(E)}, \forall x \in E$ , 因此

$$\left| \int_E [f(x) - f_n(x)] dx \right| \leq \int_E |f(x) - f_n(x)| dx < \varepsilon, \quad \forall n > N,$$

因此  $\int_E f_n(x) dx \rightarrow \int_E f(x) dx$ . 若  $m(E) = +\infty$ , 有反例  $f_n(x) = \frac{1}{2^n} \mathbf{1}_{(0, 2^n]}(x)$ . □

**练习 6** 设  $f \in \mathcal{L}^+(E)$ ,  $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  单调递增且内闭绝对连续,  $\varphi(0) = 0$ , 则

$$\int_E \varphi(f(x)) dx = \int_0^{+\infty} m(\{x \in E : f(x) > t\}) \varphi'(t) dt.$$

**证明** 先说明 RHS 中被积函数可积:  $m(\{f(x) > t\})$  关于  $t$  单调递减, 是有界变差函数;  $\varphi(t)$  是单调递增函数, 也是有界变差函数. 有界变差函数在 Sobolev 空间中, 因此  $m(\{f(x) > t\})\varphi'(t) \in \mathcal{L}^+(E)$ , 其积分有意义 (可能为  $+\infty$ ).

由于  $\varphi(x)$  在  $[0, +\infty)$  上内闭绝对连续, 由微积分基本定理,

$$\varphi(a) = \int_0^a \varphi'(t) dt, \quad \forall a \in [0, +\infty).$$

因此

$$\varphi(f(x)) = \int_0^{f(x)} \varphi'(t) dt = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{[0, f(x)]}(t) \varphi'(t) dt.$$

由非负可测函数的 Fubini 定理,

$$\begin{aligned} \int_E \varphi(f(x)) dx &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x) \left( \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{[0, f(x)]}(t) \varphi'(t) dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi'(t) \left( \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_E(x) \mathbf{1}_{[f(x) > t]} dx \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} m(\{x \in E : f(x) > t\}) \varphi'(t) dt. \end{aligned} \quad \square$$

**练习 7** 设  $E \subset [a, b]$ ,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  在  $E$  上可导,  $|f'(x)| \leq M, \forall x \in E$ , 则  $m^*(f(E)) \leq Mm^*(E)$ .

**证明** 固定  $\varepsilon > 0$ , 考虑集合

$$E_n = \left\{ x \in E : |f(y) - f(x)| \leq (M + \varepsilon)|y - x|, \forall y \in [a, b] \cap \mathbb{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) \right\},$$

则  $E_n \uparrow E$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} m^*(E_n) = m^*(E)$ . 利用边长一致有界的开矩体构造的外测度 (PPT 6), 可设

$$E_n \setminus \{a, b\} \subset \bigcup_{k=1}^n I_{n,k}, \quad \text{开区间 } I_{n,k} \subset (a, b),$$

其中

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(I_{n,k}) < m^*(E_n) + \varepsilon, \quad m(I_{n,k}) < \frac{1}{n}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

对任意  $s, t \in E_n \cap I_{n,k}$ , 有

$$|f(s) - f(t)| \leq (M + \varepsilon)|s - t| \leq (M + \varepsilon)m(I_{n,k}).$$

因此

$$\begin{aligned} m^*(f(E_n)) &= m^*\left(f\left(E_n \cap \bigcup_{k=1}^n I_{n,k}\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(f(E_n \cap I_{n,k})) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{diam}(f(E_n \cap I_{n,k})) \\ &\leq (M + \varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} m(I_{n,k}) \leq (M + \varepsilon)[m^*(E_n) + \varepsilon], \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow \infty$  即得

$$m(f(E)) \leq (M + \varepsilon)[m(E) + \varepsilon],$$

再令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  即完成证明.  $\square$

**练习 8** 设  $f \in \mathcal{L}([a, b])$ ,  $E \subset [a, b]$  可测,  $f$  在  $E$  上可导, 则  $m^*(f(E)) \leq \int_E |f'(x)| dx$ .

**证明** 固定  $\varepsilon > 0$ , 考虑集合

$$E_n = \{x \in E : (n-1)\varepsilon \leq |f'(x)| < n\varepsilon\},$$

则  $E_n$  是可测集, 由练习 7 结论 (导数是伸缩率),

$$m^*(f(E_n)) \leq n\varepsilon m^*(E_n) = (n-1)\varepsilon m^*(E_n) + \varepsilon m^*(E_n) \leq \int_{E_n} |f'(x)| dx + \varepsilon m^*(E_n).$$

由

$$f(E) = f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(E_n)$$

可得

$$m^*(f(E)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(f(E_n)) = \int_E |f'(x)| dx + \varepsilon m(E),$$

注意到  $m(E) \leq |b-a| < +\infty$ , 令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  即完成证明.  $\square$

**练习 9** 设  $f \in \mathcal{C}([a, b]) \cap \mathcal{W}^{1,1}([a, b])$ , 除了一个至多可数集外  $f'$  存在且有限, 则  $f \in \text{AC}([a, b])$ . 若仅要求  $A$  是零测集结论是否成立?

**证明** 令  $A = \{x \in [a, b] : f'(x) \text{ 不存在}\}$ , 则  $A$  为至多可数集. 对任意  $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ , 由连续函数的保连通性质 (介值定理) 及练习 8 结论,

$$\begin{aligned} |f(\beta) - f(\alpha)| &\leq m(f([\alpha, \beta])) = m(f((\alpha, \beta))) \stackrel{A \text{ 至多可数}}{=} m(f((\alpha, \beta) \setminus A)) \\ &\leq \int_{(\alpha, \beta) \setminus A} |f'(x)| dx = \int_{(\alpha, \beta)} |f'(x)| dx. \end{aligned}$$

由于  $f \in \mathcal{W}^{1,1}([a, b])$ , 由积分的绝对连续性, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 只要  $m\left(\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i)\right) < \delta$ , 就有

$$\int_{\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i)} |f'(x)| dx < \varepsilon \implies \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

这说明  $f \in \text{AC}([a, b])$ . 若仅要求  $A$  是零测集, Cantor 函数即为反例, 它是单调递增的连续函数, 但不是

绝对连续函数 (因为微积分基本定理不成立). □

**练习 10** 设  $f$  在  $[a, b]$  上可导,  $f' \in \mathcal{L}^1([a, b])$ , 则微积分基本定理成立:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

**证明** 注意到  $f$  满足练习 9 中的条件, 因此  $f \in \text{AC}([a, b])$ , 微积分基本定理成立. □

**练习 11** 设  $f, g \in \text{AC}([a, b])$ , 则分部积分公式成立:

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

**证明** 由于  $f, g \in \text{AC}([a, b]) \subset \mathcal{C}([a, b])$ , 可设  $|f(x)|, |g(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$ . 因此对任意  $x, y \in [a, b]$ , 有

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq |f(x)[g(x) - g(y)]| + |g(y)[f(x) - f(y)]| \leq M(|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|),$$

进而由  $f, g \in \text{AC}([a, b])$  可知  $fg \in \text{AC}([a, b])$ . 又  $f \in \text{AC}([a, b]) \subset \mathcal{W}^{1,1}([a, b])$ , 因此  $f' \in \mathcal{L}^1([a, b])$ , 结合  $g$  在  $[a, b]$  上有界可知  $f'g \in \mathcal{L}^1([a, b])$ . 同理  $fg' \in \mathcal{L}^1([a, b])$ . 余下来自绝对连续函数的微积分基本定理. □

**练习 12** 设  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ ,  $g \in \mathcal{L}^1([a, b]) \cap \mathcal{L}^+([a, b])$ , 则存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

**证明** 设  $f$  在  $[a, b]$  上的最大值为  $M$ , 最小值为  $m$ , 由  $g(x) \geq 0$  可得

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

进而

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

若  $\int_a^b g(x) dx = 0$ , 则上式中不等号均取等, 结论成立. 若  $\int_a^b g(x) dx > 0$ , 则

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M,$$

由连续函数的介值定理, 存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \implies \int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

□

**练习 13** 设  $f \in \text{AC}([a, b])$ , 则对任意零测集  $Z \subset [a, b]$ , 有  $m(f(Z)) = 0$ .

**证明** 由于  $Z \subset [a, b]$  为零测集, 对任意  $\delta > 0$ , 存在开集  $G$ , 使得

$$Z \setminus \{a, b\} \subset G \subset (a, b), \quad m(G) < \delta.$$

由一维开集结构定理, 可设  $G = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ . 对每个  $i$ , 由于  $f \in \mathcal{C}([a_i, b_i])$ , 存在  $c_i, d_i \in [a_i, b_i]$ , 使得  $f([a_i, b_i]) = [f(c_i), f(d_i)]$ . 于是

$$\begin{aligned} m^*(f(Z)) &= m^*(f(Z \setminus \{a, b\})) \leq m^*\left(f\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)\right)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(f([a_i, b_i])) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} m^*([f(c_i), f(d_i)]) = \sum_{i=1}^{\infty} |f(d_i) - f(c_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_{c_i}^{d_i} f'(x) \, dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{c_i}^{d_i} |f'(x)| \, dx \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{a_i}^{b_i} |f'(x)| \, dx = \int_G |f'(x)| \, dx. \end{aligned}$$

由积分的绝对连续性, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 当  $\delta$  充分小时, 由于  $m(G) < \delta$ , 有

$$m^*(f(Z)) \leq \int_G |f'(x)| \, dx < \varepsilon.$$

由  $\varepsilon > 0$  的任意性即得  $m(f(Z)) = 0$ . □

**PPT 2**

- ◇ Zorn 引理.
- ◇ 集合的势.

**PPT 3**

- ◇ Cantor-Bernstein 定理.
- ◇ 无最大势定理.
- ◇ 几个势运算结论.
- ◇  $(a, b)$  上的凸函数除去一个可数集外可微.
- ◇ 存在不可测集.
- ◇ 任意正测集包含不可测子集.

**PPT 4**

- ◇ 三等分 Cantor 集.
- ◇ Cantor 函数.
- ◇ 推广的 Cantor 集.

**PPT 5**

- ◇ Baire 纲定理.
- ◇ Borel  $\sigma$ -代数的势.
- ◇ Lebesgue  $\sigma$ -代数的势.
- ◇ 全体 Lebesgue 不可测集的势.
- ◇ 函数连续点的结构.
- ◇ 连续函数可微点的结构.
- ◇ 有理数集不是  $G_\delta$ -集.
- ◇ 下半连续函数在某个非空开集上有上界.

**PPT 6**

- ◇ Lebesgue 外测度的定义.
- ◇ 抽象外测度的定义.
- ◇ 抽象测度的定义.
- ◇ Carathéodory 测度扩张定理.
- ◇ 由边长一致有界开矩体构造的外测度.
- ◇ 距离外测度.
- ◇ Lindelöf 可数覆盖定理.
- ◇ Borel 集是 Lebesgue 可测集.

**PPT 7**

- ◇ 抽象测度的性质 (积分观点).
- ◇ Borel-Cantelli 引理.
- ◇ Lebesgue 测度的正则性.
- ◇ 等测核和等测包 (完备化定理).
- ◇ 测度空间完备化.
- ◇ Lebesgue 可测集的唯一刻画.

**PPT 8**

- ◇ Lebesgue 可测集与开集、闭集的关系.
- ◇ 测度的平移不变性.
- ◇ 外测度等测包.
- ◇ 外测度的性质 (由外测度等测包导出).
- ◇ 密度定理.
- ◇ Steinhaus 定理.
- ◇  $\mathcal{C} - \mathcal{C} = [-1, 1]$ .

**PPT 9**

- ◇  $[0, 1]$  同胚但可测集的原像不可测.
- ◇ 零测的非 Borel 集.
- ◇ 函数可测性关于代数、极限运算封闭.
- ◇ 广义实值可测函数类关于几乎处处收敛封闭.
- ◇ 可测性是局部性质.
- ◇ 绝对可测但不可测.
- ◇ 可测函数关于不可数取上确界不封闭.
- ◇ 可测函数的复合不可测.

**PPT 10**

- ◇ 非负可测函数结构.
- ◇ 可测函数结构.
- ◇ 简单函数一致逼近非负有界可测函数.
- ◇ 三种收敛及其等价刻画.
- ◇ Egorov 定理.
- ◇ Riesz 定理.
- ◇ 依测度收敛当且仅当存在子列几乎一致收敛.
- ◇ 依测度收敛但不几乎处处收敛.

**PPT 11**

- ◇ 依测度 Cauchy 等价于依测度收敛.
- ◇ Lusin 定理 (四步走).
- ◇ 可测函数 = 连续函数在几乎处处意义下的极限.

**PPT 12**

- ◇ 积分的良好性.
- ◇ 积分的等价定义.

**PPT 13**

- ◇ 零测集不影响积分存在性、可积性、积分值.
- ◇ 可积函数几乎处处有限.
- ◇ Levi 单调收敛定理 (正反向).
- ◇ Fatou 引理.
- ◇ Lebesgue 控制收敛定理.

**PPT 14**

- ◇ 逐项积分定理.
- ◇ 关于积分限的  $\sigma$ -可加性.
- ◇ 含参变量积分连续性.
- ◇ 含参变量积分可导性.
- ◇ 连续版本的 Lebesgue 控制收敛定理.
- ◇ Borel-Cantelli 引理新视角.

**PPT 15**

- ◇ 推广的 Levi 单调收敛定理 (递增):  $f_1^- \in \mathcal{L}^+(E) \cap \mathcal{L}^1(E)$  (证明时要对  $f_1^+$  是否可积分类讨论).
- ◇ 推广的 Levi 单调收敛定理 (递减):  $f_1^+ \in \mathcal{L}^+(E) \cap \mathcal{L}^1(E)$ .
- ◇ 推广的 Fatou 引理 (下极限):  $\left(\inf_n f_n\right)^- \in \mathcal{L}^+(E) \cap \mathcal{L}^1(E)$  (要用到推广的 Levi 单调收敛定理).
- ◇ 推广的 Fatou 引理 (上极限):  $\left(\sup_n f_n\right)^- \in \mathcal{L}^+(E) \cap \mathcal{L}^1(E)$ .
- ◇ (一定条件下)  $L^1$  收敛与交换积分次序的等价性 (用 Fatou 引理的不等式产生等式).
- ◇ 推广的 Lebesgue 控制收敛定理:  $f_n \xrightarrow{m} f$ .
- ◇ 控制条件下依测度收敛蕴含  $L^1$  收敛 (反证法, 结合 Riesz 定理与 DCT).
- ◇ 利用函数列控制的 Lebesgue 控制收敛定理 (比较判别法).

**PPT 16**

- ◇ 在  $\infty$  的充分小邻域上积分值亦充分小.
- ◇ 在充分小测度集上积分值亦充分小 (常用其  $\varepsilon$ - $\delta$  语言) (反证法 + Borel-Cantelli 引理).
- ◇ Chebyshev 不等式.
- ◇ 一致可积的定义及其等价定义 (总在有限测度集上谈论).
- ◇ 控制可积蕴含一致可积.
- ◇ 具有一致可积条件的推广的 Fatou 引理.
- ◇ 推广的 Lebesgue 控制收敛定理:  $L^1$  收敛当且仅当依测度收敛且一致可积 (用 Chebyshev 不等式证明  $L^1$  收敛蕴含依测度收敛).
- ◇ Vitali 收敛定理.

**PPT 17**

- ◇ Radon 测度/正则 Borel 测度.
- ◇ Lusin 定理与 Egorov 定理.
- ◇ Dirac 测度的积分:  $\int_X f d\delta_x = f(x), \forall f \in \mathcal{L}(X)$ .

**PPT 18**

- ◇ 测度的绝对连续性的定义与判别法.
- ◇ Radon-Nikodym 定理.
- ◇ 加权计数测度.
- ◇ 凸函数积分刻画与 Jensen 不等式.
- ◇ 函数蛋糕表示  $f(x) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{f^{-1}(t, +\infty)} dt$  及其与积分蛋糕表示的关系.
- ◇ 非负可测函数的重整: 将函数蛋糕表示中的特征函数 (集合) 进行对称重整.
- ◇ 函数重整的单调性 (源自集合重整特性)、保序性、保范性 (Fubini 定理)、距离不增性.

**PPT 19**

- ◇ 函数的 Hahn-Jordan 分解.
- ◇ 符号测度.
- ◇ 全变差测度:  $|\nu|(E) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |\nu(E_k)| : E = \bigsqcup_{k=1}^n E_k \right\}$ .
- ◇  $\nu$  是符号测度,  $m$  是正测度, 则  $\nu \ll m \iff |\nu| \ll m$ .
- ◇ 复测度、复测度的全变差测度.
- ◇ 奇异测度, 例子: Lebesgue 测度  $\perp$  Dirac 测度.
- ◇ 测度  $\nu$  关于测度  $m$  的 Radon-Nikodym 导数  $h = \frac{d\nu}{dm}$ .
- ◇ Lebesgue 分解定理.
- ◇  $\sigma$ -有限测度的分解.

**PPT 20**

- ◇ 紧支光滑函数在  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  中稠密  $\iff$  若  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ , 则存在紧支光滑函数列  $f_k \xrightarrow[\text{a.e.}]{L^1} f$ .
- ◇  $L^1$  可积函数的“好 + 小”分解.
- ◇ 积分的平均连续性: 设  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ , 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(x+h) - f(x)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)} = 0$  (利用“好 + 小”分解).
- ◇ 紧支阶梯函数在  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  中稠密.
- ◇ Riemann-Lebesgue 引理 (利用阶梯函数 + “小”).
- ◇ Lebesgue 积分是 Riemann 积分的推广.
- ◇ 绝对收敛的广义 Riemann 积分可视为 Lebesgue 积分: 设  $f \in \mathcal{R}([0, b]), \forall b > 0$ , 则

$$f \in \mathcal{L}^1([0, +\infty)) \iff |f| \in \mathcal{R}([0, +\infty)) \iff \begin{cases} f \in \mathcal{R}([0, +\infty)), \\ |f| \in \mathcal{R}([0, +\infty)) \end{cases}.$$

- ◇ 广义 Riemann 可积但不 Lebesgue 可积的例子 (条件收敛但不绝对收敛级数).

**PPT 21**

- ◇ Fubini-Tonelli 定理.
- ◇ Tonelli 定理验证可积性, Fubini 定理计算积分值.

**PPT 22**

- ◇ 抽象积分的 Fubini-Tonelli 定理.
- ◇ 乘积测度空间:  $\Gamma_{X \times Y}$  是  $\Gamma_X \times \Gamma_Y$  生成的最小  $\sigma$ -代数.
- ◇ 抽象积分是高维测度.
- ◇ Vitali 覆盖定理.

**PPT 23**

- ◇ 分布函数的积分表示:  $f_*(t) = \int_E \mathbf{1}_{U(f)}(x, t) dx$ , 其中  $U(f)$  表示  $|f|$  的图形下方.
- ◇  $L^p$  积分的蛋糕表示:  $\int_E |f(x)|^p dx = \int_0^{+\infty} pt^{p-1} f_*(t) dt$ .
- ◇ Lebesgue 微分定理: 单调函数几乎处处可导.
- ◇ Lebesgue 定理 (微积分基本定理变成不等式).

**PPT 24**

- ◇ Fubini 逐项微分定理: 每个  $f_n$  都是增函数.
- ◇ 严格单调递增但导函数几乎处处为 0 的例子.
- ◇ 有界变差函数类.
- ◇  $AC([a, b]) \subsetneq BV([a, b]) \subsetneq W^{1,1}([a, b])$  的证明及例子.
- ◇ 单调递增函数的全变差.
- ◇  $\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f, \forall c \in (a, b)$ .
- ◇ 有界变差函数的 Jordan 分解定理.
- ◇ 设  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ , 则  $\bigvee_a^b f = \bigvee_a^b |f|$ .
- ◇ Stieltjes 测度.
- ◇ 经过规则化的有界变差函数可视为测度:  $\mathcal{C}([0, 1])^* = BV_0([a, b])$ .

**PPT 25**

- ◇ Lebesgue 积分框架下微积分基本定理 (重点:  $0 \mapsto 0$  情形的证明).
- ◇ 已知积分可恢复函数: 若  $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$ , 则  $f(x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} \left( \int_a^x f(t) dt \right)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$ .
- ◇ Lebesgue 点定理 (freezing 技巧).
- ◇ 设  $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$  与任意多项式正交, 则  $f \stackrel{\text{a.e.}}{=} 0$ .

**PPT 26**

- ◇ 设  $f \in \mathcal{W}^{1,1}([a, b])$ , 则  $f \in \text{AC}([a, b])$  当且仅当  $\int_a^b |f'(t)| dt < \infty$ .
- ◇  $\mathcal{L}^\infty([a, b])$  框架下的微积分基本定理 (注意  $\text{Lip}([a, b]) \subset \text{AC}([a, b]) \subset \mathcal{W}^{1,1}([a, b])$ ).
- ◇  $x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}$  系列.
- ◇ “绝对连续函数  $\circ$  连续可微函数  $\neq$  绝对连续函数” 的例子.
- ◇ Lipschitz 函数  $\circ$  绝对连续函数 = 绝对连续函数.
- ◇ 逐项微分 Fubini 定理 (3 个条件).

**PPT 27**

- ◇ 若干习题.

**PPT 28**

- ◇  $L^\infty$  空间的范数是本性上确界:

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(E)} &= \inf_{m(Z)=0} \sup_{x \in E \setminus Z} |f(x)| = \inf \left\{ M > 0 : |f(x)| \stackrel{\text{a.e.}}{\leq} M \right\} \\ &= \sup \{ M > 0 : m\{x \in E : |f(x)| > M\} > 0 \}. \end{aligned}$$

- ◇ Hölder 不等式.
- ◇ Minkowski 不等式.
- ◇ Chebyshev 不等式.
- ◇ 四种收敛.
- ◇  $L^p$  空间 ( $p \in [1, \infty]$ ) 是完备赋范线性空间 (Banach 空间).
- ◇ 另一个 Minkowski 不等式.
- ◇ 几个不等式例题.

**PPT 29**

- ◇  $L^p$  空间 ( $p \in [1, \infty)$ ) 的可分性 (有可数稠密子集).
- ◇  $L^\infty$  空间不可分.
- ◇ 赋范空间  $(\mathcal{R}([a, b]), \|\cdot\|_2)$  不完备, 其完备化即  $\mathcal{L}^2([a, b])$ .
- ◇ 设  $E \subset \mathbb{R}^n$  可测, 则  $\mathcal{L}^2(E)$  是 Hilbert 空间.
- ◇ Fourier 分析.
- ◇ 对偶空间.