数学分析 A3 作业

林晓烁

https://xiaoshuo-lin.github.io

2024 年 1 月 29 日

目录

第十四章　数项级数

§14.1　无穷级数的基本性质

练习 (14.1.6(2)(4)) 证明下列级数发散：

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{3n^2-2}$；

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

证明 (2) 由 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\frac{n^2+1}{3n^2-2}\right|=\frac{1}{3}\neq 0$ 可知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{3n^2-2}$ 发散.

(4) 由 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)\xlongequal[x=\frac{1}{n}]{\text{L'Hospital 法则}}\exp\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}\neq 0$ 可知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ 发散. □

练习 (14.1.7) 设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 证明：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 也收敛. 试举例说明其逆命题不成立. 但若 $a_n>0$，则逆命题也成立，试证之.

证明 由定理 14.1.5，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ 收敛，再由定理 14.1.2 即得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 收敛.

逆命题不成立的例子：取 $a_n=(-1)^n$，则 $a_n+a_{n+1}=0$，$\forall n$，但 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散.

若 $a_n>0$，由定理 14.1.5，从 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 收敛可得 $a_1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 收敛. 再由 $a_n>0$ 及定理 14.1.4、定理 14.1.3 得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2a_n$ 收敛. 由定理 14.1.2 得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot 2a_n$ 收敛. □

练习 (14.1.8) 设数列 $\{na_n\}$ 与级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 都收敛. 证明：级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

证明 由

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n&=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[n-(n-1)\right]a_n=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}na_n-\sum_{n=1}^{N}(n-1)a_n\right)\\&=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}na_n-\sum_{n=1}^{N-1}na_{n+1}\right)=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N-1}n(a_n-a_{n+1})+Na_N\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})+\lim_{N\to\infty}Na_N\end{aligned}$$

即知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. □

§14.2　正项级数的比较判别法

练习 (14.2.2(1)(3)(5)(7)(9)) 用比较判别法讨论下列级数的敛散性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+5}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2}{3n^2+1}\right)^n$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n(n+2)}$；

(7) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$；

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^{1/(n^2+1)}-1\right)$.

解 (1) 因为 $\dfrac{1}{3n^2+5}<\dfrac{1}{3n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n^2+5}$ 也收敛.

(3) 因为 $\left(\dfrac{n^2}{3n^2+1}\right)^n<\dfrac{1}{3^n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2}{3n^2+1}\right)^n$ 也收敛.

(5) 因为 $\dfrac{n+1}{n(n+2)}>\dfrac{n+1}{(n+1)^2}=\dfrac{1}{n+1}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n(n+2)}$ 也发散.

(7) 对于充分大的 n，$\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{(\ln\ln n)^2}}>\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln n}}=\dfrac{1}{n}$，而 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$ 也发散.

(9) 由 $n^{1/(n^2+1)}-1=\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1\sim\dfrac{\ln n}{n^2+1}$ $(n\to\infty)$ 及 $\dfrac{\frac{\ln n}{n^2+1}}{n^{-\frac{3}{2}}}\sim\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\to 0$ $(n\to\infty)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^{1/(n^2+1)}-1\right)$ 收敛. □

练习 (14.2.8) 问 p,q 取何值时，级数

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$$

收敛？

解 由 Cauchy 积分判别法，此级数与积分

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}\,\mathrm{d}x=\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{t^p(\ln t)^q}\,\mathrm{d}t$$

同敛散.

① 若 $p=1$，则由

$$\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{t(\ln t)^q}\,\mathrm{d}t=\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{u^q}\,\mathrm{d}u$$

知当 $q>1$ 时级数收敛，而当 $q\leqslant 1$ 时级数发散.

② 若 $p>1$，设 $p=\alpha+\varepsilon$，其中 $\alpha>1$，$\varepsilon>0$，则对充分大的 t 有 $t^{\varepsilon}(\ln t)^q>1$，从而

$$\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\frac{1}{t^{\alpha}(t^{\varepsilon}(\ln t)^q)}<\frac{1}{t^{\alpha}},$$

由 $\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\dfrac{1}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ 收敛得 $\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\dfrac{1}{t^p(\ln t)^q}\,\mathrm{d}t$ 收敛，从而级数收敛.

③ 若 $p<1$，设 $p=\alpha-\varepsilon$，其中 $\alpha<1$，$\varepsilon>0$，则对充分大的 t 有 $\dfrac{t^{\varepsilon}}{(\ln t)^q}>1$，从而

$$\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\frac{t^{\varepsilon}}{t^{\alpha}(\ln t)^q}>\frac{1}{t^{\alpha}},$$

由 $\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\dfrac{1}{t^p(\ln t)^q}\,\mathrm{d}t$ 发散得 $\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\dfrac{1}{t^p(\ln t)^q}\,\mathrm{d}t$ 发散，从而级数发散. □

练习 (14.2.12) 设 $a_n>0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$，$\alpha>0$，$\beta>0$ 且 $\alpha+\beta>1$. 证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^{\alpha}}{n^{\beta}}<+\infty.$$

证明 ① 当 $0<\alpha<1$ 时，$\dfrac{\beta}{1-\alpha}>1$. 令 $\alpha=\dfrac{1}{p}$，$1-\alpha=\dfrac{1}{q}$，则对共轭指数 p,q 用 Young 不等式有

$$\frac{a_n^{\alpha}}{n^{\beta}}=\frac{a_n^{\frac{1}{p}}}{\left(n^{\frac{\beta}{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{a_n}{p}+\frac{1}{q}n^{-\frac{\beta}{1-\alpha}}=\alpha a_n+\frac{1-\alpha}{n^{\frac{\beta}{1-\alpha}}}.$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-\alpha}{n^{\frac{\beta}{1-\alpha}}}$ 均收敛可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n^{\alpha}}{n^{\beta}}$ 收敛.

② 当 $\alpha\geqslant1$ 时，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，即对充分大的 n 有 $a_n\in(0,1)$ 且 $n^{\beta}>1$，此时 $0<a_n^{\alpha}\leqslant a_n$，从而 $0<\dfrac{a_n^{\alpha}}{n^{\beta}}\leqslant a_n^{\alpha}\leqslant a_n$，故由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n^{\alpha}}{n^{\beta}}$ 收敛. □

§14.3　正项级数的其他判别法

练习 (14.3.1(1)(3)(5)(7)) 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5}{3^n}\left(\sqrt{3}+(-1)^n\right)^n$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+(1/n)}}{(n+1/n)^n}$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-4}{3n+1}\right)^n$.

解 (1) 因为 $\sqrt[n]{n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}\sim\sqrt[n]{\dfrac{n\pi}{2^{n+1}}}=\dfrac{1}{2}\sqrt[n]{\dfrac{n\pi}{2}}\to\dfrac{1}{2}<1\ (n\to\infty)$，所以由 Cauchy 判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ 收敛.

(3) 因为 $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^5}{3^n}\left(\sqrt{3}+(-1)^n\right)^n}=\limsup\limits_{n\to\infty}\left[n\sqrt[n]{n^5}\dfrac{\sqrt{3}+(-1)^n}{3}\right]=\dfrac{\sqrt{3}+1}{3}<1$,所以由 Cauchy 判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5}{3^n}\left(\sqrt{3}+(-1)^n\right)^n$ 收敛.

(5) 因为 $\dfrac{n^{n+(1/n)}}{(n+1/n)^n}=\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}=\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}}\to1\ (n\to\infty)$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+(1/n)}}{(n+1/n)^n}$ 发散.

(7) 因为 $\sqrt[n]{\left(\dfrac{n-4}{3n+1}\right)^n}=\dfrac{n-4}{3n+1}\to\dfrac{1}{3}\ (n\to\infty)$，所以由 Cauchy 判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-4}{3n+1}\right)^n$ 收敛. □

练习 (14.3.2(2)) 利用 Raabe 判别法，讨论下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}\quad(p>0,q>0).$$

解 因为

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left[\frac{(n+1)^{p-1}(q+n+1)}{n^p}-1\right]=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p-1}-1}{\frac{1}{n}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p-1}(q+1)\to p+q,\quad n\to\infty,$$

所以当 $p+q>1$ 时级数收敛，当 $p+q<1$ 时级数发散. 当 $p+q=1$ 时，因为

$$\begin{aligned} n\ln n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1-\frac{1}{n}\right)&=\ln n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-q}(q+n+1)-n-1\right]\\ &=\ln n\left[\left(1-\frac{q}{n}+\frac{q(q+1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)(q+n+1)-n-1\right]\\ &=\ln n\left[\frac{q(q+1)^2}{2n^2}-\frac{q(q+1)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\ &=0,\quad n\to\infty, \end{aligned}$$

所以

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right),\quad n\to\infty.$$

由 Gauss 判别法得此时级数发散.

综上，当 $p+q>1$ 时级数收敛，当 $p+q\leqslant 1$ 时级数发散. □

§14.4　任意项级数

练习 (14.4.1(3)(4)) 利用 Cauchy 收敛原理，讨论下列级数的敛散性：

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n!}{n(n+1)}$；

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos n+b\sin n}{n(n+\sin n!)}$.

解 (3) 对任意 $\varepsilon>0$，取 $N=\left\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor$，则当 $k>N$ 时，对任意 $p\in\mathbb{N}^*$，有

$$\left|\sum_{n=k}^{k+p}\frac{\cos n!}{n(n+1)}\right|\leqslant\sum_{n=k}^{k+p}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+p+1}<\frac{1}{k}<\frac{1}{N}<\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛原理知级数收敛.

(4) 对任意 $\varepsilon>0$，取 $N=\left\lfloor\frac{|a|+|b|}{\varepsilon}\right\rfloor+2$，则当 $k>N$ 时，对任意 $p\in\mathbb{N}^*$，有

$$\left|\sum_{n=k}^{k+p}\frac{a\cos n+b\sin n}{n(n+\sin n!)}\right|\leqslant\sum_{n=k}^{k+p}\frac{|a|+|b|}{n(n-1)}=\frac{|a|+|b|}{k-1}-\frac{|a|+|b|}{k+p}<\frac{|a|+|b|}{k-1}<\frac{|a|+|b|}{N-1}<\varepsilon.$$

□

练习 (14.4.5(2)(4)) 讨论下列级数的敛散性：

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$；

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

证明 (2) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 知 $\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right|\to 1\neq 0\ (n\to\infty)$，因此数列发散.

(4) 当 $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$ 时，因为数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 单调趋于 0，且 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \sin nx = \left|\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$ 有界，所以由 Dirichlet 判别法知级数收敛. 当 $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$ 时，通项均为 0，级数仍收敛. □

练习 (14.4.8) 设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0.$$

证明 设 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$. 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{nS_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} S_k}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} S_k}{n}$$
$$\xlongequal{\text{Stolz 定理}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0.$$

□

练习 (14.4.11(2)) 讨论下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{\sin nx}{n}.$$

解 设 $b_k = \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}}{k}$. 先说明 $b_k > b_{k+1}$. 只需证

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n} \cdot \frac{n+1}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}} > 1,$$

即只需证

$$1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} > \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}},$$

而这由

$$\frac{1}{n} > \frac{\frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}$$

即可得. 再由 Stolz 定理，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$. 因此 $\{b_k\}$ 单调趋于 0.

① 当 $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$ 时，因为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \sin nx = \left|\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$，由 Dirichlet 判别法即得数列收敛.

② 当 $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$ 时，数列通项均为 0，级数收敛. □

练习 (14.4.12) 设 $a_n > 0$. 证明：如果

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lambda > 0,$$

那么交错级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.

证明 由所给条件可知当 n 充分大时，$\{a_n\}$ 为递减数列，故可不妨设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 就是递减数列. 因为

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0,$$

所以存在 $N_1\in\mathbb{N}$，使得当 $n>N_1$ 时，$n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>\dfrac{\lambda}{2}$，即 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}>1+\dfrac{\lambda}{2n}$. 又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\lambda}{4}}-1}{\frac{1}{n}}=\frac{\lambda}{4},$$

所以存在 $N_2\in\mathbb{N}$，使得当 $n>N_2$ 时，$\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\lambda}{4}}-1}{\frac{1}{n}}<\dfrac{\lambda}{2}$，即 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{\lambda}{4}}<1+\dfrac{\lambda}{2n}$.

设 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{\lambda}{4}}.$$

于是

$$\frac{a_N}{a_n}>\left(\frac{n}{N}\right)^{\frac{\lambda}{4}},\quad \forall n>N,$$

即

$$0<a_n<\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{\lambda}{4}}a_N\to 0,\quad n\to\infty.$$

因此 $\{a_n\}$ 是趋于 0 的递减数列. 由 Leibniz 判别法知交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛. □

§14.5　绝对收敛和条件收敛

练习 (14.5.1(2)(4)(6)) 在下列级数中，哪些是绝对收敛的？哪些是条件收敛的？

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cos nx$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}\dfrac{n^{10}}{a^n}\ (a>1)$;

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$.

解 (2) 因为 $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cos nx\right|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cos nx$ 绝对收敛.

(4) 由 $a>1$ 知对充分大的 n 有 $a^n>n^{12}$，此时 $\left|(-1)^{n(n-1)/2}\dfrac{n^{10}}{a^n}\right|=\dfrac{n^{10}}{a^n}<\dfrac{1}{n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}\dfrac{n^{10}}{a^n}$ 绝对收敛.

(6) 因为数列 $\left\{\dfrac{1}{\ln n}\right\}_{n=2}^{\infty}$ 单调趋于 0，部分和序列 $\left\{\sum\limits_{k=2}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{4}\right\}$ $(n=2,3,\cdots)$ 有界 $1+\sqrt{2}$，所以由 Dirichlet 判别法知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$ 收敛. 再由 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\ln n}\right|\geqslant\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{(8n-6)\pi}{4}}{\ln(8n-6)}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(8n-6)}\geqslant\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{8n-7}=+\infty$ 知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$ 条件收敛. □

练习 (14.5.2(2)(3)(4)) 讨论下列级数的绝对收敛性和条件收敛性：

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n^p}$；

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$；

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n^{1/n}-1\right)$.

解 (2) ① 若 $p\leqslant 0$，则通项 $(-1)^n\dfrac{\cos 2n}{n^p}$ 不趋于 0，级数发散.

② 若 $0<p\leqslant 1$，注意到 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2+\pi)n}{n^p}$，由部分和序列 $\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(2+\pi)k\right\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 有界及数列 $\left\{\dfrac{1}{n^p}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 单调趋于 0，根据 Dirichlet 判别法知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n^p}$ 收敛. 下证它不绝对收敛，即 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos 2n|}{n^p}=+\infty$. 只需证 $p=1$ 时 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos 2n|}{n}=+\infty$，这是因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos 2n|}{n}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 2n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4n+1}{2n},$$

而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4n}{2n}$ 收敛，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散. 故级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n^p}$ 条件收敛.

③ 若 $p>1$，则取 $\varepsilon>0$ 使得 $p>1+\varepsilon$，由 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos 2n|}{n^p}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}<+\infty$ 知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n^p}$ 绝对收敛.

(3) 数列 $\left\{\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减趋于 0，由 Leibniz 判别法知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ 收敛. 由于

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n&=\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\exp\left(n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)=\exp\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=\mathrm{e}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\mathrm{e}\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right),\quad n\to\infty,\end{aligned}$$

此级数通项的绝对值

$$\left|\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right|=\frac{\mathrm{e}}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\to\infty.$$

而级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较判别法知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ 发散，即级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ 条件收敛.

(4) 当 n 充分大时，数列 $\left\{n^{1/n}-1\right\}$ 单调递减趋于 0，由 Leibniz 判别法知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n^{1/n}-1\right)$ 收敛. 而

$$\left|n^{1/n}-1\right|=\sqrt[n]{n}-1=\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}-1=\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right),\quad n\to\infty,$$

由 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$ 知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|n^{1/n}-1\right|$ 发散，即级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n^{1/n}-1\right)$ 条件收敛. □

练习 (14.5.5) 把级数

$$1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}-\frac{1}{6^\alpha}+\cdots\quad(0<\alpha<1)$$

的项重新安排如下：先依次取 p 个正项，接着依次取 q 个负项，再接着依次取 p 个正项，如此继续下去. 证明：所得的新级数收敛的充分必要条件为 $p=q$；当 $p>q$ 时，新级数发散到 $+\infty$，当 $p<q$ 时，新级数发散到 $-\infty$.

证明 设重排之后的新级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. 对任意给定的正整数 N，记 $m=\left\lfloor \dfrac{N}{p+q}\right\rfloor$，则当 $N\to\infty$ 时，有 $m\to\infty$，且

$$m(p+q)\leqslant N<(m+1)(p+q).$$

把级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和写成

$$\sum_{n=1}^{N} a_n=\sum_{n=1}^{m(p+q)} a_n+\sum_{n=m(p+q)+1}^{N} a_n.$$

因为 $N-m(p+q)<p+q$，所以上式中第二个和式求和项不超过 $p+q$ 项，从而当 $N\to\infty$ 时，有

$$\left|\sum_{n=m(p+q)+1}^{N} a_n\right|\leqslant \sum_{n=m(p+q)+1}^{N} |a_n|\leqslant \frac{p+q}{[m(p+q)]^{\alpha}}\to 0.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m(p+q)} a_n=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{(2n-1)^{\alpha}}-\sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{(2n)^{\alpha}}\right).$$

设 $f(x)=\dfrac{1}{(2x-1)^{\alpha}}$，$g(x)=\dfrac{1}{(2x)^{\alpha}}$. 则由 Euler-Maclaurin 求和公式得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{(2n-1)^{\alpha}}&=\sum_{n=1}^{mp} f(n)=\int_1^{mp} f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{f(1)+f(mp)}{2}+\int_1^{mp}\widetilde{B}_1(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{(2mp-1)^{1-\alpha}-1}{2(1-\alpha)}+\frac{1+\frac{1}{(2mp-1)^{\alpha}}}{2}+\int_1^{mp}\widetilde{B}_1(x)f'(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{(2n)^{\alpha}}&=\sum_{n=1}^{mq} g(n)=\int_1^{mq} g(x)\,\mathrm{d}x+\frac{g(1)+g(mq)}{2}+\int_1^{mq}\widetilde{B}_1(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{(2mq)^{1-\alpha}-2^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}+\frac{\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{(2mq)^{\alpha}}}{2}+\int_1^{mq}\widetilde{B}_1(x)g'(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{B}_1(x)$ 是第一个 Bernoulli 多项式 $B_1(x)=x-\dfrac{1}{2}$ 在 $[0,1)$ 上的限制函数在 $\mathbb{R}$ 上以 1 为周期的延拓. 由于 $f'(x)=\dfrac{-2\alpha}{(2x-1)^{\alpha+1}}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增趋于 0，且对任意 $x>1$，积分 $\displaystyle\int_1^x \widetilde{B}_1(s)\,\mathrm{d}s$ 存在且有界，根据广义积分的 Dirichlet 判别法即得广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\widetilde{B}_1(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 同理可知 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\widetilde{B}_1(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 又有 $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{(2mp-1)^{\alpha}}=0$ 与 $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{(2mq)^{\alpha}}=0$. 因此，为判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性，只需分析极限

$$\lim_{m\to\infty}\left[(2mp-1)^{1-\alpha}-(2mq)^{1-\alpha}\right].$$

设 $h(x)=x^{1-\alpha}$，则 $h'(x)=\dfrac{1-\alpha}{x^{\alpha}}$. 由有限增量公式，存在 $2mp-1$ 与 $2mq$ 之间的数 ξ，使得

$$(2mp-1)^{1-\alpha}-(2mq)^{1-\alpha}=h(2mp-1)-h(2mq)=(2mp-2mq-1)h'(\xi).$$

- 若 $p=q$，则当 $m\to\infty$ 时，$\xi\to\infty$，上式等于 $-h'(\xi)=\dfrac{\alpha-1}{\xi^{\alpha}}\to 0$. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

- 若 $p>q$，则当 $m\to\infty$ 时，上式可放缩为

$$(2mp-2mq-1)h'(\xi)\geqslant(2mp-2mq-1)h'(2mq)\geqslant\frac{2mp-2mq-1}{(2mq)^\alpha}$$
$$\geqslant\frac{2(p-q)m^{1-\alpha}}{(2q)^\alpha}\to+\infty,\quad m\to\infty.$$

故此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$.

- 若 $p<q$，则当 $m\to\infty$ 时，上式可放缩为

$$(2mp-2mq-1)h'(\xi)\leqslant(2mp-2mq-1)h'(2mp-1)\leqslant\frac{2m(p-q)(1-\alpha)}{(2mp)^\alpha}$$
$$=\frac{2(p-q)(1-\alpha)m^{1-\alpha}}{(2p)^\alpha}\to-\infty,\quad m\to\infty.$$

故此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=-\infty$. □

§14.6　级数的乘法

问题 (14.6.1) 证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^\alpha},\quad\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^\beta}\quad(\alpha>0,\beta>0)$$

的 Cauchy 乘积当 $\alpha+\beta>1$ 时收敛，当 $\alpha+\beta\leqslant1$ 时发散.

证明 由 Leibniz 判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^\alpha}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^\beta}$ 均收敛，设它们的和分别为 A 与 B. 记 $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n^\alpha}$，$b_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n^\beta}$，$c_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}=(-1)^{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha(n+1-k)^\beta}$.

当 $\alpha+\beta\leqslant1$ 时，对充分大的 n，有

$$|c_n|=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha(n+1-k)^\beta}\geqslant\frac{n}{n^\alpha(n+1-1)^\beta}=n^{1-(\alpha+\beta)}\geqslant1,$$

故 Cauchy 乘积 $\sum\limits_{n=1}^{c_n}$ 发散.

当 $\alpha+\beta>1$ 时，先证明 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$.

$$|c_n|=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha(n+1-k)^\beta}=\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{1}{k^\alpha(n+1-k)^\beta}+\sum_{k=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}^{n}\frac{1}{k^\alpha(n+1-k)^\beta},$$

因为当 $1\leqslant k\leqslant\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 时，$n+1-k\geqslant\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$，所以

$$|c_n|\leqslant\frac{1}{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^\beta}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}+\frac{1}{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\beta}.$$

当 $\beta\neq1$ 时，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\beta}\sim\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x^\beta}=\frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{n^{\beta-1}}-1\right),$$

当 $\beta=1$ 时，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n,\quad n\to\infty.$$

因此存在常数 $M>0$，使得

$$\frac{1}{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^{\beta}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}\leqslant\begin{cases}\dfrac{M}{n^{\alpha+\beta-1}}, & \alpha\neq 1,\\ \dfrac{M}{n^{\beta}}\ln n, & \alpha=1,\end{cases}$$

$$\frac{1}{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\beta}}\leqslant\begin{cases}\dfrac{M}{n^{\alpha+\beta-1}}, & \beta\neq 1,\\ \dfrac{M}{n^{\alpha}}\ln n, & \beta=1.\end{cases}$$

由 $\alpha>0,\beta>0,\alpha+\beta-1>0$ 即知 $\lim\limits_{n\to\infty}|c_n|=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$.

下证 Cauchy 乘积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛. 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k$. 由

$$\begin{aligned}c_{2n}&=-\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^{\alpha}(2n+1-k)^{\beta}}\\&=-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}(2n+1-k)^{\beta}}+\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^{\alpha}(2n+1-k)^{\beta}}\right)\\&=-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}(2n+1-k)^{\beta}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\beta}(2n+1-k)^{\alpha}}\right),\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}c_{2n+1}&=\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k^{\alpha}(2n+2-k)^{\beta}}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}(2n+2-k)^{\beta}}+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{k^{\alpha}(2n+2-k)^{\beta}}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}(2n+2-k)^{\beta}}+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^{\beta}(2n+2-k)^{\alpha}},\end{aligned}$$

两式相加得

$$\begin{aligned}|c_{2n}+c_{2n+1}|=&\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}\left(\frac{1}{(2n+1-k)^{\beta}}-\frac{1}{(2n+2-k)^{\beta}}\right)\right.\\&\left.+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\beta}}\left(\frac{1}{(2n+1-k)^{\alpha}}-\frac{1}{(2n+2-k)^{\alpha}}\right)-\frac{1}{(n+1)^{\alpha+\beta}}\right|\\\leqslant&\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^{\alpha}}\left(\frac{1}{(2n+1-k)^{\beta}}-\frac{1}{(2n+2-k)^{\beta}}\right)+\frac{1}{k^{\beta}}\left(\frac{1}{(2n+1-k)^{\alpha}}-\frac{1}{(2n+2-k)^{\alpha}}\right)\right]\\&+\frac{1}{(n+1)^{\alpha+\beta}}.\end{aligned}$$

易知当 $\gamma>0$ 时，函数 $\dfrac{1}{x^{\gamma}}-\dfrac{1}{(x+1)^{\gamma}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递减，于是

$$\frac{1}{(2n+1-k)^{\gamma}}-\frac{1}{(2n+2-k)^{\gamma}}<\frac{1}{(n+1)^{\gamma}}+\frac{1}{(n+2)^{\gamma}}.$$

故

$$|c_{2n}+c_{2n+1}|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}\left(\frac{1}{(n+1)^{\beta}}-\frac{1}{(n+2)^{\beta}}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\beta}}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}-\frac{1}{(n+2)^{\alpha}}\right)+\frac{1}{(n+1)^{\alpha+\beta}}.$$

由有限增量公式，存在 $\xi\in(n+1,n+2)$，使得

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}-\frac{1}{(n+2)^{\alpha}}=\frac{\alpha}{\xi^{\alpha+1}}\sim\frac{1}{n^{\alpha+1}},\quad n\to\infty.$$

因此存在常数 $M'>0$，使得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}\left(\frac{1}{(n+1)^{\beta}}-\frac{1}{(n+2)^{\beta}}\right)\leqslant\begin{cases}\dfrac{M'}{n^{\alpha+\beta}}, & \alpha\neq 1,\\ \dfrac{M'\ln n}{n^{\beta+1}}, & \alpha=1,\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\beta}}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}-\frac{1}{(n+2)^{\alpha}}\right)\leqslant\begin{cases}\dfrac{M'}{n^{\alpha+\beta}}, & \beta\neq 1,\\ \dfrac{M'\ln n}{n^{\alpha+1}}, & \beta=1,\end{cases}$$

由此及 $\alpha+\beta>1$，$\alpha+1>1$ 得 $S_{2n+1}=c_1+(c_2+c_3)+\cdots+(c_{2n}+c_{2n+1})$ 收敛，又 $S_{2n+2}=S_{2n+1}+c_{2n+2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_{2n+2}=0$，故 S_n 收敛. □

§14.7　无穷乘积

补充题 1 设 $\Gamma(x):=\dfrac{1}{x}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}}{1+\frac{x}{n}}$，$x\neq 0,-1,-2,\cdots$. 证明：

(1) $\Gamma(x)$ 有意义；

(2) $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!n^{x}}{x(x+1)\cdots(x+n)}$；

(3) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$；

(4) $\Gamma(1-x)\Gamma(x)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

证明 (1) 从

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}}{1+\frac{x}{n}}=1+\frac{x(x-1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

可知此无穷乘积绝对收敛，因此 $\Gamma(x)$ 的上述定义是有意义的.

(2) 写出上述无穷乘积的部分乘积

$$\frac{(n+1)^{x}}{x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{x}\cdot\frac{n!n^{x}}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

就得到

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{x}}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

(3) 由 (2) 公式可得

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x+n+1}=x,$$

即

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x).$$

(4) 在定义中将 x 换成 $-x$ 并利用 (3) 公式，得到

$$\Gamma(1-x)=-x\Gamma(-x)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x}}{1-\frac{x}{n}},$$

再利用正弦函数的无穷乘积公式

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

在其中将 x 换为 πx，就得到

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{x^2}{n^2}}=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

□

第十五章　函数项级数

§15.1　问题的提出

练习 (15.1(3)(6)) 求下列函数项级数的收敛点集：

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x(x+n)}{n}\right)^n$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^ny^n}{x^n+y^n}$ $(x>0,y>0)$.

解 (3) 因为 $\left(\dfrac{x(x+n)}{n}\right)^n=x^n\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$，而 $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\to\mathrm{e}^x$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x(x+n)}{n}\right)^n$ 收敛当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$，即 $x\in(-1,1)$.

(6) 因为

$$\frac{\min\{x^n,y^n\}}{2}=\frac{x^ny^n}{2\max\{x^n,y^n\}}\leqslant\frac{x^ny^n}{x^n+y^n}\leqslant\frac{x^ny^n}{\max\{x^n,y^n\}}=\min\{x^n,y^n\},$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^ny^n}{x^n+y^n}$ $(x>0,y>0)$ 与 $\min\{x^n,y^n\}$ 同敛散，故收敛点集为 $\{(x,y)\mid x\in(0,1)$ 或 $y\in(0,1)\}$. □

问题 (15.1.1) 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上收敛于 $S(x)$. 如果 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是 $[a,b]$ 上的非负连续函数，证明：$S(x)$ 必在 $[a,b]$ 上取到最小值.

证明 记 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$，则 $0\leqslant S_n(x)\leqslant S_{n+1}(x)\leqslant S(x)$，因此集合 $\{S(x)\mid x\in[a,b]\}$ 有下确界 α. 由下确界的定义，对任意 $n\in\mathbb{N}$，存在 $x_n\in[a,b]$，使得 $S(x_n)\in\left[\alpha,\alpha+\dfrac{1}{n}\right)$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}S(x_n)=\alpha$. 又因为 $x_n\in[a,b]$，由 Bolzano-Weierstrass 引理，存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 $x_0\in[a,b]$. 对任意 $m\in\mathbb{N}$，有

$$S_m\left(x_{n_k}\right)\leqslant S\left(x_{n_k}\right)<\alpha+\frac{1}{n_k},$$

令 $k\to\infty$，由于 $S_m(x)$ 在 x_0 处连续，可得 $S_m(x_0)\leqslant\alpha$. 再令 $m\to\infty$ 可得 $S(x_0)\leqslant\alpha$. 结合 α 的定义即得 $S(x_0)=\alpha$. 故 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可取到最小值. □

问题 (15.1.2) 第 1 题中的 $S(x)$ 是否一定能取到最大值？

解 不一定，反例如下. 设

$$f_n(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1-\dfrac{1}{n},\\(1-n)(x-1), & 1-\dfrac{1}{n}<x\leqslant 1,\end{cases}\quad n\geqslant 1,$$

并规定 $f_0(x)\equiv 0$. 取 $u_n(x)=f_n(x)-f_{n-1}(x)$，则

$$S(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\0, & x=1.\end{cases}$$

故 $S(x)$ 在 $[0,1]$ 上取不到最大值. □

问题 (15.1.3) 把第 1 题中的有界闭区间换成开区间或无穷区间，结论是否还成立？

解 不成立，反例如下.

① 设 $u_n(x)=x^{n-1}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(0,1)$ 上收敛于 $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$，$S(x)$ 在 $(0,1)$ 上取不到最小值.

② 设 $f_n(x)=\begin{cases}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n, & n\geqslant 1,\\ 0, & n=0.\end{cases}$ 取 $u_n(x)=f_n(x)-f_{n-1}(x)$，则 $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上取不到最小值.【若要求在 $(-\infty,+\infty)$ 上，可取 $u_n(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & n=1,\\ 0, & n\geqslant 2.\end{cases}$】 □

§15.2 一致收敛

练习 (15.2.1) 研究下列函数列在指定区间上的一致收敛性：

(1) $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}$：(a) $0<x<+\infty$；(b) $0<\lambda<x<+\infty$.

(2) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$：(a) $0\leqslant x\leqslant 1-\lambda$；(b) $1-\lambda\leqslant x\leqslant 1+\lambda$；(c) $1+\lambda\leqslant x<+\infty$ $(\lambda>0)$.

(3) $f_n(x)=\mathrm{e}^{-(x-n)^2}$：(a) $-l<x<l$ $(l>0)$；(b) $-\infty<x<+\infty$.

解 (1) 当 $n\to\infty$ 时，$f_n(x)\to f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x\neq 0.\end{cases}$

(a) 因为对任意 n 都有 $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}$，所以 $\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|\geqslant\dfrac{1}{2}$，故 $\{f_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

(b) 因为 $\sup\limits_{x\in(\lambda,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{x\in(\lambda,+\infty)}\dfrac{1}{1+nx}<\dfrac{1}{1+n\lambda}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(\lambda,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=0$，故 $\{f_n(x)\}$ 在 $(\lambda,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) 当 $n\to\infty$ 时，$f_n(x)\to f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1),\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,\\ 1, & x\in(1,+\infty).\end{cases}$

(a) 对任意的 $n\in\mathbb{N}$，$f_n(x)=1-\dfrac{1}{1+x^n}$ 在 $[0,1)$ 上单调递增，因此 $|f_n(x)-f(x)|=f(x)\leqslant f(1-\lambda)=1-\dfrac{1}{1+(1-\lambda)^n}$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,1-\lambda]}|f_n(x)-f(x)|=0$，故 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1-\lambda]$ 上一致收敛.

(b) 对充分大的 n，$2^{\frac{1}{n}}\in[1-\lambda,1+\lambda]$，而 $f\left(2^{\frac{1}{n}}\right)=\dfrac{2}{3}$，所以 $\sup\limits_{x\in[1-\lambda,1+\lambda]}|f_n(x)-f(x)|\geqslant\dfrac{1}{6}$，故 $\{f_n(x)\}$ 在 $[1-\lambda,1+\lambda]$ 上不一致收敛.

(c) 对 $x\in[1+\lambda,+\infty)$，$|f_n(x)-f(x)|=\dfrac{1}{1+x^n}\leqslant\dfrac{1}{1+(1+\lambda)^n}$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[1+\lambda,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=0$，故 $\{f_n(x)\}$ 在 $[1+\lambda,+\infty)$ 上一致收敛.

(3) 当 $n\to\infty$ 时，$f_n(x)\to f(x)\equiv 0$.

(a) 对 $x\in(-l,l)$，当 $n>l$ 时，$|f_n(x)-f(x)|=\mathrm{e}^{-(x-n)^2}<\mathrm{e}^{-(l-n)^2}$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(-l,l)}|f_n(x)-f(x)|=0$，故 $\{f_n(x)\}$ 在 $(-l,l)$ 上一致收敛.

(b) 因为对任意 n 都有 $f_n(n)=1$，所以 $\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|\geqslant 1$，故 $\{f_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛. □

练习 (15.2.2(4)(5)(6)(7)) 研究下列级数在指定区间上的一致收敛性：

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$，$(-\infty,+\infty)$；

(5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$，$(-l,l)$ $(l>0)$；

(6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$，$[0,2\pi]$；

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$，$(0,+\infty)$.

解 (4) 因为 $\left|\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$,而级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛,所以由 Weierstrass 判别法得级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛.

(5) 因为 $\left|\ln\left(1+\dfrac{x}{n\ln^2 n}\right)\right|\leqslant-\ln\left(1-\dfrac{l}{n\ln^2 n}\right)\sim\dfrac{l}{n\ln^2 n}$ $(n\to\infty)$，而由 Cauchy 积分判别法可知级数 $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ 收敛，所以由 Weierstrass 判别法得级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$ 在区间 $(-l,l)$ $(l>0)$ 上一致收敛.

(6) 对任意 $x\in[0,2\pi]$，$\left|\dfrac{1}{n+\sin x}\right|\leqslant\dfrac{1}{n-1}$，故数列 $\left\{\dfrac{1}{n+\sin x}\right\}_{n=2}^{\infty}$ 一致单调递减趋于 0，又级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n$ 的部分和一致有界 1，所以由 Dirichlet 判别法知级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上一致收敛.

(7) 记 $u_n(x)=2^n\sin\dfrac{1}{3^n x}$，则对任意正整数 n，$u_n\left(\dfrac{2}{3^n\pi}\right)=2^n>1$，因此 $u_n(x)\not\rightrightarrows 0$. 由 Cauchy 收敛原理知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛. □

练习 (15.2.7) 设 $\{u_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数列. 证明：如果 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 内的每一点收敛，但 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(b)$ 发散，那么 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 上不一致收敛.

证明 若 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 上一致收敛，由 Cauchy 收敛原理，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得对任意 $n>N$ 与 $p\in\mathbb{N}$，有 $\left|\displaystyle\sum_{k=n}^{n+p}u_k(x)\right|<\varepsilon$. 由 $u_k(x)$ 的连续性，令 $x\to b^-$ 就有 $\left|\displaystyle\sum_{k=n}^{n+p}u_k(b)\right|\leqslant\varepsilon$. 这说明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(b)$ 收敛，与已知矛盾. 故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 上不一致收敛. □

练习 (15.2.11) 证明：函数列

$$f_n(x)=xn^{-x}(\ln n)^{\alpha}\quad(n=1,2,\cdots)$$

在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛的充分必要条件是 $\alpha<1$.

证明 当 $n\to\infty$ 时，$f_n(x)\to f(x)\equiv 0$. 因为 $f_n'(x)=\dfrac{1-x\ln n}{n^x}\cdot(\ln n)^{\alpha}$，所以 $f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值为 $f\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)=\dfrac{(\ln n)^{\alpha-1}}{n^{\frac{1}{\ln n}}}=\dfrac{(\ln n)^{\alpha-1}}{\mathrm{e}}$. 于是 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)\iff\dfrac{(\ln n)^{\alpha-1}}{\mathrm{e}}\to 0\iff\alpha<1$. □

问题 (15.2.1) 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$$

在区间 $[0,\delta]$ 和 $[\delta,+\infty)$ 上的一致收敛性，其中 $\delta>0$.

解 记 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{kx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+kx)}$，则当 $n\geqslant 2$ 时，

$$\begin{aligned}S_n(x)&=\frac{x}{1+x}+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+(k-1)x)}-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+kx)}\right]\\&=1-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}.\end{aligned}$$

因此当 $n\to\infty$ 时，$S_n(x)\to S(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$

当 $x>0$ 时，$|S_n(x)-S(x)|=\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$. 令 $x\to 0^+$，则 $|S_n(x)-S(x)|\to 1\neq 0$，因此级数在 $[0,\delta]$ 上不一致收敛.

当 $x\in[\delta,+\infty)$ 时，

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\leqslant\frac{1}{(1+\delta)(1+2\delta)\cdots(1+n\delta)}<\frac{1}{1+n\delta},$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[\delta,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=0$，故级数在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛. □

补充题 2 设 $f(x)\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$. 令

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right).$$

试证：$\{f_n(x)\}$ 在任何有限闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛.

证明 由 $f(x)\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ 知 $f(x)\in\mathcal{R}([a,b+1])$. 由 Riemann 积分的定义知

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\int_x^{x+1}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t,\quad \forall x\in[a,b].$$

因此

$$\begin{aligned}\left|f_n(x)-\int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t\right|&=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f\left(x+\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t-\int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t\right|\\&=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left[f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+t)\right]\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left|f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+t)\right|\mathrm{d}t\\&\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\sup_{t\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]}\left|f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+t)\right|\\&\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\omega_k(x),\end{aligned}$$

其中 $\omega_k(x):=\sup\limits_{s,t\in\left[x+\frac{k}{n},x+\frac{k+1}{n}\right]}|f(s)-f(t)|$ 是 $f(x)$ 在区间 $\left[x+\frac{k}{n},x+\frac{k+1}{n}\right]$ 上的振幅. 记 π_x 为将区间 $[x,x+1]$ 作 n 等分的分割，再将此分割延拓为区间 $[a,b+1]$ 的分割 π，使得 π 限制在 $[x,x+1]$ 上恰为 π_x，且 $\|\pi\|\leqslant\frac{1}{n}$. 则当 $n\to\infty$ 时，$\|\pi\|\to 0$，根据定理 6.5.3，f 在分割 π 上的各段振幅与区间长度乘积之和 $\to 0$，从而 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\omega_k(x)\to 0$. 也即是说，对任意 $\varepsilon>0$，存在与 x 无关的 $N\in\mathbb{N}$，使得当 $n>N$ 时，

$$\left|f_n(x)-\int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\omega_k(x)<\varepsilon.$$

故 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. $\square$

补充题 3 设可微函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛，且存在 $M>0$，使得

$$|f_n'(x)|\leqslant M,\quad \forall n=1,2,\cdots,\forall x\in[a,b].$$

试证：$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证明 对任意取定的 $x_0\in[a,b]$，由 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛可知，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N(x_0)\in\mathbb{N}$，使得对任意 $n>N(x_0)$ 与正整数 p，有

$$|f_n(x_0)-f_{n+p}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

现设 $I_{x_0}=\left(x_0-\dfrac{\varepsilon}{3M},x_0+\dfrac{\varepsilon}{3M}\right)$. 由 Lagrange 中值定理，对任意 $m\in\mathbb{N}$ 与 $x\in I_{x_0}$ 都有

$$|f_m(x)-f_m(x_0)|\leqslant M|x-x_0|<M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}=\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是对 $x\in I_{x_0}$ 就有

$$|f_n(x)-f_{n+p}(x)|\leqslant|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f_{n+p}(x_0)|+|f_{n+p}(x_0)-f_{n+p}(x)|<3\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

因为 $\displaystyle\bigcup_{x_0\in[a,b]}I_{x_0}$ 构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖，由有限覆盖定理，存在 $k\in\mathbb{N}$，使得 $I_{x_1},\cdots,I_{x_k}$ 是其对应的有限子覆盖. 同上所述，每一个 x_i 都给出一个 $N(x_i)$，现设 $N\coloneqq\max\limits_i\{N(x_i)\}$，则当 $n>N$ 时，

$$|f_n(x)-f_{n+p}(x)|<\varepsilon$$

对任意正整数 p 与 $x\in\displaystyle\bigcup_{i=1}^k I_{x_i}\supset[a,b]$ 成立. 由 Cauchy 收敛原理知 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. $\square$

§15.3　极限函数与和函数的性质

练习 (15.3.1) 确定下列函数的存在域，并研究它们的连续性：

(1) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$；

(2) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x+(-1)^n n}{x^2+n^2}$.

解 (1) 由 Cauchy 判别法，从 $\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|x+\frac{1}{n}\right|^n}=\limsup_{n\to\infty}\left|x+\frac{1}{n}\right|=|x|$ 可知当 $|x|<1$ 时 $f(x)$ 绝对收敛，当 $|x|>1$ 时 $f(x)$ 发散. 而当 $x=1$ 时，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to\mathrm{e}$，当 $x=-1$ 时，$\left(-1+\dfrac{1}{n}\right)^n\not\to0\ (n\to\infty)$，故 $f(x)$ 的存在域为 $(-1,1)$. 对任意的 $\delta\in(0,1)$，当 $x\in[-1+\delta,1-\delta]$ 时，取 $N=\left\lfloor\dfrac{2}{\delta}\right\rfloor+1$，则当 $n>N$ 时，

$$\left|x+\frac{1}{n}\right|^n\leqslant\left(|x|+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant\left(|x|+\frac{\delta}{2}\right)^n\leqslant\left(1-\delta+\frac{\delta}{2}\right)^n=\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^n,$$

因为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^n$ 收敛，由 Weierstrass 判别法即得 $f(x)$ 在 $[-1+\delta,1-\delta]$ 上一致收敛，从而 $f(x)$ 在 $[-1+\delta,1-\delta]$ 上连续，再由 δ 的任意性知 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上连续.

(2) 对任意 $x\in\mathbb{R}$，只要 $n^2+n\geqslant x^2$，就有 $\dfrac{n}{x^2+n^2}$ 单调递减，且由 $\left|\dfrac{n}{x^2+n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n}$ 可知 $\dfrac{n}{x^2+n^2}$ 一致趋于 0，又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 的部分和一致有界 1，由 Dirichlet 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{x^2+n^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛. 由 $\dfrac{x}{x^2+n^2}\sim\dfrac{x}{n^2}$ $(n\to\infty)$ 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{x^2+n^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上收敛，故 $f(x)$ 的存在域为 $\mathbb{R}$. 对任意 $\delta>0$，当 $|x|\leqslant\delta$ 时，$\left|\dfrac{x}{x^2+n^2}\right|\leqslant\dfrac{\delta}{n^2}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{x^2+n^2}$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上一致收敛，从而 $f(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上连续. 再由 δ 的任意性知 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. □

练习 (15.3.5) 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$. 证明：

$$\lim_{x\to1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}=\ln 2.$$

证明 对任意 $x\in\left[\dfrac12,\dfrac32\right]$，$\dfrac{1}{n^x}$ 都是单调递减的，且由 $\left|\dfrac{1}{n^x}\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 知 $\dfrac{1}{n^x}$ 一致收敛于 0，又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 一致有界 1，故由 Dirichlet 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ 在 $\left[\dfrac12,\dfrac32\right]$ 上一致收敛，从而

$$\lim_{x\to1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}=\ln 2.$$

□

练习 (15.3.6) 设 E 是 $(-\infty,+\infty)$ 中的一个点集，x_0 是 E 的一个极限点 (x_0 可以是 $\pm\infty$). 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 E 上一致收敛，而且 $\lim\limits_{x\to x_0}u_n(x)=a_n$ $(x\in E,n=1,2,\cdots)$. 证明：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ $(x\in E)$.

证明 (1) 对任意 $x\in E$ 与任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得对任意 $n>N$ 与 $p\in\mathbb{N}$，有

$$|u_n(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon.$$

由于 x_0 是 E 的极限点，有

$$\lim_{x\to x_0}|u_n(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|=|a_n+\cdots+a_{n+p}|\leqslant\varepsilon.$$

根据 Cauchy 收敛原理，这意味着级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 对任意 $\varepsilon>0$，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 E 上一致收敛，存在 $N_1\in\mathbb{N}$，使得 $\left|\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}u_n(x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$ 对任意 $x\in E$ 均成立；再由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，存在 $N_2\in\mathbb{N}$，使得 $\left|\sum\limits_{n=N_2+1}^{\infty}a_n\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 令 $N:=\max\{N_1,N_2\}$，则

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right|\leqslant\sum_{n=1}^{N}|u_n(x)-a_n|+\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}u_n(x)\right|+\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n\right|<\sum_{n=1}^{N}|u_n(x)-a_n|+\frac{2\varepsilon}{3},\quad\forall x\in E.$$

再令 $E \ni x \to x_0$，就得到

$$\left|\lim_{E\ni x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right|\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon.$$

这就完成了证明.

□

练习 (15.3.7) 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1+2x}\right)^n\cos\frac{n\pi}{x}$. 计算：$\lim_{x\to1}f(x)$，$\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

解 对任意 $x\in\left[\frac12,+\infty\right)$，$\left|\left(\frac{x}{1+2x}\right)^n\cos\frac{n\pi}{x}\right|\leqslant\frac{1}{2^n}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，故由 Weierstrass 判别法知 $f(x)$ 在 $\left[\frac12,+\infty\right)$ 上一致收敛. 因此

$$\lim_{x\to1}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{1+2x}\right)^n\cos\frac{n\pi}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=-\frac14,$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+2x}\right)^n\cos\frac{n\pi}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

□

问题 (15.3.5) 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x+2^n}$ $(0\leqslant x<+\infty)$. 证明：

(1) f 在 $[0,+\infty)$ 上连续；

(2) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$；

(3) 对一切 $x\in(0,+\infty)$，有

$$0<f(x)-\frac{\ln(1+x)}{x\ln2}<\frac{1}{1+x}.$$

证明 (1) 由于 $\left|\frac{1}{x+2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n}$，而级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法即得 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，因此 $f(x)$ 连续.

(2) 由练习 (15.3.6) 结论，

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2^n}=0.$$

(3) 等价于证明对任意 $t\in(0,+\infty)$，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{t+2^n}>\frac{\ln(1+t)}{t\ln2}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t+2^n}.$$

注意到

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{t+2^x}\,\mathrm{d}x\xlongequal{y=2^x}\frac{1}{\ln2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{y(y+t)}\,\mathrm{d}y=\frac{\ln(1+t)}{t\ln2},$$

由面积原理即得证. □

§15.4　由幂级数确定的函数

练习 (15.4.1) 求下列幂级数的收敛半径，并研究它们在收敛区间端点处的性质：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac1n\right)^{n^2}x^n$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)x^n$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a^n}{n}+\dfrac{b^n}{n^2}\right)x^n$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n x^n$.

解 (1) 因为 $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\mathrm{e}$，所以收敛半径 $R=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. 当 $n\to\infty$ 时，$\left[\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\pm\mathrm{e}}\right]^n\not\to 0$，因此当 $x=\pm\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时级数不收敛.

(2) 因为 $1=\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}\cdot n}\leqslant\limsup\sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}}\leqslant\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1\cdot n}=1$，所以收敛半径 $R=1$. 当 $n\to\infty$ 时，$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\not\to 0$，因此当 $x=\pm 1$ 时级数不收敛.

(3) 因为

$$\sqrt[n]{\frac{(\max\{a,b\})^n}{n^2}}\leqslant\sqrt[n]{\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}}\leqslant\sqrt[n]{\frac{(\max\{a,b\})^n}{n}+\frac{(\max\{a,b\})^n}{n^2}},$$

再利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=1$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}=1$ 可得 $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a^n}{n}+\dfrac{b^n}{b^2}}=\max\{a,b\}$，因此收敛半径 $R=\dfrac{1}{\max\{a,b\}}=\min\left\{\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b}\right\}$.

① 若 $a\geqslant b$，则 $R=\dfrac{1}{a}$. 因为 $\left(\dfrac{a^n}{n}+\dfrac{b^n}{n^2}\right)\left(\dfrac{1}{a}\right)^n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{\left(\frac{b}{a}\right)^n}{n^2}$ 单调递减趋于 0，所以当 $x=-\dfrac{1}{a}$ 时，由 Leibniz 判别法知级数收敛；当 $x=\dfrac{1}{a}$ 时，由调和级数发散知级数不收敛.

② 若 $a<b$，则 $R=\dfrac{1}{b}$. 因为 $\left(\dfrac{a^n}{n}+\dfrac{b^n}{n^2}\right)\left(\dfrac{1}{b}\right)^n=\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{n}+\dfrac{1}{n^2}$ 单调递减趋于 0，所以当 $x=-\dfrac{1}{b}$ 时，由 Leibniz 判别法知级数收敛；当 $x=\dfrac{1}{b}$ 时，由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ 收敛及数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 单调有界，根据 Abel 判别法知级数收敛.

(4) 因为 $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}=+\infty$，所以收敛半径 $R=0$. 当 $x=0$ 时级数收敛. □

练习 (15.4.4) 求下列级数在区间 $(-1,1)$ 上的和：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}$；

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$.

解 所给 3 个幂级数的收敛半径均为 1.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}t^{2n}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\dfrac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n-1}t^{2n}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{2n}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\dfrac{-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=-\arctan x$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x\int_0^s t^{n-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s=\dfrac{1}{x}\int_0^x\int_0^s\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s=1+\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)$. □

问题 (15.4.5) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，且 $a_n \geqslant 0$.

(1) 证明：$\lim_{x\to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$；

(2) 由 (1)，证明：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

证明 (1) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n < +\infty$，则由 Abel 第二定理得等式成立. 下面假设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = +\infty$，则对任意 $M > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得 $\sum_{n=0}^{N} a_n R^n > 2M$. 于是对 $x \in \left(\frac{R}{\sqrt[N]{2}}, R\right)$ 就有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \geqslant \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \geqslant \sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{R}{\sqrt[n]{2}}\right)^n > M,$$

这说明 $\lim_{x\to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = +\infty$. 故等式得证.

(2) 因为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的收敛半径为 1，由 (1)，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\lim_{x\to 1^-} \ln(1-x) = +\infty.$$

□

§15.5　函数的幂级数展开式

练习 (15.5.1(2)(4)) 利用已知的初等函数展开式，写出下列函数的幂级数展开式：

(2) $\cos^2 x$；

(4) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$.

解 (2) 利用 $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, x \in \mathbb{R}$ 得在 $2x \in \mathbb{R}$ 时有

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(4) 利用 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1,1)$ 得在 $\begin{cases} x \in (-1,1), \\ -2x \in (-1,1) \end{cases}$ 时有

$$\frac{x}{1+x-2x^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(-2x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-2)^n}{3} x^n, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

□

§15.6　用多项式一致逼近连续函数

定义 15.6.1 设 $g_n(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. 称 $\{g_n(x)\}$ 为 $\mathbb{R}$ 的一个近似，若

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$；

(2) $g_n(x) \geqslant 0$；

(3) 对任意 $\delta \in (0,1)$，均有 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{|x|\geqslant\delta} g_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

补充题 4 设 $\{g_n(x)\}$ 为 $\mathbb{R}$ 的一个近似，$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$，且 $f \equiv 0, x \notin [a,b]$. 令

$$(f * g_n)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明：$\{(f*g_n)(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

证明 易知 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续，因此对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $|t| < \delta$ 时，$|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$. 由定义15.6.1中性质 (1) 可得

$$\begin{aligned}
|(f*g_n)(x) - f(x)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g_n(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\left[f(x-t) - f(x)\right]\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_{|t|<\delta} g_n(t)\left|f(x-t) - f(x)\right|\,\mathrm{d}t + \int_{|t|\geqslant\delta} g_n(t)\left|f(x-t) - f(x)\right|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t + 2M\int_{|t|\geqslant\delta} g_n(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

其中 $M > 0$ 是 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一个上界. 由 $f \equiv 0, x \notin [a,b]$ 可知 $M < +\infty$. 在上式中令 $n \to \infty$ 即得

$$|(f*g_n)(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon, \quad n \to \infty.$$

由 ε 的任意性即知 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(f*g_n)(x) = f(x)$. 再由前面过程可知此收敛是一致的，即

$$(f*g_n)(x) \rightrightarrows f(x), \quad x \in [a,b].$$

□

练习 (15.6.2) 设 $f \in \mathcal{C}([a,b])$.

(1) 如果

$$\int_a^b f(x)x^n\,\mathrm{d}x = 0 \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

那么 $f(x) \equiv 0$；

(2) 如果存在正整数 N，使得

$$\int_a^b f(x)x^n\,\mathrm{d}x = 0 \quad (n \geqslant N),$$

那么 $f(x) \equiv 0$.

证明 (1) 由题设可知，对任一多项式 $Q(x)$，有 $\displaystyle\int_a^b Q(x)f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 由 Weierstrass 逼近定理，对任意 $\varepsilon > 0$，存在多项式 $P(x)$，使得

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a,b].$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)P(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\left[f(x) - P(x)\right]\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^b |f(x)|\cdot|f(x) - P(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

由 $f \in \mathcal{C}([a,b])$ 知 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 是一有限数. 故由 ε 的任意性知 $f(x) \equiv 0$.

(2) 由 (1) 知 $x^N f(x) \equiv 0$，结合 $f \in \mathcal{C}([a,b])$ 可得 $f(x) \equiv 0$. □

练习 (15.6.3) 设 $f \in \mathcal{C}([0,1])$. 如果存在正整数 k，使得

$$\int_0^1 f(x) x^{kn} \, \mathrm{d}x = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

证明：$f(x) \equiv 0$.

证明 根据练习 (15.6.2(2)) 结论，由

$$0 = \int_0^1 f(x) x^{kn} \, \mathrm{d}x \xlongequal{t=x^k} \frac{1}{k} \int_0^1 t^{\frac{1}{k}-1} f\left(t^{\frac{1}{k}}\right) t^n \, \mathrm{d}t, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

及 $t^{\frac{1}{k}-1} f\left(t^{\frac{1}{k}}\right)$ 在 $[0,1]$ 上连续可知 $t^{\frac{1}{k}-1} f\left(t^{\frac{1}{k}}\right)$ $(t \in [0,1])$，即 $f(x) \equiv 0$. □

练习 (15.6.4) 设 $f \in \mathcal{C}([-1,1])$. 证明：

(1) 如果

$$\int_{-1}^1 x^{2n+1} f(x) \, \mathrm{d}x = 0 \quad (n = 0, 1, \cdots),$$

那么 f 是偶函数；

(2) 如果

$$\int_{-1}^1 x^{2n} f(x) \, \mathrm{d}x = 0 \quad (n = 0, 1, \cdots),$$

那么 f 是奇函数.

证明 (1) 由

$$0 = \int_{-1}^1 x^{2n+1} f(x) \, \mathrm{d}x \xlongequal{t=-x} -\int_{-1}^1 t^{2n+1} f(-t) \, \mathrm{d}t$$

可得

$$\int_{-1}^1 x^{2n+1} \left[f(x) - f(-x)\right] \, \mathrm{d}x = 0.$$

注意到 $x^{2n+1}\left[f(x) - f(-x)\right]$ 是 $[-1,1]$ 上的偶函数，因此由上式可得

$$0 = \int_0^1 x^{2n+1} \left[f(x) - f(-x)\right] \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x \left[f(x) - f(-x)\right] x^{2n} \, \mathrm{d}x.$$

根据练习 (15.6.3) 结论，$x\left[f(x) - f(-x)\right] \equiv 0$，进而 $f(x) \equiv f(-x)$ 即 f 是偶函数.

(2) 由

$$0 = \int_{-1}^1 x^{2n} f(x) \, \mathrm{d}x \xlongequal{t=-x} \int_{-1}^1 t^{2n} f(-t) \, \mathrm{d}t$$

可得

$$\int_{-1}^1 x^{2n} \left[f(x) + f(-x)\right] \, \mathrm{d}x = 0.$$

注意到 $x^{2n}\left[f(x) + f(-x)\right]$ 是 $[-1,1]$ 上的偶函数，因此由上式可得

$$\int_0^1 x^{2n} \left[f(x) + f(-x)\right] \, \mathrm{d}x = 0.$$

根据练习 (15.6.3) 结论，$f(x) + f(-x) \equiv 0$，即 f 是奇函数. □

练习 (15.6.6) 设 $f \in \mathcal{C}([1,+\infty))$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ 存在、有限. 证明：对任意的 $\varepsilon > 0$，存在多项式 $P(x)$，使得 $\left|f(x) - P\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| < \varepsilon$ $(1 \leqslant x < +\infty)$.

证明 构造函数 $g(x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right), & 0<x\leqslant 1, \\ l, & x=0. \end{cases}$ 则 $g(x)\in\mathcal{C}([0,1])$. 由 Weierstrass 逼近定理，对任意 $\varepsilon>0$，存在多项式 $P(x)$，使得

$$|g(x)-P(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in[0,1].$$

这即是

$$\left|f(x)-P\left(\frac{1}{x}\right)\right|<\varepsilon\quad \forall x\geqslant 1.$$

□

§15.7　幂级数在组合数学中的应用

练习 (15.7.1) 证明：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{k+n-1}{n-1}=\binom{m+n}{n}.$$

证明 由

$$\begin{aligned}(1-x)^{-n}&=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}(-x)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)\cdots(-n-k+1)}{k!}(-1)^kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k-1)\cdots n}{k!}x^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{n-1}x^k\end{aligned}$$

可知

$$\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}x^m=(1-x)^{-n-1}=(1-x)^{-n}(1-x)^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{k+n-1}{n-1}x^m.$$

故

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{k+n-1}{n-1}=\binom{m+n}{n}.$$

□

练习 (15.7.6(1)) 求满足下列递推关系和初始条件的数列 $\{a_n\}$：

$$a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2},\quad a_0=1,\quad a_1=-2.$$

解 设数列 $\{a_n\}$ 的母函数为 $f(x)$. 由

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1-2x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n,$$

$$-5xf(x)=-5\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=-5x-5\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n,$$

$$6x^2f(x)=6\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}=6\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n$$

可得

$$\left(1-5x+6x^2\right)f(x)=1-7x.$$

于是

$$f(x)=\frac{1-7x}{(3x-1)(2x-1)}=\frac{4}{3x-1}-\frac{5}{2x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(5\cdot 2^n-4\cdot 3^n\right)x^n,\quad x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).$$

故

$$a_n = 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n.$$

□

第十六章 反常积分

§16.1 非负函数无穷积分的收敛判别法

练习 (16.1.1(2)(4)(6)) 判断下列无穷积分的敛散性：

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3x^2-2}{x^5-x^3+1}\,\mathrm{d}x$；

(4) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$；

(6) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^p}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\ (p>0)$.

解 (2) 容易验证 $x^5-x^3+1>0$，$\forall x \geqslant 0$，且当 $x \geqslant \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ 时 $3x^2-2 \geqslant 0$. 因此原积分的敛散性等价于 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3x^2-2}{x^5-x^3+1}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性. 因为当 $x \to +\infty$ 时，$\dfrac{3x^2-x}{x^5-x^3+1} \sim \dfrac{3}{x^2}$，而 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3x^2-2}{x^5-x^3+1}\,\mathrm{d}x$ 收敛，进而原积分收敛.

(4) 因为 $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^p}$，所以当 $p>1$ 时积分收敛，当 $p \leqslant 1$ 时积分发散.

(6) 因为 $0 \leqslant \dfrac{(\ln x)^p}{1+x^2} \leqslant \dfrac{(\ln x)^p}{x^2}$，对充分大的 x，$\dfrac{(\ln x)^p}{\sqrt{x}} < 1$，进而 $\dfrac{(\ln x)^p}{x^2} = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\dfrac{(\ln x)^p}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$，而 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^p}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛. □

补充题 5 设 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，且 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，证明：$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

证明 对任意 $\varepsilon > 0$，由 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，存在 $\delta \in (0,\varepsilon)$，只要 $x_1, x_2 \in [a,+\infty)$ 满足 $|x_1-x_2| \leqslant \delta$ 就有 $|f(x_1)-f(x_2)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 又 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，因此存在 $A>a$，只要 $x_3, x_4 > A$，就有 $\left|\displaystyle\int_{x_3}^{x_4} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \dfrac{\delta^2}{2}$. 于是对任意 $x>A$，可取 $x_0 \in (A,x)$，使得 $x \in (x_0, x_0+\delta)$，从而

$$\begin{aligned}|\delta f(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{x_0}^{x_0+\delta} [f(x)-f(t)]\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x_0+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_{x_0}^{x_0+\delta} |f(x)-f(t)|\,\mathrm{d}t + \left|\int_{x_0}^{x_0+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot\delta + \frac{\delta^2}{2}.\end{aligned}$$

故

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{2} < \varepsilon,$$

这说明 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. □

§16.2 无穷积分的 Dirichlet 和 Abel 收敛判别法

练习 (16.2.1(1)(3)(5)) 研究下列积分的敛散性：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{1+x}\,\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$；

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\lfloor t\rfloor-t+a}{t+x}\,\mathrm{d}t\ \left(x>0,a\neq\frac{1}{2}\right)$.

解 (1) 因为 $\dfrac{\sqrt{x}\cos x}{1+x}=\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}$，$F(A)=\displaystyle\int_0^A\cos x\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界，当 $x\geqslant 1$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}$ 单调递减趋于 0，由 Dirichlet 判别法知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(3) 因为

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x,$$

积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$ 发散，$F(A)=\displaystyle\int_1^A\cos 2x\,\mathrm{d}x$ 在 $(1,+\infty)$ 上有界，$\dfrac{1}{2x}$ 单调递减趋于 0，由 Dirichlet 判别法知 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(5) 注意到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\lfloor t\rfloor-t+a}{t+x}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\lfloor t\rfloor-t+\frac{1}{2}}{t+x}\,\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\frac{a-\frac{1}{2}}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$

因为 $F(A)=\displaystyle\int_0^A\left(\lfloor t\rfloor-t+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t$ 周期为 1，$F(1)=F(0)=0$，所以它在 $(0,+\infty)$ 上有界，而 $\dfrac{1}{t+x}$ 单调递减趋于 0，由 Dirichlet 判别法知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\lfloor t\rfloor-t+\frac{1}{2}}{t+x}\,\mathrm{d}t$ 收敛. 又 $a-\dfrac{1}{2}\neq 0$，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{a-\frac{1}{2}}{t+x}\,\mathrm{d}t$ 发散，所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\lfloor t\rfloor-t+a}{t+x}\,\mathrm{d}t$ 发散. □

练习 (16.2.2(2)(4)) 研究下列积分的绝对收敛性和条件收敛性：

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(1-2x)}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$；

(4) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$.

解 (2) 因为 $\left|\dfrac{\cos(1-2x)}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^2+1}}\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^2+1}}$，当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^2+1}}\sim\dfrac{1}{x^{\frac{13}{6}}}$，而 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{13}{6}}}\,\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(1-2x)}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

(4) 因为 $F(A)=\displaystyle\int_2^A\sin x\,\mathrm{d}x$ 在 $(2,+\infty)$ 上有界，而积分 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ 发散，所以由 Dirichlet 判别法知 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 又

$$\frac{|\sin x|}{x\ln x}\geqslant\frac{\sin^2 x}{x\ln x}=\frac{1}{2x\ln x}-\frac{\cos 2x}{2x\ln x},$$

由 Dirichlet 判别法知 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x\ln x}\,\mathrm{d}x$ 收敛，$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{2x\ln x}\,\mathrm{d}x$ 发散，所以 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x\ln x}\right|\mathrm{d}x$ 发散. 故所给反常积分条件收敛. □

练习 (16.2.3) 设 f 为非负的减函数，且 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 证明：当 $x\to+\infty$ 时，

$$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right).$$

证明 因为 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，所以对任意 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>0$，对任意 $A>A_0$，$\left|\int_A^{2A} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$，又 f 为非负的减函数，因此

$$\varepsilon > \left|\int_A^{2A} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \geqslant Af(A).$$

这说明 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$. □

§16.3 瑕积分的收敛判别法

练习 (16.3.1(2)(4)(6)) 判断下列反常积分的敛散性：

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$；

(4) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^{\sin x}-1}\,\mathrm{d}x$；

(6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q}$.

解 (2) 将反常积分写成

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x=\int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

当 $x\to0$ 时，$\dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\sim\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$，因此 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $\alpha-1<1$ 即 $\alpha<2$. 当 $\alpha>1$ 时，记 $\alpha=p+\varepsilon$，其中 $p>1,\varepsilon>0$，由 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛，$\dfrac{\ln(1+x)}{x^\varepsilon}$ 在 $(1,+\infty)$ 上有界且当 x 充分大时单调递减，由 Abel 判别法，$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 再由 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散可知当 $\alpha\leqslant1$ 时 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}$ 发散，因此 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $\alpha>1$. 故 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $\alpha\in(1,2)$.

(4) 当 $x\to0$ 时，$\dfrac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^{\sin x}-1}\sim\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，而 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛，因此 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^{\sin x}-1}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(6) 任取 $\alpha\in(0,1)$，将原积分写成

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q}=\underbrace{\int_0^{\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q}}_{①}+\underbrace{\int_\alpha^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q}}_{②}+\underbrace{\int_1^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q}}_{③}+\underbrace{\int_{\frac{1}{\alpha}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q}}_{④}.$$

对积分① $\displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q}=(-1)^q\int_{\frac{1}{\alpha}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2-p}(\ln t)^q}$. 当 $2-p>1$ 时，记 $2-p=\beta+\varepsilon$，其中 $\beta>1,\varepsilon>0$，对充分大的 t 有 $t^\varepsilon(\ln t)^q>1$，从而

$$\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\frac{1}{t^\beta\left(t^\varepsilon(\ln t)^q\right)}<\frac{1}{t^\beta}.$$

因此由 $\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\beta}$ 收敛可知 $\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^p(\ln t)^q}$ 收敛. 当 $2-p=1$ 时，由

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^q}=\int_{\ln\frac{1}{\alpha}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^q}$$

知当 $q>1$ 时积分收敛，当 $q\leqslant1$ 时积分发散. 当 $2-p<1$ 时，记 $2-p=\beta-\varepsilon$，其中 $\alpha<1,\varepsilon>0$，对充分大的 t 有 $\dfrac{t^\varepsilon}{(\ln t)^q}>1$，从而

$$\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\frac{1}{t^\beta}\cdot\frac{t^\varepsilon}{(\ln t)^q}>\frac{1}{t^\beta}.$$

因此由 $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\beta}}$ 发散可知 $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{p}(\ln x)^{q}}$ 发散. 故①收敛当且仅当 $p<1$ 或 $\begin{cases}p=1,\\ q>1.\end{cases}$

对积分④ 将①中的 p 换成 $2-p$ 即得④收敛当且仅当 $p>1$ 或 $\begin{cases}p=1,\\ q>1.\end{cases}$

由①与④的讨论知只需再考虑 $p=1,q>1$ 时反常积分②与③的敛散性. 注意到此时②$=(-1)^q$③，而②$=\int_{\ln\alpha}^{0}\frac{\mathrm{d}t}{t^q}$ 在 $q>1$ 时发散，因此原积分始终发散. □

练习 (16.3.2(2)) 判断以下反常积分的绝对收敛性和条件收敛性：

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x\ (q\geqslant 0).$$

解 将原积分写成

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x=\underbrace{\int_0^{1}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x}_{①}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x}_{②}.$$

对积分① 当 $x\to 0$ 时，$\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\sim x^{p+1}$，因此 $\int_0^1\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $p+1>-1$ 即 $p>-2$. 又当 $x\in(0,1]$ 时，$\left|\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\right|=\frac{x^p\sin x}{1+x^q}$，因此这时收敛与绝对收敛等价.

对积分② 当 $p\geqslant q$ 时，对充分大的 x 有 $\frac{x^p}{1+x^q}\geqslant\frac{1}{2}$，从而

$$\int_{2k\pi+\frac{\pi}{6}}^{2k\pi+\frac{5\pi}{6}}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{2k\pi+\frac{\pi}{6}}^{2k\pi+\frac{5\pi}{6}}\frac{1}{2}\cdot\frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{6},\quad\forall k\in\mathbb{N},$$

由 Cauchy 收敛原理知此时积分①发散. 当 $p<q$ 时，当 x 充分大时 $\frac{x^p}{1+x^q}$ 单调递减趋于 0，而 $F(A)=\int_1^A\sin x\,\mathrm{d}x$ 在 $(1,+\infty)$ 上有界，由 Dirichlet 判别法知此时积分②收敛. 下面讨论 $p<q$ 时的绝对收敛性.

- 若还有 $q-p>1$，由 $\left|\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\right|\leqslant\frac{x^p}{1+x^q}$，且当 $x\to+\infty$ 时 $\frac{x^p}{1+x^q}\sim\frac{1}{x^{q-p}}$，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{q-p}}\,\mathrm{d}x$ 收敛可知积分②绝对收敛.
- 若还有 $q-p\leqslant 1$，由

$$\left|\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\right|\geqslant\frac{x^p\sin^2 x}{1+x^q}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^p}{1+x^q}-\frac{x^p\cos 2x}{1+x^q}\right),$$

且由 Dirichlet 判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\cos 2x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$ 收敛，而当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{x^p}{1+x^q}\sim\frac{1}{x^{q-p}}$，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{q-p}}\,\mathrm{d}x$ 发散，因此 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\right|\mathrm{d}x$ 发散，故积分②条件收敛.

因此积分②在 $q-p>1$ 时绝对收敛，在 $q-1\leqslant p<q$ 时条件收敛，其余情形下发散.

综合①与②可知，当 $-2<p<q-1$ 时原积分绝对收敛，当 $q-1\leqslant p<q$ 时原积分条件收敛，其余情形下原积分发散. □

问题 (16.3.6) 设 $a>0,b>0$. 证明：

(1) 如果 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(+\infty)$ 存在，那么

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a};$$

(2) 如果 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛，那么

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a};$$

(3) 如果 f 在 $(0,+\infty)$ 上连续，$f(+\infty)$ 存在，且 $\int_0^{1}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛，那么

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=f(+\infty)\ln\frac{a}{b}.$$

证明 (1) 对 $0<r<R<+\infty$，由定积分的换元积分法，

$$\begin{aligned}\int_r^R\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_r^R\frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_r^R\frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{ar}^{aR}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{br}^{bR}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{ar}^{br}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{aR}^{bR}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

对上式右边的两个定积分分别使用积分第一中值定理，得到

$$\begin{aligned}\int_{ar}^{br}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x&=f(\xi)\int_{ar}^{br}\frac{\mathrm{d}x}{x}=f(\xi)\ln\frac{b}{a}\quad(ar<\xi<br),\\\int_{aR}^{bR}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x&=f(\eta)\int_{aR}^{bR}\frac{\mathrm{d}x}{x}=f(\eta)\ln\frac{b}{a}\quad(aR<\eta<bR).\end{aligned}$$

在上两式中分别令 $r\to0^+$, $R\to+\infty$，注意到这时 $\xi\to+\infty$, $\eta\to+\infty$，由于 $f(0^+)=f(0)$, $f(+\infty)$ 存在且有限，便得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}.$$

(2) 只对 (1) 中第一个定积分使用积分第一中值定理并令 $r\to0^+$，另由 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛可知

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{aR}^{bR}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=0.$$

由此可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

(3) 只对 (1) 中第二个定积分使用积分第一中值定理并令 $R\to+\infty$，另由 $\int_0^{1}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛可知

$$\lim_{r\to0^+}\int_{ar}^{br}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=0.$$

由此可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=f(+\infty)\ln\frac{a}{b}.$$

$\square$

§16.4　反常重积分

第十七章　Fourier 分析

§17.1　周期函数的 Fourier 级数

练习 (17.1.2) 设 f 是周期为 2π 的可积且绝对可积函数. 证明：

(1) 如果 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=f(x)$，那么

$$a_{2n-1}=b_{2n-1}=0;$$

(2) 如果 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=-f(x)$，那么

$$a_{2n}=b_{2n}=0.$$

证明 (1) 由

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

$$f(x+\pi)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n(x+\pi)+b_n\sin n(x+\pi)\right]=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n a_n\cos nx+(-1)^n b_n\sin nx\right]$$

即知 $a_{2n-1}=-a_{2n-1},b_{2n-1}=-b_{2n-1}$，即 $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$.

(2) 仍由 (1) 中两式即知 $a_{2n}=-a_{2n},b_{2n}=-b_{2n}$，即 $a_{2n}=b_{2n}=0$. □

练习 (17.1.4) 如果级数

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|+|b_k|\right)<+\infty,$$

那么级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$$

必为某周期为 2π 的函数的 Fourier 级数.

证明 由 Weierstrass 判别法知题中函数项级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于函数 $f(x)$，且 2π 是 f 的周期. 由一致收敛性，逐项积分得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx\right]\mathrm{d}x\\&=a_0+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\,\mathrm{d}x\\&=a_0,\end{aligned}$$

以及当 $n\geqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}\cos nx+\sum_{k=1}^{\infty}\cos nx\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2 nx \,\mathrm{d}x \\
&= a_n,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}\sin nx + \sum_{k=1}^{n}\sin nx\left(a_k\cos kx + b_k \sin kx\right)\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin^2 nx \,\mathrm{d}x \\
&= b_n.
\end{aligned}
$$

这表明 f 的函数的 Fourier 级数恰为题中所给函数项级数. □

练习 (17.1.6) 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可导，f' 可积且绝对可积. 如果 $f(-\pi)=f(\pi)$，证明：

$$
a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n\to\infty).
$$

证明 由分部积分，f 的 Fourier 系数

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx \,\mathrm{d}x, \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

因为 f' 可积且绝对可积，由 Riemann-Lebesgue 引理，

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} na_n &= -\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx \,\mathrm{d}x = 0, \\
\lim_{n\to\infty} nb_n &= \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx \,\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}
$$

□

§17.2 Fourier 级数的收敛定理

练习 (17.2.2(1)) 在区间 $(-\pi,\pi)$ 上把 $|x|$ 展开为 Fourier 级数.

解 先将 $|x|$ 延拓为 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的函数. 计算得 Fourier 系数

$$
a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \pi,
$$

以及当 $n\geqslant 1$ 时，

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right],
\end{aligned}
$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx \,\mathrm{d}x = 0.$$

由延拓得到的函数在 $\mathbb{R}$ 上连续且分段可微可知

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi} \left[(-1)^n - 1\right] \cos nx, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

$\square$

练习 (17.2.4(1)) 在区间 $(-l, l)$ 上把 x 展开为 Fourier 级数.

解 将此函数延拓为 $\mathbb{R}$ 上以 $2l$ 为周期的函数，使得它在 $x = l$ 处取值为 l. 计算得 Fourier 系数

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x \cos \frac{n\pi}{l} x \,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{l}\int_{0}^{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2l}{n^2\pi^2}\int_{0}^{n\pi} x \sin x \,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}. \end{aligned}$$

由延拓得到的函数在 $\mathbb{R}$ 上分段可微且在 $(-l, l)$ 上连续可知

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad x \in (-l, l).$$

$\square$

问题 (17.2.3) 设 g 是区间 $[0, h]$ $(h > 0)$ 上的增函数. 证明：

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^h g(t) \frac{\sin \lambda t}{t} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} g\left(0^+\right).$$

证明 由于

$$\frac{\pi}{2} g\left(0^+\right) = g\left(0^+\right)\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = g\left(0^+\right)\lim_{\lambda \to +\infty}\int_0^{\lambda h} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = g\left(0^+\right)\lim_{\lambda \to +\infty}\int_0^{h} \frac{\sin \lambda t}{t} \,\mathrm{d}t,$$

只需证

$$\lim_{\lambda \to +\infty}\int_0^h \left[g(t) - g\left(0^+\right)\right] \frac{\sin \lambda t}{t} \,\mathrm{d}t = 0.$$

对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta \in (0, h)$，使得

$$0 \leqslant g(\delta) - g(0) < \varepsilon.$$

对这个 δ，因为 $g(t) - g\left(0^+\right)$ 在 $[0, \delta]$ 上非负且单调递增，$\dfrac{\sin \lambda t}{t}$ 在 $[0, \delta]$ 上可积，由积分第二中值定理，存在 $\eta \in [0, \delta]$，使得

$$\int_0^\delta \left[g(t) - g\left(0^+\right) \frac{\sin \lambda t}{t}\right] \mathrm{d}t = \left[g(\delta) - g\left(0^+\right)\right]\int_\eta^\delta \frac{\sin \lambda t}{t} \,\mathrm{d}t,$$

因此

$$\lim_{\lambda \to +\infty}\left|\int_0^\delta \left[g(t) - g\left(0^+\right)\right] \frac{\sin \lambda t}{t} \,\mathrm{d}t\right| = \left[g(\delta) - g\left(0^+\right)\right]\lim_{\lambda \to +\infty}\left|\int_\eta^\delta \frac{\sin \lambda t}{t} \,\mathrm{d}t\right| = 0.$$

而分别利用 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 及反常积分的 Cauchy 收敛原理可知

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left|\int_\eta^\delta\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t\right|=\lim_{\lambda\to+\infty}\left|\int_{\lambda\eta}^{\lambda\delta}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\right|=\begin{cases}0, & \eta>0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & \eta=0.\end{cases}$$

因此

$$\limsup_{\lambda\to+\infty}\left|\int_0^\delta\left[g(t)-g\left(0^+\right)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\pi\varepsilon}{2}.$$

又由 Riemann-Lebesgue 引理知

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_\delta^\eta\left[g(t)-g\left(0^+\right)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t=0.$$

故有

$$\begin{aligned}\limsup_{\lambda\to+\infty}\left|\int_0^h\left[g(t)-g\left(0^+\right)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant&\limsup_{\lambda\to+\infty}\left|\int_0^\delta\left[g(t)-g\left(0^+\right)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t\right|\\&+\limsup_{\lambda\to+\infty}\left|\int_\delta^h\left[g(t)-g\left(0^+\right)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t\right|\\ \leqslant&\frac{\pi\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

在上式中令 $\varepsilon\to0$ 即得

$$\limsup_{\lambda\to+\infty}\left|\int_0^h\left[g(t)-g\left(0^+\right)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t\right|=0,$$

因此

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^h\left[g(t)-g\left(0^+\right)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t=0.$$

□

§17.3　Fourier 级数的 Cesàro 求和

练习 (17.3.2) 证明：$[0,\pi]$ 上的连续函数可用余弦多项式一致逼近.

证明 设 $f\in\mathcal{C}([0,\pi])$. 先将 f 偶性延拓为 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数，再进一步延拓为 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的函数 (仍记为 f). 由 Fejér 定理，f 在 $\mathbb{R}$ 上能用函数列 $\{\sigma_n(x)\}$ 一致逼近，其中

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+\cdots+S_{n-1}(x)}{n},$$

$S_k(x)$ 为 f 的 Fourier 级数 (余弦级数) 的第 k 个部分和，为余弦多项式. 因此 $\sigma_n(x)$ 也是余弦多项式. □

练习 (17.3.4) 试由 Weierstrass 的关于三角多项式的逼近定理，导出关于代数多项式的逼近定理.

解 通过伸缩变换可不妨设 $f\in\mathcal{C}([0,\pi])$，再将 f 偶性延拓为 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数 (仍记为 f)，则 $f(-\pi)=f(\pi)$. 由 Weierstrass 第二逼近定理，对任意 $\varepsilon>0$，存在三角多项式 $\sigma(x)$，使得 $|f(x)-\sigma(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，$\forall x\in[-\pi,\pi]$. 由于 $\sigma(x)$ 是三角多项式，其 Maclaurin 级数收敛到自身，故通过截断该级数前有限项，可知存在代数多项式 $p(x)$ 使 $|p(x)-\sigma(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，$\forall x\in[-\pi,\pi]$. 因此 $|f(x)-p(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. □

§17.4　平方平均逼近

练习 (17.4.1) 利用 $f(x)=|x|$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 展开式和 Parseval 等式，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^4}$ 的和.

解 由练习 (17.2.2(1))，

$$|x|=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n-1\right]\cos nx,\quad x\in(-\pi,\pi).$$

由 Parseval 等式，

$$\frac{\pi^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^4\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]^2=\frac{\pi^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{(2n-1)^4\pi^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3}.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

□

练习 (17.4.4) 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi-1}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{\pi-x}{2}, & 1<x\leqslant\pi.\end{cases}$$

证明：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx\quad(|x|\leqslant\pi).$$

证明 将 f 奇性延拓为 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数 (仍记为 f). 则其正弦级数的 Fourier 系数

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi-1}{\pi}\int_0^1 x\sin nx\,\mathrm{d}x+\int_1^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x-\frac{1}{\pi}\int_1^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x\sin nx\,\mathrm{d}x+\int_1^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\sin n}{n^2}-\frac{\cos n}{n}+\frac{\cos n}{n}-\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{\pi}\left[-\frac{(-1)^n\pi}{n}\right]\\&=\frac{\sin n}{n^2}.\end{aligned}$$

由延拓后的 f 在 $\mathbb{R}$ 上分段可微且在 $[-\pi,\pi]$ 上连续可知

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx\quad(|x|\leqslant\pi).$$

□

§17.5　Fourier 积分和 Fourier 变换

练习 (17.5.1) 用 Fourier 积分表示下列函数：

(1) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}x, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\leqslant\pi,\\ 0, & |x|>\pi;\end{cases}$

(3) $f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|}$ $(a>0)$.

解 (1) 因为 f 是奇函数，所以 $a(u)=0$，而

$$b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin(ut)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^1\sin(ut)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi u}\left(1-\cos u\right).$$

故 f 的 Fourier 积分为

$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos u}{u}\sin(ux)\,\mathrm{d}u=\begin{cases}\operatorname{sgn}x, & |x|<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,\\ -\dfrac{1}{2}, & x=-1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}.$$

(2) 因为 f 是奇函数，所以 $a(u)=0$，而

$$\begin{aligned}b(u)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin(ut)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\sin(ut)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(u-1)t-\cos(u+1)t\right]\,\mathrm{d}t=\frac{2\sin(\pi u)}{\pi(1-u^2)}.\end{aligned}$$

故 f 的 Fourier 积分为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\pi u)}{1-u^2}\sin(ux)\,\mathrm{d}u.$$

(3) 因为 f 是偶函数，所以 $b(u)=0$，而

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(ut)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\cos(ut)\,\mathrm{d}t=\frac{2a}{\pi(u^2+a^2)}.$$

故 f 的 Fourier 积分为

$$f(x)=\frac{2a}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ux)}{u^2+a^2}\,\mathrm{d}u.$$

□

练习 (17.5.2) 求下列积分方程的解：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\sin xt\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-x}$ $(x>0)$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\cos xt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1+x^2}$.

解 (1) 由 Fourier 正弦变换的反变换公式，

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\sin(ux)\,\mathrm{d}u=\frac{2x}{\pi(x^2+1)}.$$

(2) 由 Fourier 余弦变换的反变换公式，

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ux)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|}=\mathrm{e}^{-|x|}.$$

□

第十八章　含参变量积分

§18.1　含参变量的常义积分

练习 (18.1.1) 求极限：

(1) $\lim\limits_{a\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\lim\limits_{t\to 0}\int_{0}^{2}x^2\cos tx\,\mathrm{d}x$.

解 (1) 因为 $f(x,a)=\sqrt{x^2+a^2}$ 在 $[-1,1]\times[-1,1]$ 上连续，所以 $\lim\limits_{a\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|x|\,\mathrm{d}x=1$.

(2) 因为 $f(x,t)=x^2\cos tx$ 在 $[0,2]\times[-1,1]$ 上连续，所以 $\lim\limits_{t\to 0}\int_{0}^{2}x^2\cos tx\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$. □

练习 (18.1.3(1)(3)) 计算下列函数的导数：

(1) $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$;

(3) $f(x)=\int_{a+x}^{b+x}\frac{\sin xt}{t}\,\mathrm{d}t$.

解 (1) 因为 $g(t,x)=\mathrm{e}^{(1+t)^2}$ 和 $\frac{\partial g}{\partial x}=0$ 都在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，$\sin x,\cos x$ 都在 $\mathbb{R}$ 上可微，所以

$$f'(x)=-\sin x\,\mathrm{e}^{(1+\cos x)^2}-\cos x\,\mathrm{e}^{(1+\sin x)^2}.$$

(3) 因为 $g(t,x)=\frac{\sin xt}{t}$ 和 $\frac{\partial g}{\partial x}=\cos xt$ 都在 $[a+x,b+x]\times\mathbb{R}$ 上连续，$a+x,b+x$ 都在 $\mathbb{R}$ 上可微，所以

$$\begin{aligned}f'(x)&=\int_{a+x}^{b+x}\cos xt\,\mathrm{d}t+\frac{\sin x(b+x)}{b+x}-\frac{\sin x(a+x)}{a+x}\\&=\frac{\sin x(b+x)-\sin x(a+x)}{x}+\frac{\sin x(b+x)}{b+x}-\frac{\sin x(a+x)}{a+x}.\end{aligned}$$

□

问题 (18.1.2(1)) 利用对参数的微分法，计算以下积分：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\right)\,\mathrm{d}x.$$

解 把 a 视作参变量，则当 $a^2\neq b^2$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\right)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{t=\tan x}\int_0^{+\infty}\frac{2at^2}{(a^2t^2+b^2)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{a}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t-\frac{2b^2}{a(a^2-b^2)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t^2+\frac{b^2}{a^2}}-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{a}-\operatorname{sgn}\left(\frac{b}{a}\right)\frac{\pi b}{a^2-b^2}+\frac{\pi b^2}{a(a^2-b^2)}\\&=\frac{\pi}{a+\operatorname{sgn}\left(\frac{b}{a}\right)b},\end{aligned}$$

当 $a^2=b^2$ 时，

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{2t^2}{b(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2b}.$$

由所求形式可不妨设 $a,b\geqslant 0$，则由

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x\right)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{a+b}$$

可得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x\right)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(b^2\cos^2x\right)\,\mathrm{d}x+\int_b^a\frac{\pi}{x+b}\,\mathrm{d}x\\&=\pi\ln\frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x\right)\,\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}.$$

□

§18.2　含参变量反常积分的一致收敛

练习 (18.2.1) 研究下列反常积分在指定区间上的一致收敛性：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\sin x\,\mathrm{d}x,\ 0<u_0\leqslant u<+\infty$；

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos ux}{1+x^4}\,\mathrm{d}x,\ -\infty<u<+\infty$；

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+(x+u)^2},\ 0\leqslant u<+\infty$；

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,\ 0\leqslant\alpha<+\infty$；

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-ux^2}\,\mathrm{d}x,\ 0\leqslant u<+\infty$.

解 (1) 因为对 $A\geqslant 0$，$0\leqslant\displaystyle\sup_{u\geqslant u_0}\left|\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\sin x\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\sup_{u\geqslant u_0}\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\,\mathrm{d}x=\sup_{u\geqslant u_0}\frac{1}{u\,\mathrm{e}^{uA}}\leqslant\frac{1}{u_0\,\mathrm{e}^{u_0A}}$，而 $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{u_0\,\mathrm{e}^{u_0A}}=0$，所以 $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\sup_{u\geqslant u_0}\left|\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\sin x\,\mathrm{d}x\right|=0$，反常积分在 $u\in[u_0,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) 因为 $\displaystyle\left|\frac{x^2\cos ux}{1+x^4}\right|\leqslant\frac{x^2}{1+x^4}$，而

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x&=\frac12\int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac12\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac1x\right)}{\left(x+\frac1x\right)^2-\left(\sqrt2\right)^2}+\frac12\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac1x\right)}{\left(x-\frac1x\right)^2+\left(\sqrt2\right)^2}\\&=\frac{1}{4\sqrt2}\ln\left|\frac{x+\frac1x-\sqrt2}{x+\frac1x+\sqrt2}\right|+\frac{1}{2\sqrt2}\arctan\frac{x-\frac1x}{\sqrt2}+C,\end{aligned}$$

因此 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sqrt2}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知所给反常积分在 $u\in(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(3) 因为对 $x,u\geqslant 0$，$\displaystyle\left|\frac{1}{1+(x+u)^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2}$，而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知所给反常积分在 $u\in[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(4) 因为 $F(A)=\int_1^A \cos x\,\mathrm{d}x$ 有界 2，$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减趋于 0，由 Dirichlet 判别法知 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 又因为对每个固定的 $\alpha\in[0,+\infty)$，$\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 关于 $x\in[1,+\infty)$ 单调递减且关于 α 一致有界 1，由 Abel 判别法知所给反常积分在 $\alpha\in[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(5) 因为 $\sup\limits_{u\geqslant 0}\left|\int_A^{+\infty}\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-ux^2}\,\mathrm{d}x\right| \xlongequal{t=\sqrt{u}x} \sup\limits_{u\geqslant 0}\int_{\sqrt{u}A}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，所以反常积分在 $u\in[0,+\infty)$ 上不一致收敛. □

练习 (18.2.2) 证明：积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin ux}{x}\,\mathrm{d}x$ 在任何不包含 $u=0$ 的闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛，在包含 $u=0$ 的闭区间上不一致收敛.

证明 ① 若 $0\notin[a,b]$，则对 $A>0$，$F(A):=\int_0^A\sin ux\,\mathrm{d}x$ 满足 $|F(A)|=\left|\dfrac{1-\cos uA}{u}\right|\leqslant\dfrac{2}{\min\{|a|,|b|\}}$，又 $\dfrac{1}{x}$ 单调递减趋于 0，由 Dirichlet 判别法知所给反常积分在 $u\in[a,b]$ 上一致收敛.

② 若 $0\in[a,b]$，则 $\sup\limits_{u\in[a,b]}\left|\int_A^{+\infty}\dfrac{\sin ux}{x}\,\mathrm{d}x\right| \xlongequal{t=ux} \sup\limits_{u\in[a,b]}\left|\int_{uA}^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right|\geqslant\left|\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right|=\dfrac{\pi}{2}$，因此所给反常积分在 $u\in[a,b]$ 上不一致收敛. □

练习 (18.2.5) 证明：积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\cos ux}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x\quad(a>0)$$

在 $[\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$ 上一致收敛，但在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

证明 ① 对 $u\in[\delta,+\infty)$，$F(A):=\int_0^A\cos ux\,\mathrm{d}x$ 满足 $|F(A)|=\dfrac{|\sin uA|}{u}\leqslant\dfrac{1}{\delta}$，又 $\dfrac{x}{a^2+x^2}$ 在 x 充分大时单调递减趋于 0，所以由 Dirichlet 判别法知所给反常积分在 $[\delta,+\infty)$ 上收敛.

② 因为 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}t}{a^2+t}=+\infty$，所以对任意的 $A>0$，均存在 $A''>A'>A$，使得 $\int_{A'}^{A''}\dfrac{x}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x>1$. 因此对 $u=\dfrac{\pi}{3A''}$，有

$$\int_{A'}^{A''}\frac{x\cos ux}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{A'}^{A''}\frac{x\cos\frac{\pi}{3}}{a^2+x^2}>\frac{1}{2},$$

由 Cauchy 收敛原理，所给反常积分在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛. □

§18.3　含参变量反常积分的性质

练习 (18.3.1) 研究下列函数在指定区间上的连续性：

(1) $f(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{t}{2+t^x}\,\mathrm{d}t,\ x\in(2,+\infty)$；

(2) $\varphi(\alpha)=\int_0^{\pi}\dfrac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x,\ \alpha\in(0,2)$；

(3) $f(\alpha)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x,\ \alpha\in(0,+\infty)$.

解 (1) 为证 $f(x)$ 在 $x\in(2,+\infty)$ 上连续，只需证 $f(x)$ 在任意 $[a,b]\subset(2,+\infty)$ 上连续. 又 $\dfrac{t}{2+t^x}$ 在 $(t,x)\in[0,+\infty)\times[a,b]$ 上连续，只需证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 这可由 $t\to+\infty$ 时，

$$\frac{t}{2+t^x}\leqslant\frac{t}{2+t^a}\sim\frac{1}{t^{a-1}}$$

及 $a-1>1$ 时 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{t^{a-1}}\,\mathrm{d}t$ 收敛，根据 Weierstrass 判别法得到.

(2) 先将 $\varphi(\alpha)$ 写成

$$\varphi(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

由于 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 是常义积分，它关于 α 连续. 由于其余两个积分在任意 $[a,b]\subset(0,2)$ 上连续，只需证它们在 $[a,b]$ 上一致收敛. 由于当 $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)\ni x\to 0$ 时，

$$\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\leqslant\frac{\sin x}{x^b\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)^a}\sim\frac{1}{x^{b-1}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^a},$$

而 $b-1<1$ 时 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{x^{b-1}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^a}\,\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\in(0,2)$ 一致收敛. 又因为当 $(\pi-1,\pi)\ni x\to\pi$ 时，

$$\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\leqslant\frac{\sin(\pi-x)}{(\pi-x)^b}\sim\frac{1}{(\pi-x)^{b-1}},$$

而 $b-1<1$ 时 $\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{(\pi-x)^{b-1}}\,\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\in(0,2)$ 一致收敛. 故 $\varphi(\alpha)$ 在 $\alpha\in(0,2)$ 上连续.

(3) 为证 $f(\alpha)$ 在 $\alpha\in(0,+\infty)$ 上连续，只需证 $f(\alpha)$ 在任意 $[a,b]\subset(0,+\infty)$ 上连续. 又 $\dfrac{\sin x}{x^\alpha}$ 在 $(x,\alpha)\in[1,+\infty)\times[a,b]$ 上连续，只需证 $f(\alpha)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 因为对每个固定的 $\alpha\in[a,b]$，$\dfrac{1}{x^\alpha}$ 是 x 的单调函数，且当 $x\to+\infty$ 时关于 α 一致地趋于 0，当 $A\to+\infty$ 时，$\displaystyle\int_1^A\sin x\,\mathrm{d}x$ 有界，所以由 Dirichlet 判别法知 $f(\alpha)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. □

练习 (18.3.2) 利用公式 $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}$ $(\alpha>0)$，计算积分

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(\ln x)^m\,\mathrm{d}x,$$

其中 m 为正整数.

解 注意到

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(\ln x)^m\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{\partial^m}{\partial\alpha^m}x^{\alpha-1}\right)\mathrm{d}x.$$

对任意 $\alpha>0$，取 $a\in(0,\alpha)$，并设 $\alpha\in[a,b]$. 由于 $\dfrac{\partial^m}{\partial\alpha^m}x^{\alpha-1}$ $(m\in\mathbb{N})$ 在 $(x,\alpha)\in(0,1]\times[a,b]$ 上连续，而对 $x\in(0,1]$ 有 $\left|x^{\alpha-1}(\ln x)^m\right|\leqslant\left|x^{a-1}(\ln x)^m\right|=-x^{a-1}(\ln x)^m$，而

$$\int_0^1 x^{a-1}(\ln x)^m\overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}(-1)^m\int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)^m}{t^{a+1}}\,\mathrm{d}t$$

在 $a>0$ 时收敛，因此由 Weierstrass 判别法知 $\displaystyle\int_0^1\left(\frac{\partial^m}{\partial\alpha^m}x^{\alpha-1}\right)\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上关于 α 一致收敛. 故

$$\int_0^1\left(\frac{\partial^m}{\partial\alpha^m}x^{\alpha-1}\right)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\alpha^m}\int_0^1 x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\alpha^m}\frac{1}{\alpha}=\frac{(-1)^m m!}{\alpha^{m+1}}.$$

□

练习 (18.3.3) 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\sin cx\,\mathrm{d}x$ $(a>0,b>0,c>0)$.

解 注意到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x} \sin cx \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \int_a^b \mathrm{e}^{-ux} \sin cx \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}x.$$

因为 $\mathrm{e}^{-ux}\sin cx$ 在 $(x,u)\in[0,+\infty)\times[a,b]$ 上连续，且在 $u\in[a,b]$ 上有 $\left|\mathrm{e}^{-ux}\sin cx\right| \leqslant \mathrm{e}^{-ux} \leqslant \mathrm{e}^{-ax}$，而 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ux}\sin cx\,\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上关于 u 一致收敛，因此

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \int_a^b \mathrm{e}^{-ux} \sin cx \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ux} \sin cx \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u \\ &= \int_a^b \frac{c}{u^2+c^2}\,\mathrm{d}u = \arctan\frac{b}{c} - \arctan\frac{a}{c}.\end{aligned}$$

□

练习 (18.3.4) 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,\mathrm{d}x\ (\beta\neq 0)$.

解 不妨设 $\alpha\geqslant 0, \beta>0$.

① 若 $\alpha=0$，则原积分为

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2)}{\beta^2+x^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\beta t} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(\beta^2 t^2)}{\beta(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi\ln\beta}{\beta} + \frac{2}{\beta}\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

而

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &\xlongequal{t=\frac{1}{u}} \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= 0.\end{aligned}$$

故此时原积分 $= \dfrac{\pi\ln\beta}{\beta}$.

② 若 $\alpha>0$. 由于对 $x>0$ 有 $\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\dfrac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2} = \dfrac{2\alpha}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2)} \leqslant \dfrac{2\alpha}{2\alpha x(\beta^2+x^2)} = \dfrac{1}{x(\beta^2+x^2)}$，而 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(\beta^2+x^2)}\,\mathrm{d}x$ 收敛，所以由 Weierstrass 判别法知 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 关于 α 一致收敛. 又 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ 是常义积分，因此 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 上关于 α 一致收敛. 又因为 $\dfrac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}$ 和 $\dfrac{2\alpha}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2)}$ 在 $(x,\alpha)\in(0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续，因此当 $\alpha\neq\beta$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{2\alpha}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\beta^2+x^2}-\frac{1}{\alpha^2+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{\beta(\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

又 $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in(0,+\infty)$ 上连续，所以上式结果对 $\alpha=\beta$ 也成立. 于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\beta}\ln(\alpha+\beta) + C(\beta), \quad \alpha>0.$$

当 $\alpha=\beta$ 时，上式左端为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\beta^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\beta\tan t} \frac{1}{\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\beta^2}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi\ln\beta}{\beta} - \frac{2}{\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi \ln \beta}{\beta} - \frac{2}{\beta}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right) = \frac{\pi \ln(2\beta)}{\beta}.$$

由此可见 $C(\beta) = 0$. 故

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(\alpha^2 + x^2\right)}{\beta^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\beta}\ln(\alpha + \beta), \quad \alpha > 0.$$

综合①与②可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(\alpha^2 + x^2\right)}{\beta^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi \ln(|\alpha| + |\beta|)}{|\beta|}.$$

□

§18.4　Γ 函数和 B 函数

练习 (18.4.1) 证明：

(1) $\Gamma(s) = 2\int_0^{+\infty} x^{2s-1}\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\ (s > 0)$；

(2) $\Gamma(s) = a^s \int_0^{+\infty} x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x\ (s > 0, a > 0)$.

证明 (1) $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \xlongequal{t=x^2} \int_0^{+\infty} x^{2s-2}\,\mathrm{e}^{-x^2}\,2x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} x^{2s-1}\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

(2) $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \xlongequal{t=ax} \int_0^{+\infty} a^{s-1}x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-ax}\,a\,\mathrm{d}x = a^s\int_0^{+\infty} x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$. □

A 定理公式速览

§1.1 Fourier 分析

定义 A.1.1 $\widetilde{\mathcal{R}}([-\pi,\pi])=\big\{[-\pi,\pi]$上可积且绝对可积的函数$\big\}$.

定义 A.1.2 $f\in\widetilde{\mathcal{R}}([\pi,\pi])$ 的 Fourier 系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\quad n=0,1,\cdots,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

f 的 Fourier 级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,.$$

定理 A.1.3 (Riemann-Lebesgue 引理) 设 $f\in\widetilde{\mathcal{R}}([a,b])$($b$ 可以为 $+\infty$)，则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x=0.$$

定理 A.1.4 (Fourier 级数的局部化定理) 设 $f\in\widetilde{\mathcal{R}}([-\pi,\pi])$，则 f 的 Fourier 级数在点 x_0 处是否收敛，以及收敛到什么数值，仅与 f 在 x_0 点附近的行为有关.

定理 A.1.5 (Dini 判别法) 设 $f\in\widetilde{\mathcal{R}}([-\pi,\pi])$. 对某个 $s\in\mathbb{R}$，令

$$\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s.$$

如果存在 $\delta>0$，使得函数 $\dfrac{\varphi(t)}{t}\in\widetilde{\mathcal{R}}([0,\delta])$，那么 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 s.

定义 A.1.6 (α 阶 Lipschitz 条件) 存在 $\delta>0,L>0,\alpha\in(0,1]$，使得当 $t\in(0,\delta]$ 时，有

$$\left|f(x_0+t)-f(x_0^+)\right|\leqslant Lt^\alpha,\quad \left|f(x_0-t)-f(x_0^-)\right|\leqslant Lt^\alpha.$$

定理 A.1.7 设 $f\in\widetilde{\mathcal{R}}([-\pi,\pi])$. 如果 f 在 x_0 附近满足 α 阶 Lipschitz 条件，那么 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 $\dfrac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$.

定理 A.1.8 设 $f\in\widetilde{\mathcal{R}}([-\pi,\pi])$.

(1) 如果 f 在 x_0 处存在导数或两个有限的单侧导数，那么 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 $f(x_0)$.

(2) 如果 f 在 x_0 处仅有两个有限的广义单侧导数：

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t)-f(x_0^+)}{t},\quad \lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0-t)-f(x_0^-)}{-t},$$

那么 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 $\dfrac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$.

定义 A.1.9 (分段可微) f 和 f' 在 $[a,b]$ 上的间断点有限且均为第一类间断点.

定理 A.1.10 (Dirichlet 条件) 如果周期为 2π 的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上是分段可微的，那么 f 的 Fourier 级数在每点 x_0 处收敛于 $\dfrac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$. 特别地，在 f 的连续点 x_0 处，它收敛于 $f(x_0)$.

定理 A.1.11 (Fejér) 设 $f \in \widetilde{\mathcal{R}}([-\pi,\pi])$. 如果 f 在 x_0 处有左、右极限 $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$，那么它的 Fourier 级数在 x_0 处的 Cesàro 和为 $\dfrac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$. 特别地，当 f 在 x_0 处连续时，它的 Fourier 级数的 Cesàro 和即为 $f(x_0)$.

定理 A.1.12 设 $f \in \widetilde{\mathcal{R}}([-\pi,\pi])$. 如果 f 在 x_0 处有左、右极限，且其 Fourier 级数在 x_0 处收敛，那么必收敛于 $\dfrac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$.

定理 A.1.13 (Fejér 定理) 如果 f 是周期为 2π 的连续函数，那么它的 Fourier 级数在 Cesàro 意义下在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 f.

定理 A.1.14 (Weierstrass 第二逼近定理) 如果 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且 $f(-\pi)=f(\pi)$，那么 f 必能用三角多项式一致逼近.

定义 A.1.15 $\mathcal{L}^2([a,b])=\big\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\mid f\text{可积且平方可积}\big\}\subsetneq\widetilde{\mathcal{R}}([a,b])$.

例 A.1.16 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}},\dfrac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\dfrac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\dfrac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\dfrac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\cdots\right\}$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的规范正交系，其 Parseval 等式为

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 A.1.17 (两个函数的 Parseval 等式) 设 $f,g\in\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$，$a_n,b_n$ 和 α_n,β_n 分别是 f 和 g 的 Fourier 系数，那么

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\alpha_n+b_n\beta_n\right).$$

定理 A.1.18 (Fourier 级数的逐项积分定理) f 的 Fourier 级数不论是否收敛，都永远可以逐项积分.

定义 A.1.19 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，对任意 $u\in\mathbb{R}$，定义

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos ut\,\mathrm{d}t,\quad b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin ut\,\mathrm{d}t.$$

f 的 Fourier 积分为

$$f(x)\sim\int_0^{+\infty}\left[a(u)\cos ux+b(u)\sin ux\right]\,\mathrm{d}u.$$

定理 A.1.20 (Fourier 积分的局部化定理) 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，那么 f 的 Fourier 积分在某点 x 是否收敛，以及收敛于什么值，仅与 f 在 x 附近的函数值有关.

定理 A.1.21 (Dini 定理) 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，对任意的实数 s 及固定的 x，记

$$\varphi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2s.$$

如果存在 $\delta>0$，使得 $\dfrac{\varphi(t)}{t}\in\widetilde{\mathcal{R}}([0,\delta])$，那么 f 的 Fourier 积分在 x 处收敛于 s.

定理 A.1.22 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，且在 x 处有广义的左右导数，那么 f 的 Fourier 积分在 x 处收敛于 $\dfrac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$.

定义 A.1.23 (Fourier 正余弦变换) 设 f 是只定义在 $[0,+\infty)$ 上的绝对可积函数.

(1) 称

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\cos ut\,\mathrm{d}t$$

为 f 的 Fourier 余弦变换，其反变换公式为

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}g(u)\cos xu\,\mathrm{d}u.$$

(2) 称

$$h(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin ut\,\mathrm{d}t$$

为 f 的 Fourier 正弦变换，其反变换公式为

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} h(u)\sin ux\,\mathrm{d}u.$$

定义 A.1.24 (Fourier 变换) 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积. 称

$$\hat{f}(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,tu}\,\mathrm{d}t$$

为 f 的 Fourier 变换，其反变换公式为

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(u)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ux}\,\mathrm{d}u.$$

定义 A.1.25 (Schwartz 函数空间) $\mathcal{S}(\mathbb{R})=\left\{f\in\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})\mid f^{(l)}\text{快速衰减，且}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|x|^k\left|f^{(l)}(x)\right|<+\infty,\ \forall k,l\geqslant 0\right\}.$

定义 A.1.26 (卷积) $(f*g)(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)\,\mathrm{d}u.$

定理 A.1.27 (Fourier 变换的性质)

(1) (频移特性) $\mathcal{F}\left[f(x)\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,u_0x}\right]=\hat{f}(u+u_0).$

(2) (时移特性) $\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(u)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ux_0}\right]=f(x+x_0).$

(3) (本函数的微分法) $\mathcal{F}\left[f'(x)\right]=\mathrm{i}\,u\hat{f}(u).$

(4) (像函数的微分法) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\hat{f}(u)=\mathcal{F}\left[-\,\mathrm{i}\,xf(x)\right].$

(5) (与卷积的联系) $\mathcal{F}[f*g]=\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$，即 $\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}\hat{g}\right]=(f*g)(x).$

定理 A.1.28 (Fourier 变换的 Parseval 等式) 设 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}(u)\right|^2\,\mathrm{d}u.$$

§1.2 反常积分

定理 A.2.1 设 f 是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数. 如果存在一个递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}$ $(A_1=a)$，使得级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，那么积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，并且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 A.2.2 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$ 收敛，但被积函数当 $x\to+\infty$ 时无界.

定理 A.2.3 (第二积分平均值定理) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，g 在 $[a,b]$ 上非负，那么：

(1) 若 g 在 $[a,b]$ 上递减，则必存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x;$$

(2) 若 g 在 $[a,b]$ 上递增，则必存在 $\eta\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(b)\int_\eta^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 A.2.4 (推广的第二积分平均值定理) 设 f 在 $[a,b]$ 上可积，g 在 $[a,b]$ 上单调，则必存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x+g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 A.2.5 (Dirichlet 判别法) 设 f,g 满足下面两个条件：

(1) g 在 $[a,+\infty)$ 上单调，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$；

(2) $F(A)=\displaystyle\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $(a,+\infty)$ 上有界.

那么积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

定理 A.2.6 (Abel 判别法) 设 f,g 满足下面两个条件：

(1) g 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界；

(2) $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

那么积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

定义 A.2.7 (无穷积分的 Cauchy 主值) P.V. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\coloneqq\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x.$

定义 A.2.8 (瑕积分的 Cauchy 主值) 设 c 是 f 在 $[a,b]$ 内的唯一瑕点，定义

$$\text{P.V.}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\coloneqq\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

例 A.2.9 若 $f(x)$ 连续可微，且无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f'(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0.$

例 A.2.10 证明：广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\mu+\sin x}\,\mathrm{d}x$ 在 $0<\mu\leqslant\dfrac12$ 时发散，在 $\dfrac12<\mu\leqslant1$ 时收敛，在 $\mu>1$ 时绝对收敛.

证明 注意到 $\dfrac{\sin x}{x^\mu}-\dfrac{\sin x}{x^\mu+\sin x}=\dfrac{\sin^2x}{x^\mu(x^\mu+\sin x)}$，因此

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\mu+\sin x}\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x^\mu}-\frac{\sin^2x}{x^\mu(x^\mu+\sin x)}\right)\mathrm{d}x.$$

我们熟知

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\mu}\,\mathrm{d}x\begin{cases}\text{绝对收敛}, & \mu>1,\\ \text{条件收敛}, & 0<\mu\leqslant1,\\ \text{发散}, & \mu\leqslant0.\end{cases}$$

【其中 $\mu<0$ 时发散可由 $\displaystyle\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin x}{x^\mu}\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi(x+2k\pi)^{-\mu}\sin x\,\mathrm{d}x\overset{k\geqslant1\text{ 时}}{\geqslant}\int_0^\pi\sin x\,\mathrm{d}x=2$ 得到.】

① 当 $0<\mu\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，

$$\frac{\sin^2 x}{x^\mu(x^\mu+\sin x)}\geqslant\frac{\sin^2 x}{x^\mu(x^\mu+1)}=\frac{1}{2x^\mu(x^\mu+1)}-\frac{\cos 2x}{2x^\mu(x^\mu+1)},$$

由 Dirichlet 判别法可知 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^\mu(x^\mu+1)}\,\mathrm{d}x$ 收敛，而当 $x\to+\infty$ 时 $\dfrac{1}{2x^\mu(x^\mu+1)}\sim\dfrac{1}{2x^{2\mu}}$，因此 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x^\mu(x^\mu+1)}$ 发散. 故原积分在 $0<\mu\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时发散.

② 当 $\mu>\dfrac{1}{2}$ 时，

$$\frac{\sin^2 x}{x^\mu(x^\mu+\sin x)}\leqslant\frac{\sin^2 x}{x^\mu(x^\mu-1)}\leqslant\frac{1}{x^\mu(x^\mu-1)}\sim\frac{1}{x^{2\mu}},$$

因此 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\mu(x^\mu+\sin x)}\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛，进而原积分在 $\dfrac{1}{2}<\mu\leqslant 1$ 时收敛，在 $\mu>1$ 时绝对收敛. □

§1.3 含参变量积分

定理 A.3.1 如果 f 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，那么 $\varphi(u)=\displaystyle\int_a^b f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数.

定理 A.3.2 如果 f 和 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 都在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，那么 $\varphi(u)=\displaystyle\int_a^b f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，且

$$\varphi'(u)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\,\mathrm{d}x.$$

定理 A.3.3 设 f 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，$p(u),q(u)$ 都在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且当 $\alpha\leqslant u\leqslant\beta$ 时，$a\leqslant p(u)\leqslant b, a\leqslant q(u)\leqslant b$，那么 $\psi(u)=\displaystyle\int_{p(u)}^{q(u)} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

定理 A.3.4 如果 f 和 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 都在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，$p(u),q(u)$ 都在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，且当 $\alpha\leqslant u\leqslant\beta$ 时，$a\leqslant p(u)\leqslant b, a\leqslant q(u)\leqslant b$，那么 $\psi(u)=\displaystyle\int_{p(u)}^{q(u)} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，且

$$\psi'(u)=\int_{p(u)}^{q(u)}\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\,\mathrm{d}x+f(q(u),u)q'(u)-f(p(u),u)p'(u).$$

定义 A.3.5 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，总能找到只与 ε 有关的 $A_0(>a)$，当 $A>A_0$ 时，$\left|\displaystyle\int_A^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$ 对 $[\alpha,\beta]$ 中所有的 u 成立，则称反常积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

定理 A.3.6 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛 $\iff \displaystyle\lim_{A\to+\infty}\eta(A)=0$，其中

$$\eta(A)=\sup_{u\in[\alpha,\beta]}\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x\right|.$$

定理 A.3.7 (Cauchy 收敛原理) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛 $\iff$ 对任意的 $\varepsilon>0$，存在只与 ε 有关的 A_0，当 $A',A''>A_0$ 时，$\left|\displaystyle\int_{A'}^{A''} f(x,u)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$ 对 $[\alpha,\beta]$ 中所有的 u 都成立.

定理 A.3.8 (Weierstrass 判别法) 设 $f(x,u)$ 关于 x 在 $[a,+\infty)$ 上连续. 如果存在 $[a,+\infty)$ 上的连续函数 F，使得 $\displaystyle\int_a^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，且对一切充分大的 x 及 $[\alpha,\beta]$ 上的一切 u，都有 $|f(x,u)|\leqslant F(x)$，那么 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

定理 A.3.9 (Dirichlet 判别法) 设 f, g 满足以下两个条件：

(1) 对每个固定的 $u \in [\alpha, \beta]$，$g(x, u)$ 是 x 的单调函数，且当 $x \to +\infty$ 时关于 u 一致地趋于 0；

(2) 当 $A \to +\infty$ 时，$\displaystyle\int_a^A f(x, u)\,\mathrm{d}x$ 对 $u \in [\alpha, \beta]$ 一致有界.

那么 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x, u) g(x, u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛.

定理 A.3.10 (Abel 判别法) 设 f, g 满足以下两个条件：

(1) 对每个固定的 $u \in [\alpha, \beta]$，$g(x, u)$ 关于 x 单调，且关于 u 一致有界；

(2) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x, u)\,\mathrm{d}x$ 关于 $u \in [\alpha, \beta]$ 一致收敛.

那么 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x, u) g(x, u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛.

例 A.3.11 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x+\beta}\,\mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}x$ 关于 β 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

定理 A.3.12 设函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a, +\infty)$ 上收敛于 g，满足：

(1) 对任意的 $A > a$，$\{f_n\}$ 在 $[a, A]$ 上一致收敛；

(2) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 对 n 一致收敛.

那么 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 A.3.13 如果函数 $f(x, u)$ 在 $[a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$ 上连续，且积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x, u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛，那么 $\varphi(u) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x, u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续.

注 A.3.14 由于连续性是点态行为，此处 $[\alpha, \beta]$ 可换为开区间或无穷区间.

定理 A.3.15 如果函数 $f(x, u)$ 在 $[a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$ 上连续，且积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x, u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛，那么 $\varphi(u) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x, u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可积，且

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^{+\infty} \left(\int_\alpha^\beta f(x, u)\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}x.$$

定理 A.3.16 如果 f 和 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 都在 $[a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$ 上连续，且 $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial u}(x, u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛，那么 $\varphi(u) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x, u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可微，且

$$\varphi'(u) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial u}(x, u)\,\mathrm{d}x, \quad \alpha \leqslant u \leqslant \beta.$$

注 A.3.17 由于可微性是点态行为，此处 $[\alpha, \beta]$ 可换为开区间或无穷区间.

定理 A.3.18 (Dini 定理) 设 $f(x, u)$ 在 $[a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$ 上连续、非负. 如果 $\varphi(u) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x, u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续，那么 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x, u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛.

注 A.3.19 由于级数形式 Dini 定理的证明用到了有限覆盖定理，此处 $[\alpha,\beta]$ 不能换为开区间或无穷区间.

定理 A.3.20 设 f 满足下列条件：

(1) f 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 上连续；

(2) $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u$ 分别关于 u 在任何区间 $[\alpha,\beta]$ 上和关于 x 在任何区间 $[a,b]$ 上一致收敛；

(3) 积分

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x,\quad \int_\alpha^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u$$

中至少有一个存在.

那么积分

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x,\quad \int_\alpha^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}f(x,u)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u$$

都存在且相等.

定理 A.3.21 (Γ 函数的性质)

(1) $\Gamma(s) \coloneqq \int_0^{+\infty} t^{s-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 在 $(0,+\infty)$ 上光滑.

(2) 对任意的 $s>0$，$\Gamma(s)>0$，且 $\Gamma(1)=1$.

(3) 对任意的 $s>0$，$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$.

(4) $\ln\Gamma(s)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

(5) (Legendre 加倍公式) $\Gamma(2s)=\dfrac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\dfrac{1}{2}\right)$，也即 $\Gamma(p)=\dfrac{2^{p-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\dfrac{p}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{p+1}{2}\right)$.

(6) (余元公式) $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\sin p\pi}$，$\forall p\in(0,1)$.

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^a\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)}=1$，$\forall a\in\mathbb{R}$.

注 A.3.22 上述 (2)(3)(4) 唯一确定了 Γ 函数.

定理 A.3.23 (B 函数的性质)

(1) $\mathsf{B}(p,q)\coloneqq\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t \xlongequal{t=\frac{1}{1+z}} \int_0^{+\infty}\dfrac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,\mathrm{d}z$.

(2) $\mathsf{B}(p,q)=\mathsf{B}(q,p)$.

(3) $\mathsf{B}(p+1,q)=\dfrac{p}{p+q}\mathsf{B}(p,q)$.

(4) $\mathsf{B}(p+1,q+1)=\dfrac{pq}{(p+q+1)(p+q)}\mathsf{B}(p,q)$.

(5) $\mathsf{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

例 A.3.24 (一些计算)

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}\xlongequal{t=u^4}\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{3}{4}}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\mathsf{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}\xlongequal{t=x^n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathsf{B}\left(1-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)=$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}=1$.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}x^2\,\mathrm{e}^{-x^{2n}}\,\mathrm{d}x\xlongequal{t=x^{2n}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\int_0^{+\infty}t^{\frac{3}{2n}-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\Gamma\left(\frac{3}{2n}\right)=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n}\Gamma\left(\frac{3}{2n}\right)=$ $\displaystyle\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\Gamma\left(\frac{3}{2n}+1\right)=\frac{1}{3}\Gamma(1)=\frac{1}{3}$.

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cos^\beta x \,\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sin^2 x} \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-t)^{\frac{\beta-1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathsf{B}\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}$, $\forall \alpha > -1, \beta > -1$.

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^\alpha x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cos^{-\alpha} x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\pi} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$, $\forall \alpha \in (-1, 1)$.