实用随机过程作业

林晓烁 2024 春

https://xiaoshuo-lin.github.io

习题 1.1 设 N 为非负整数值随机变量. 证明

$$\mathbb{E}[N]=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(N\geqslant k)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(N>k).$$

更一般地, 若 X 是一个具有分布函数 F 的非负随机变量, 则

$$\mathbb{E}[X]=\int_0^{+\infty}\overline{F}(x)\,\mathrm{d}x,\quad \mathbb{E}[X^n]=\int_0^{+\infty}nx^{n-1}\overline{F}(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 对非负整数值随机变量 N, 由无穷级数的 Fubini 定理,

$$\mathbb{E}[N]=\sum_{m=0}^{\infty}m\mathbb{P}(N=m)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}(N=m)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=k+1}^{\infty}\mathbb{P}(N=m)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(N>k).$$

对具有分布函数 F 的非负随机变量 X 与正整数 n, 由重积分的 Fubini 定理,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^n]&=\int_0^{+\infty}x^nf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^x nt^{n-1}\,\mathrm{d}t\right)f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}nt^{n-1}\left(\int_t^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}nx^{n-1}\overline{F}(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

习题 1.2 设 X 是一个具有分布函数 F 的连续型随机变量, 证明

(1) $F(X)$ 是 $(0,1)$ 上的均匀随机变量.

(2) 若 U 是 $(0,1)$ 上的均匀随机变量, 则 $F^{-1}(U)$ 具有分布 F, 这里 $F^{-1}(x)$ 是满足 $F(y)=x$ 的 y 值.

证明 (1) **(法一)** 考虑函数列 $F_n\downarrow F$, 其中每个 F_n 均为严格单调递增函数, 则对 $t\in(0,1)$ 有

$$\mathbb{P}(F_n(X)\leqslant t)=\mathbb{P}\big(X\leqslant F_n^{-1}(t)\big)=F\big(F_n^{-1}(t)\big).$$

而由单调收敛定理,

$$\mathbb{P}(F(X)\leqslant t)=\mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty}F_n(X)\leqslant t\Big)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(F_n(X)\leqslant t).$$

由于分布函数 F 具有右连续性,

$$\mathbb{P}(F(X)\leqslant t)=\lim_{n\to\infty}F\big(F_n^{-1}(t)\big)=t.$$

(法二) 定义函数

$$G(t)=\begin{cases}-\infty, & t=0,\\ \inf\{x:F(x)\geqslant t\}, & t\in(0,1),\\ +\infty, & t=1.\end{cases}$$

则对 $t\in(0,1)$ 有

$$\mathbb{P}(F(X)\leqslant t)=\mathbb{P}(X\leqslant G(t))=F(G(t))=t.$$

(2) 由所欲证, 不妨明确定义 $F^{-1}(t)=\inf\{x:F(x)\geqslant t\}$. 对 $t\in\mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(F^{-1}(U)\leqslant t\big) &\overset{\star}{=\!=}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\big\{U\leqslant F\big(t+\tfrac{1}{n}\big)\big\}\right)\xlongequal{\mathbb{P}\text{ 连续}}\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\big(U\leqslant F\big(t+\tfrac{1}{n}\big)\big)\\ &\xlongequal{\text{均匀分布}}\lim_{n\to\infty}F\big(t+\tfrac{1}{n}\big)\xlongequal{F\text{ 右连续}}F(t).\end{aligned}$$

$\star$ 的证明: 若 $F^{-1}(u)\leqslant t$, 则 $u\leqslant F(t)\leqslant F\big(t+\frac{1}{n}\big),\forall n\geqslant 1$. 反之, 若 $u\leqslant F\big(t+\frac{1}{n}\big),\forall n\geqslant 1$, 令 $n\to\infty$, 由 F 的右连续性得 $u\leqslant F(t)$, 再由 F^{-1} 递增得 $F^{-1}(u)\leqslant F^{-1}(F(t))\leqslant t$. $\square$

习题 1.6 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是独立同分布的连续型随机变量. 若 $X_n>\max\{X_1,\cdots,X_{n-1}\}$, 则称在时刻 n $(n>0)$ 产生了一个记录, X_n 为其记录值. 这里 $X_0\coloneqq-\infty$.

(1) 用 N_n 表示截至时刻 n 已产生的记录的个数. 求 $\mathbb{E}[N_n]$ 和 $\mathrm{Var}(N_n)$.

(2) 令 $T=\min\{n:n>1\text{ 且在时刻 }n\text{ 有一个记录}\}$. 求 $\mathbb{P}(T>n)$ 并证明 $\mathbb{P}(T<+\infty)=1,\mathbb{E}[T]=+\infty$.

(3) 用 T_y 表示首个大于 y 的记录值出现的时刻, 即 $T_y=\min\{n:X_n>y\}$. 证明 T_y 与 X_{T_y} 独立, 即取值首次大于 y 的时刻与它的值独立.

证明 (1) 令 $I_j=\begin{cases}1, & \text{在时刻 } j \text{ 有一个记录},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 则 $\mathbb{E}[N_n]=\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[I_j]$. 用 F 表示 X_j 的分布函数, 则

$$\mathbb{E}[I_j]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[I_j\,|\,X_j]]=\int_{\mathbb{R}}\mathbb{P}(I_j=1\,|\,X_j=t)\,\mathrm{d}F(t)=\int_{\mathbb{R}}[F(t)]^{j-1}\,\mathrm{d}F(t)=\int_0^1 x^{j-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{j},$$

因此 $\mathbb{E}[N_n]=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$. 由

$$\mathbb{P}(I_i=1,I_j=1)=\mathbb{P}(I_j=1\,|\,I_i=1)\mathbb{P}(I_i=1)=\mathbb{P}(I_i=1)\mathbb{P}(I_j=1),\quad\forall i<j$$

得

$$\mathbb{E}[I_iI_j]=\mathbb{P}(I_i=1,I_j=1)=\mathbb{P}(I_i=1)\mathbb{P}(I_j=1)=\mathbb{E}[I_i]\mathbb{E}[I_j],\quad\forall i<j.$$

因此 $\{I_j\}$ 两两独立. 于是

$$\mathrm{Var}(N_n)=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Var}(I_j)=\sum_{j=1}^{n}\Big(\mathbb{E}\big[I_j^2\big]-\mathbb{E}[I_j]^2\Big)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\left(1-\frac{1}{j}\right).$$

(2) $\mathbb{P}(T>n)=\mathbb{E}[\mathbb{P}(T>n)\,|\,X_1]=\int_{\mathbb{R}}\mathbb{P}(T>n\,|\,X_1=t)\,\mathrm{d}F(t)=\int_{\mathbb{R}}[F(t)]^{n-1}\,\mathrm{d}F(t)=\frac{1}{n}$. 因此

$$\mathbb{P}(T<+\infty)=1-\mathbb{P}(T=+\infty)=1-\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(T>n)=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1.$$

由习题 1.1, $\mathbb{E}[T]=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(T>n)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$.

(3) 由

$$\mathbb{P}\big(X_{T_y}>t\,\big|\,T_y=n\big)=\mathbb{P}(X_n>t\,|\,X_1\leqslant y,\cdots,X_{n-1}\leqslant y,X_n>y)$$

$$
\xlongequal{\{X_i\}\text{ 独立}} \mathbb{P}(X_n > t \mid X_n > y)
$$

$$
\xlongequal{\{X_i\}\text{ 同分布}} \begin{cases} 1, & t \leqslant y, \\ \dfrac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(y)}, & t > y \end{cases}
$$

与 n 无关即知 T_y 与 X_{T_y} 独立. □

习题 1.7 从含有 n 个白球和 m 个黑球的瓮中随机选取 k 个球, 以 X 记其中的白球数. 求 $\mathbb{E}[X]$ 和 $\mathrm{Var}(X)$.

解答 X 的期望

$$
\mathbb{E}[X] = \sum_{j=0}^{n} j \frac{\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}}{\binom{m+n}{k}} = n \sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{n-1}{j-1}\binom{m}{k-j}}{\binom{m+n}{k}} = n \sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{n-1}{j-1}\binom{m}{k-j}}{\frac{m+n}{k}\binom{m+n-1}{k-1}} = \frac{kn}{m+n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\binom{n-1}{j-1}\binom{m}{k-j}}{\binom{m+n-1}{k-1}} = \frac{kn}{m+n}.
$$

X 的方差

$$
\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X](1 - \mathbb{E}[X]),
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{j=0}^{n} (j-1) j \frac{\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}}{\binom{m+n}{k}} = n \sum_{j=0}^{n} (j-1) \frac{\binom{n-1}{j-1}\binom{m}{k-j}}{\binom{m+n}{k}} = n(n-1) \sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{n-2}{j-2}\binom{m}{k-j}}{\binom{m+n}{k}} \\
&= n(n-1) \sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{n-2}{j-2}\binom{m}{k-j}}{\frac{(m+n)(m+n-1)}{k(k-1)}\binom{m+n-2}{k-2}} = \frac{n(n-1)k(k-1)}{(m+n)(m+n-1)},
\end{aligned}
$$

因此

$$
\mathrm{Var}(X) = \frac{n(n-1)k(k-1)}{(m+n)(m+n-1)} + \frac{kn}{m+n}\left(1 - \frac{kn}{m+n}\right) = \frac{kmn(m+n-k)}{(m+n)^2(m+n-1)}.
$$

□

习题 1.12 设 $\mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant a) = 1$, 证明

$$
\mathrm{Var}(X) \leqslant \frac{a^2}{4}.
$$

证明 不妨设 $a > 0$. 令 $Y = \dfrac{X}{a}$, 则 $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(aY) = a^2 \mathrm{Var}(Y)$. 利用 $Y^2 \leqslant Y$ 可得

$$
\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}\left[Y^2\right] - \mathbb{E}[Y]^2 \leqslant \mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[Y]^2 \leqslant \frac{1}{4},
$$

于是 $\mathrm{Var}(X) \leqslant \dfrac{a^2}{4}$. □

习题 1.14 掷一个匀质骰子直至出现 10 次偶数, 记掷出 i 的次数为 X_i. 求

(1) $\mathbb{E}[X_1]$.

(2) $\mathbb{E}[X_2]$.

(3) X_1 的概率质量函数.

(4) X_2 的概率质量函数.

解答 (1) 用 Y_j 表示第 $j-1$ 个与第 j 个偶数之间 1 的个数. 记 $A=\{1\text{ 比偶数先出现}\}$, 则

$$\mathbb{P}(A)=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\mathbb{P}(A) \implies \mathbb{P}(A)=\frac{1}{4}.$$

由全期望公式

$$\mathbb{E}[Y_j]=\mathbb{E}[Y_j\mid A]\mathbb{P}(A)+\mathbb{E}[Y_j\mid A^{\mathrm{c}}]\mathbb{P}(A^{\mathrm{c}})=\frac{1}{4}(1+\mathbb{E}[Y_j])+\frac{3}{4}\cdot 0,$$

因此 $\mathbb{E}[Y_j]=\dfrac{1}{3}$, 从而

$$\mathbb{E}[X_1]=\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{10}Y_j\right]=\frac{10}{3}.$$

(2) 用 Z_j 表示第 $j-1$ 个与第 j 个偶数之间 (左开右闭) 2 的个数. 记 $B_j=\{\text{第 } j \text{ 个偶数为 } 2\}$, 则

$$\mathbb{E}[Z_j]=\mathbb{E}[Z_j\mid B_j]\mathbb{P}(B_j)+\mathbb{E}\big[Z_j\bigm| B_j^{\mathrm{c}}\big]\mathbb{P}\big(B_j^{\mathrm{c}}\big)=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot 0.$$

于是

$$\mathbb{E}[X_2]=\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{10}Z_j\right]=\frac{10}{3}.$$

(3) 沿用 (1) 中记号, 则 Y_j 的母函数

$$G_{Y_j}(s)=\mathbb{E}\big[s^{Y_j}\big]=\mathbb{E}\big[s^{Y_j}\bigm| A\big]\mathbb{P}(A)+\mathbb{E}\big[s^{Y_j}\bigm| A^{\mathrm{c}}\big]\mathbb{P}(A^{\mathrm{c}})=\frac{1}{4}sG_{Y_j}(s)+\frac{3}{4} \implies G_{Y_j}(s)=\frac{3}{4-s}.$$

由于 $\{Y_j\}_{j=1}^{10}$ 相互独立, $X_1=\displaystyle\sum_{j=1}^{10}Y_j$ 的母函数

$$G_{X_1}(s)=[G_{Y_1}(s)]^{10}=\left(\frac{3}{4-s}\right)^{10}.$$

而

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{4-s}\right)^{10}&=\left(\frac{4}{3}-\frac{s}{3}\right)^{-10}=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-10}{j}\left(\frac{4}{3}\right)^{-10-j}\left(-\frac{s}{3}\right)^{j}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{10\cdot 11\cdots(9+j)}{j!}\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{j}s^j\\&=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{9+j}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{j}s^j,\end{aligned}$$

因此

$$\mathbb{P}(X_1=j)=\binom{9+j}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{j},\quad j=0,1,2,\cdots.$$

(4) 沿用 (2) 中记号, 则 Z_j 的母函数

$$G_{Z_j}(s)=\mathbb{E}\big[s^{Z_j}\big]=\mathbb{E}\big[s^{Z_j}\bigm| B_j\big]\mathbb{P}(B_j)+\mathbb{E}\big[s^{Z_j}\bigm| B_j^{\mathrm{c}}\big]\mathbb{P}\big(B_j^{\mathrm{c}}\big)=\frac{1}{3}s+\frac{2}{3}.$$

由于 $\{Z_j\}_{j=1}^{10}$ 相互独立, $X_2=\sum\limits_{j=1}^{10} Z_j$ 的母函数

$$G_{X_2}(s)=[G_{Z_1}(s)]^{10}=\left(\frac{s+2}{3}\right)^{10}=\sum_{j=0}^{10}\binom{10}{j}\frac{2^{10-j}}{3^{10}}s^j,$$

由此可得

$$\mathbb{P}(X_2=j)=\begin{cases}\dbinom{10}{j}\dfrac{2^{10-j}}{3^{10}}, & j=0,1,\cdots,10,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

□

习题 1.16 设 $f(x), g(x)$ 为概率密度函数, 且存在常数 c, 使得对任意 x 均有 $f(x)\leqslant cg(x)$. 假设可生成以 g 为密度函数的随机变量, 考虑以下算法:

第 1 步 生成以 g 为密度函数的随机变量 Y.

第 2 步 生成 $(0,1)$ 上的均匀随机变量 U.

第 3 步 若 $U\leqslant \dfrac{f(Y)}{cg(Y)}$, 则令 $X=Y$. 否则返回第 1 步.

假定相继生成的随机变量相互独立, 证明:

(1) X 具有密度函数 f.

(2) 此算法生成 X 所需迭代次数服从期望为 c 的几何分布.

证明 每一轮生成 X 的概率

$$\begin{aligned} p&=\mathbb{P}\left(U\leqslant\frac{f(Y)}{cg(Y)}\right)=\mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(U\leqslant\frac{f(Y)}{cg(Y)}\,\middle|\,Y\right)\right]=\int_{\mathbb{R}}\mathbb{P}\left(U\leqslant\frac{f(y)}{cg(y)}\right)g(y)\,\mathrm{d}y\\ &=\int_{\mathbb{R}}\frac{f(y)}{cg(y)}\cdot g(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}}f(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{c}.\end{aligned}$$

记此算法生成 X 所需迭代次数为 N, 由独立性, $N\sim\mathrm{Geo}\left(\frac{1}{c}\right)$, 其期望

$$\mathbb{E}[N]=\sum_{n=1}^{\infty}np(1-p)^{n-1}=-p\sum_{n=1}^{\infty}[(1-x)^n]'\big|_{x=p}=-p\left[\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n\right]'\Bigg|_{x=p}=c.$$

X 的分布函数

$$\begin{aligned} F_X(y)&=\mathbb{P}\left(Y\leqslant y\,\middle|\,U\leqslant\frac{f(Y)}{cg(Y)}\right)=\frac{1}{p}\mathbb{P}\left(Y\leqslant y, U\leqslant\frac{f(Y)}{cg(Y)}\right)\\ &=c\int_{\mathbb{R}}\mathbb{P}\left(Y\leqslant y, U\leqslant\frac{f(Y)}{cg(Y)}\,\middle|\,Y=t\right)g(t)\,\mathrm{d}t\\ &=c\int_{-\infty}^{y}\mathbb{P}\left(U\leqslant\frac{f(t)}{cg(t)}\right)g(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{y}f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

这说明 X 具有密度函数 f. 注意上述推导中两处用到了 $0\leqslant\dfrac{f(x)}{cg(x)}\leqslant 1, \forall x\in\mathbb{R}$. □

习题 1.18 连续抛一枚硬币, 正面朝上的概率为 p. 求得到连续 r 个正面时总抛掷次数的期望.

解答 用 N 表示得到连续 r 个正面时的总抛掷次数. 设 T 为第一次反面朝上的时刻, 则

$$\mathbb{E}[N \mid T=m] = \begin{cases} m + \mathbb{E}[N], & m \leqslant r, \\ r, & m > r. \end{cases}$$

由 $T \sim \mathrm{Geo}(1-p)$ 即得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N \mid T]] &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}[N \mid T=m]\mathbb{P}(T=m) \\
&= \sum_{m=1}^{r} (m+\mathbb{E}[N])p^{m-1}(1-p) + \sum_{m=r+1}^{\infty} rp^{m-1}(1-p) \\
&= (1-p)\sum_{m=1}^{r} (m+\mathbb{E}[N])p^{m-1} + r(1-p)\sum_{m=r+1}^{\infty} p^{m-1} \\
&= \frac{1-p^r-rp^r(1-p)}{1-p} + (1-p^r)\mathbb{E}[N] + rp^r \\
&= \frac{1-p^r}{1-p} + (1-p^r)\mathbb{E}[N],
\end{aligned}$$

由此可得

$$\mathbb{E}[N] = \frac{1-p^r}{p^r(1-p)}.$$

□

习题 1.19 一个瓮中有 a 个白球和 b 个黑球. 每次抽取一个球, 若是白球则放回; 若是黑球则用另一瓮中的白球来替换. 用 M_n 表示进行 n 次操作后瓮中白球数的期望.

(1) 推导递推方程

$$M_{n+1} = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)M_n + 1.$$

(2) 利用 (1) 证明:

$$M_n = a+b-b\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n.$$

(3) 求第 $n+1$ 次抽到白球的概率.

解答 (1) 用 A_n 表示第 n 次操作后瓮中的白球数, 则

$$\begin{aligned}
M_{n+1} = \mathbb{E}[\mathbb{E}[A_{n+1} \mid A_n]] &= \sum_{k=a}^{\infty} \mathbb{E}[A_{n+1} \mid A_n = k]\mathbb{P}(A_n=k) \\
&= \sum_{k=a}^{\infty} \mathbb{P}(A_n=k)\left[\frac{k}{a+b}\cdot k + \frac{a+b-k}{a+b}(k+1)\right] \\
&= \sum_{k=a}^{\infty} \mathbb{P}(A_n=k)\left[\left(1-\frac{1}{a+b}\right)k+1\right] \\
&= \left(1-\frac{1}{a+b}\right)M_n + 1.
\end{aligned}$$

(2) 由

$$M_{n+1}-(a+b) = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)[M_n-(a+b)]$$

及初值

$$M_1=\frac{a}{a+b}\cdot a+\frac{b}{a+b}\cdot(a+1)=a+\frac{b}{a+b}$$

即得

$$M_n=a+b-b\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n,\quad n\geqslant 1.$$

(3) 记 $B_n=\{$第 n 次抽到白球$\}$, 则

$$\mathbb{P}(B_{n+1})=\sum_{k=a}^{a+b}\mathbb{P}(B_{n+1}\mid A_n=k)\mathbb{P}(A_n=k)=\sum_{k=a}^{a+b}\frac{k}{a+b}\cdot\mathbb{P}(A_n=k)=\frac{M_n}{a+b}.$$

□

习题 1.21 设 $U_1,U_2,\cdots$ 为独立的 $(0,1)$ 均匀随机变量, 用 N 表示使得下式成立的 n $(n\geqslant 0)$ 的最小值:

$$\prod_{i=1}^{n}U_i\geqslant \mathrm{e}^{-\lambda}>\prod_{i=1}^{n+1}U_i,\quad 这里\prod_{i=1}^{0}U_i\coloneqq 1.$$

证明 N 是以 λ 为期望的 Poisson 随机变量.

证明 $\mathbb{P}(N=0)=\mathbb{P}\big(1\geqslant \mathrm{e}^{-\lambda}>U_1\big)=\mathbb{P}\big(U_1<\mathrm{e}^{-\lambda}\big)=\mathrm{e}^{-\lambda}$. 下设 $\mathbb{P}(N=n)=\dfrac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}$ 对 $n=k$ 成立, 考虑 $n=k+1$, 有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N=k+1)&=\int_0^1\mathbb{P}\left(U_1\geqslant\mathrm{e}^{-\lambda},\cdots,\prod_{i=1}^{k+1}U_i\geqslant\mathrm{e}^{-\lambda},\prod_{i=1}^{k+2}U_i<\mathrm{e}^{-\lambda}\,\middle|\,U_1=t\right)\mathrm{d}t\\
&=\int_{\mathrm{e}^{-\lambda}}^1\mathbb{P}\left(U_2\geqslant\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{t},\cdots,\prod_{i=2}^{k+1}U_i\geqslant\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{t},\prod_{i=2}^{k+2}U_i<\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{t}\right)\mathrm{d}t\\
&=\int_{\mathrm{e}^{-\lambda}}^1\mathbb{P}\left(U_2\geqslant\mathrm{e}^{-(\lambda+\ln t)},\cdots,\prod_{i=2}^{k+1}U_i\geqslant\mathrm{e}^{-(\lambda+\ln t)},\prod_{i=2}^{k+2}U_i<\mathrm{e}^{-(\lambda+\ln t)}\right)\mathrm{d}t\\
&=\int_{\mathrm{e}^{-\lambda}}^1\frac{(\lambda+\ln t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-(\lambda+\ln t)}\,\mathrm{d}t\\
&\xlongequal{v=\lambda+\ln t}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}\int_0^\lambda v^k\,\mathrm{d}v\\
&=\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}\mathrm{e}^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

归纳即得

$$\mathbb{P}(N=n)=\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad n\geqslant 0.$$

故 N 是以 λ 为期望的 Poisson 随机变量. □

习题 1.25 赌徒每次赌博等可能地赢一个单位或输一个单位, 开始时财富为 i. 证明他的财富变为 0 或 k 的时间期望为 $i(k-i),i=0,\cdots,k$.

证明 用 T_i 表示初始财富为 i 时的时间期望, 记 $A=\{$第一次赢$\}$, 则

$$T_i=(1+T_{i-1})\mathbb{P}(A)+(1+T_{i+1})\mathbb{P}(A^{\mathrm{c}})\implies T_{i+1}-T_i=T_i-T_{i-1}-2.$$

由边值条件 $T_0 = T_k = 0$ 及 $T_1 = T_{k-1}$ 得

$$T_k - T_{k-1} = T_{k-1} - T_{k-2} - 2 = \cdots = T_1 - T_0 - 2(k-1) \implies T_1 = k-1.$$

进而

$$T_i = (T_1 - T_0) + (T_2 - T_1) + \cdots + (T_i - T_{i-1}) = (k-1) + (k-3) + \cdots + [k-(2i-1)] = i(k-i). \qquad \square$$

习题 1.26 在一次选举中, A 得到 n 张选票, B 得到 m 张选票, 其中 $n > m$. 假设选票的一切排列次序都是等可能的, 求 A 在计票过程中从不落后的概率.

解答 记所求概率为 $p_{n,m}$. 记 $A = \{\text{A 得最后一张选票}\}$, 则

$$p_{n,m} = \mathbb{P}(\text{A 从不落后} \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\text{A 从不落后} \mid A^{\mathrm{c}})\mathbb{P}(A^{\mathrm{c}}) = \frac{n}{n+m} \cdot p_{n-1,m} + \frac{m}{n+m} \cdot p_{n,m-1}.$$

下面归纳证明 $p_{n,m} = \dfrac{n}{n+m}$. 这在 $n+m=1$ 即 $n=1, m=0$ 时成立, 现假设它在 $n+m=k$ 时成立, 则当 $n+m=k+1$ 时,

$$p_{n,m} = \frac{n}{n+m} \cdot p_{n-1,m} + \frac{m}{n+m} \cdot p_{n,m-1} = \frac{n}{n+m} \cdot \frac{n-1}{n+m-1} + \frac{m}{n+m} \cdot \frac{n}{n+m-1} = \frac{n}{n+m}.$$

故 $p_{n,m} = \dfrac{n}{n+m}$ 得证. $\square$

习题 1.27 赌徒每次赌博赢一个单位和输一个单位的概率分别为 p 和 $1-p$, 开始时财富为 n. 求他在破产前恰好赌 $n+2i$ 次的概率.

解答 记 $A = \{\text{破产前恰好赌}\, n+2i \text{ 次}\}$, $B = \{n+2i \text{ 次赌博恰输}\, n+i \text{ 次}\}$, 则

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) = \binom{n+2i}{i} p^i (1-p)^{n+i} \cdot \mathbb{P}(A \mid B).$$

现以最后一次赌博为起点逆向考虑, 赌徒需要 "赢" (即原来 "输" 的逆过程)$n+i$ 次, "输" (即原来 "赢" 的逆过程)i 次, 且 "赢" 的次数始终领先于 "输" 的次数 (否则与赌徒在破产前恰好赌 $n+2i$ 次矛盾). 利用投票问题即知 $\mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{n}{n+2i}$, 进而

$$\mathbb{P}(A) = \binom{n+2i}{i} p^i (1-p)^{n+i} \frac{n}{n+2i}. \qquad \square$$

习题 1.30 系统有两个服务台, 服务员 i 给顾客提供的服务时间 $\sim \mathrm{Exp}(\lambda_i)$ $(i=1,2)$. 采用 FIFO 规则. 当 A 到达系统时, 发现 B 和 C 分别占据服务台 1 和 2, 求 A 最后离开的概率.

解答 记 B 比 C 先离开的概率为 p, 习题 1.31 中已求得 $p = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$. 由指数分布的无记忆性,

$$\mathbb{P}(\text{A 最后离开}) = p(1-p) + (1-p)p = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}. \qquad \square$$

习题 1.31 设 X 和 Y 是独立的指数随机变量, 期望分别为 $\dfrac{1}{\lambda_1}$ 和 $\dfrac{1}{\lambda_2}$. 求 $Z = \min\{X, Y\}$ 的分布与给定 $Z = X$ 时 Z 的条件分布.

解答 由

$$\mathbb{P}(Z>z)=\mathbb{P}(X>z,Y>z)=\mathbb{P}(X>z)\mathbb{P}(Y>z)=\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}$$

即得 Z 的分布函数

$$F_Z(z)=1-\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}.$$

给定 $Z=X$ 时 Z 的条件分布

$$\mathbb{P}(Z\leqslant z\,|\,Z=X)=\mathbb{P}(X\leqslant z\,|\,Y\geqslant X)=\frac{\mathbb{P}(X\leqslant z,Y\geqslant X)}{\mathbb{P}(Y\geqslant X)},\quad z\geqslant 0,$$

其中 RHS 的分子

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\leqslant z,Y\geqslant X)&=\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(X\leqslant z,X\leqslant Y\,|\,Y=y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{z}\mathbb{P}(X\leqslant y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y+\int_z^{+\infty}\mathbb{P}(X\leqslant z)f_Y(y)\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{z}\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 y}\big)\lambda_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}\,\mathrm{d}y+\int_z^{+\infty}\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 z}\big)\lambda_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}\,\mathrm{d}y\\&=1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 z}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\Big[\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}-1\Big]+\mathrm{e}^{-\lambda_2 z}\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 z}\big)\\&=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\Big[1-\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}\Big],\end{aligned}$$

而 RHS 的分母

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y\geqslant X)=\mathbb{E}[\mathbb{P}(Y\geqslant X\,|\,X)]&=\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(Y\geqslant X\,|\,X=x)f_X(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_2 x}\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\,\mathrm{d}x=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}.\end{aligned}$$

故

$$\mathbb{P}(Z\leqslant z\,|\,Z=X)=1-\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}.$$

□

习题 1.34 设 X_1 和 X_2 是独立的非负连续型随机变量, 证明

$$\mathbb{P}(X_1<X_2\,|\,\min\{X_1,X_2\}=t)=\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_1(t)+\lambda_2(t)},$$

其中 $\lambda_i(t)$ 是 X_i 的失效率函数.

证明 我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_1<X_2\,|\,\min\{X_1,X_2\}=t)=\frac{\mathbb{P}(X_1<X_2,\min\{X_1,X_2\}=t)}{\mathbb{P}(\min\{X_1,X_2\}=t)}\\=&\frac{\mathbb{P}(X_1=t,X_2>t)}{\mathbb{P}(X_1=t,X_2>t)+\mathbb{P}(X_2=t,X_1>t)}=\frac{\mathbb{P}(X_1=t)\mathbb{P}(X_2>t)}{\mathbb{P}(X_1=t)\mathbb{P}(X_2>t)+\mathbb{P}(X_2=t)\mathbb{P}(X_1>t)}\\=&\frac{\frac{\mathbb{P}(X_1=t)}{\mathbb{P}(X_1>t)}}{\frac{\mathbb{P}(X_1=t)}{\mathbb{P}(X_1>t)}+\frac{\mathbb{P}(X_2=t)}{\mathbb{P}(X_2>t)}}=\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_1(t)+\lambda_2(t)}.\end{aligned}$$

□

习题 1.38 一个粒子每一步等可能地按顺或逆时针移动一个位置, 即

$$\mathbb{P}(X_{k+1}=i+1\,|\,X_k=i)=\mathbb{P}(X_{k+1}=i-1\,|\,X_k=i)=\frac{1}{2},\quad \forall n\geqslant 0,$$

其中 X_k 表示粒子在第 k 步后的位置. 已知 $X_0=0$, 求所有状态 $1,2,\cdots,n$ 均被访问过时步数的期望.

解答 用 S_i 表示所有状态中已有 i 个被访问时的最小步数, 记 $Y_i=S_{i+1}-S_i$. 考虑刚有 i $(i<n)$ 个被访问的情形, 注意到这 i 个位置相邻, 记当前位置为 1, 按连通次序记其余已访问位置为 $2,\cdots,i$, 再将与它们相邻的两个位置 (可能重合) 分别标记为 $0,i+1$, 则由习题 1.25,

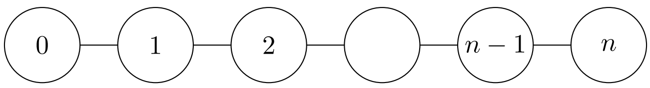
$$\mathbb{E}[Y_i]=\mathbb{E}[\text{财富变为 }0\text{ 或 }i+1\text{ 的时间}\,|\,\text{初始财富为 }1]=i.$$

于是

$$\mathbb{E}[S_n]=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}Y_i\right]=\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}.$$

□

习题 1.39 一个粒子沿着下图移动, 每一步等可能地移向它的任一邻点.



设粒子从 0 出发, 证明它到达 n 的步数的期望为 n^2.

证明 用 $S_{i:k}$ 表示粒子从 i 出发 (首次) 到达 k $(i\leqslant k)$ 的步数的期望, 则

$$S_{i:k}=\frac{1}{2}(S_{i-1:k}+1)+\frac{1}{2}(S_{i+1:k}+1)=\frac{1}{2}(S_{i-1:k}+S_{i+1:k})+1,\quad 1\leqslant i\leqslant n-1,$$

也即

$$S_{i+1:k}-S_{i:k}=S_{i:k}-S_{i-1:k}-2,\quad 1\leqslant i\leqslant n-1.$$

结合 $S_{0:k}=S_{1:k}+1$ 与 $S_{k:k}=0$ 累加可得

$$S_{k:k}-S_{k-1:k}=S_{1:k}-S_{0:k}-2(k-1)\implies S_{k-1:k}=2k-1.$$

于是粒子从 0 出发到达 n 的步数的期望为

$$S_{1:0}+S_{2:1}+\cdots+S_{n:n-1}=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2.$$

□

习题 2.4 设 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程. 求 $\mathbb{E}[N(t)N(t+s)]$.

解答 利用 Poisson 过程的独立增量性与平稳增量性, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N(t)N(t+s)]&=\mathbb{E}\big[N(t)[N(t+s)-N(t)]+N(t)^2\big]\\&\xlongequal{\text{独立增量性}}\mathbb{E}[N(t)]\mathbb{E}[N(t+s)-N(t)]+\mathbb{E}\big[N(t)^2\big]\\&\xlongequal{\text{平稳增量性}}\mathbb{E}[N(t)]\mathbb{E}[N(s)]+\mathrm{Var}(N(t))+\mathbb{E}[N(t)]^2\\&=\lambda t\cdot\lambda s+\lambda t+(\lambda t)^2.\end{aligned}$$

□

习题 2.5 设 $\{N_1(t), t \geqslant 0\}$ 和 $\{N_2(t), t \geqslant 0\}$ 是独立的 Poisson 过程, 强度分别为 λ_1 和 λ_2. 证明:

(1) $\{N_1(t)+N_2(t)\}$ 是强度为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 过程.

(2) 此联合过程的首个事件来自 $\{N_1(t), t \geqslant 0\}$ 的概率为 $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$, 且与此事件发生时刻独立.

证明 (1) $N(t) \coloneqq N_1(t)+N_2(t)$ 是计数过程, 且

◇ $N(0)=N_1(0)+N_2(0)=0+0=0$.

◇ 过程具有独立增量性:

$$N(t+s)-N(t)=[N_1(t+s)-N_1(t)]+[N_2(t+s)-N_2(t)] \xlongequal{\mathrm{d}} N_1(s)+N_2(s), \quad \forall t,s \geqslant 0.$$

◇ 过程具有平稳增量性:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N(t+s)-N(t)=n)\\
=&\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(N_1(t+s)-N_1(t)=k, N_2(t+s)-N_2(t)=n-k)\\
=&\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(N_1(t+s)-N_2(t)=k \,|\, N_2(t+s)-N_1(t)=n-k) \cdot \mathbb{P}(N_2(t+s)-N_2(t)=n-k)\\
=&\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(N_1(s)=k) \cdot \mathbb{P}(N_2(s)=n-k)\\
=&\sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda_1 s)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda_1 s} \cdot \frac{(\lambda_2 s)^{n-k}}{(n-k)!}\mathrm{e}^{-\lambda_2 s}\\
=&\sum_{k=0}^{n} \frac{[(\lambda_1+\lambda_2)s]^n}{n!}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)s} \quad (\text{与 } t \text{ 无关}).
\end{aligned}$$

故 $N_1(t)+N_2(t) \sim \mathrm{HPP}(\lambda_1+\lambda_2)$.

(2) 记 $A=\{$联合过程的首个事件来自 $\{N_1(t), t \geqslant 0\}\}$, 分别用 S_1, S_2, S 表示过程 1、过程 2、联合过程的首个事件发生时刻, 则

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \,|\, S=s)=\mathbb{P}(S_1<S_2 \,|\, S=s) &= \lim_{\Delta s \to 0+} \frac{\mathbb{P}(S_1<S_2, S \in [s, s+\Delta s])}{\mathbb{P}(S \in [s, s+\Delta s])}\\
&= \lim_{\Delta s \to 0+} \frac{\mathbb{P}(S_1 \in [s, s+\Delta s], S_2>s)}{\mathbb{P}(S \in [s, s+\Delta s])} = \lim_{\Delta s \to 0+} \frac{\mathbb{P}(S_1 \in [s, s+\Delta s])\mathbb{P}(S_2>s)}{\mathbb{P}(S \in [s, s+\Delta s])}\\
&= \lim_{\Delta s \to 0+} \frac{\lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 s}\Delta s \cdot \mathrm{e}^{-\lambda_2 s}}{(\lambda_1+\lambda_2)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)s}\Delta s} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}.
\end{aligned}$$

由此可见 A 与 S 独立. □

习题 2.14 考虑一个从地下室开始向上运行的电梯, 用 N_i 表示在第 i 层进入电梯的人数. 假设 N_i 相互独立且 $N_i \sim \mathrm{Poi}(\lambda_i)$, 在第 i 层进入电梯的每个人相互独立地以概率 P_{ij} 在第 j 层走出电梯, $\sum\limits_{j>i} P_{ij}=1$. 用 O_j 表示在第 j 层走出电梯的人数.

(1) 求 $\mathbb{E}[O_j]$.

(2) 求 O_j 的分布.

(3) 求 O_j 与 O_k 的联合分布.

解答 考虑从第 i 层进入电梯的人群, 将他们当中从第 j 层走出电梯的划入 $[i:j]$ 型, 则每个人被划入 $[i:j]$ 型的概率为 P_{ij}, 进而 $C_{ij} \coloneqq \sharp\{[i:j]\text{ 型人}\} \sim \mathrm{Poi}(\lambda_i P_{ij})$, 且对固定的 i, $\{C_{ij}\}_{j>i}$ 相互独立. 再由 $N_i = \sum\limits_{j>i} C_{ij}$, 且 N_i 相互独立知, $\{C_{ij}\}_{j>i\geqslant 1}$ 相互独立.

(1) $\mathbb{E}[O_j] = \mathbb{E}\left[\sum\limits_{i=0}^{j-1} C_{ij}\right] = \sum\limits_{i=0}^{j-1} \lambda_i P_{ij}$.

(2) 由于 $O_j = \sum\limits_{i=0}^{j-1} C_{ij}$ 是 j 个独立的 Poisson 随机变量之和, $O_j \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, 其中 $\lambda = \sum\limits_{i=0}^{j-1} \lambda_i P_{ij}$.

(3) 当 $j \neq k$ 时, $O_j = \sum\limits_{i=0}^{j-1} C_{ij}$ 与 $O_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} C_{ij}$ 的求和项无共同项, 由 $\{C_{ij}\}_{j>i}$ 独立知 $O_j \perp O_k$. □

习题 2.15 考虑一个 r 面硬币, 假设每次抛掷恰出现其中一面, 第 i 面出现的概率为 P_i, $\sum\limits_{i=1}^{r} P_i = 1$. 对于给定的数 $n_1, \cdots, n_r$, 用 N_i 表示第 i 面恰出现 n_i 次时的抛掷数, 并设 $N = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{N_i\}$.

(1) 求 N_i 的分布.

(2) 这些 N_i 是否独立?

现设抛掷按照由强度 $\lambda = 1$ 的 Poisson 过程生成的随机时间进行, 用 T_i 表示第 i 面出现 n_i 次所用时间, 并令 $T = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{T_i\}$.

(3) 求 T_i 的分布.

(4) 这些 T_i 是否独立?

(5) 求 $\mathbb{E}[T]$ 的表达式.

(6) 利用 (5) 求 $\mathbb{E}[N]$ 的表达式.

解答 (1) $\mathbb{P}(N_i = k) = \begin{cases} \dbinom{k-1}{n_i-1} P_i^{n_i}(1-P_i)^{k-n_i}, & k \geqslant n_i, \\ 0, & k < n_i. \end{cases}$

(2) 不独立, 如当 $n_1, n_2 \geqslant 1$ 时, $\mathbb{P}(N_1 = n_1) > 0$, $\mathbb{P}(N_2 = n_2) > 0$ 但 $\mathbb{P}(N_1 = n_1, N_2 = n_2) = 0$.

(3) 用 $X_k^{(i)}$ 表示第 i 面第 k 次出现与第 $k-1$ 次出现的时间差. 对于每次抛掷, 将结果为第 i 面的划入 i 型事件, 相应概率为 P_i, 则第 i 面出现的时刻 $\sim \mathrm{HPP}(\lambda P_i) = \mathrm{HPP}(P_i)$, 进而 $X_k^{(i)} \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Exp}(P_i)$. 因此 $T_i = \sum\limits_{k=1}^{n_i} X_k^{(i)}$ 为 n_i 个独立的指数分布随机变量之和, $T_i \sim \Gamma(n_i, P_i)$.

(4) 根据 Poisson 过程事件分类性质, 对于不同的 i, $X_k^{(i)}$ 相互独立, 进而 T_i 相互独立.

(5) 我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T > t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_1 > t, \cdots, T_r > t)\,\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{(4)} \int_0^{+\infty} \prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}(T_i > t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^{r} \int_t^{+\infty} \frac{P_i \mathrm{e}^{P_i s}(P_i s)^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

(6) 用 X_i 表示第 i 次抛掷与第 $i-1$ 次抛掷的时间差, 则 $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$, $\mathbb{E}[X_1] = \dfrac{1}{\lambda} = 1$. 而 $\{N=n\}$ 与 $X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots$ 独立, 即 N 为 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的停时, 又 $\mathbb{E}[N] \leqslant \sum\limits_{i=1}^{r} n_i < +\infty$. 由 Wald 等式,

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[N].$$

□

习题 2.16 假设要开展的试验次数 $N \sim \text{Poi}(\lambda)$, 每次试验有 n 种可能的结果且不同试验结果独立, 结果为 i 的概率为 P_i, $\sum\limits_{i=1}^{n} P_i = 1$. 用 X_j 表示这 n 种结果中恰出现 j 次的个数, $j \geqslant 1$. 求 $\mathbb{E}[X_j]$ 和 $\text{Var}(X_j)$.

解答 设 $N^*(t) \sim \text{HPP}(\lambda)$, 则 $N^*(1) \overset{\text{d}}{=} N$. 将每次试验的结果视作一个事件, 将结果为 i 的事件划入 i 型, 其概率为 P_i. 用 $N_i^*(t)$ 表示直至时刻 t 的 i 型事件数, 记 $A_i = \{N_i^*(1) = j\}$. 根据 Poisson 过程事件分类性质, $N_i^*(1) \sim \text{Poi}(\lambda P_i)$ 且 N_i 相互独立. 于是

$$\mathbb{E}[X_j] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(N_i^*(1) = j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\lambda P_i)^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda P_i}.$$

由 N_i 相互独立,

$$\mathbb{E}\left[X_j^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} + 2\sum_{i<j} \mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{A_j}\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + 2\sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j),$$

进而

$$\begin{aligned}\text{Var}(X_j) = \mathbb{E}\left[X_j^2\right] - \mathbb{E}[X_j]^2 &= \left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + 2\sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)\right] - \left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)[1 - \mathbb{P}(A_i)] = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{(\lambda P_i)^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda P_i}\right]\left[1 - \frac{(\lambda P_i)^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda P_i}\right].\end{aligned}$$

□

习题 2.17 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为独立同分布的连续型随机变量, 共同密度函数为 f. 用 $X_{(i)}$ 表示 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中第 i 小者.

(1) 注意为使 $X_{(i)} = x$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中必须恰有 $i-1$ 个小于 x, 1 个等于 x, $n-i$ 个大于 x. 由此证明 $X_{(i)}$ 的密度函数为

$$f_{X_{(i)}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}[F(x)]^{i-1}\left[\overline{F}(x)\right]^{n-i} f(x).$$

(2) $X_{(i)} < x$ 当且仅当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中有多少个小于 x?

(3) 利用 (2) 求 $\mathbb{P}\big(X_{(i)} \leqslant x\big)$ 的表达式.

(4) 利用 (1) 和 (3) 证明：对 $y \in [0,1]$, 有

$$\sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k} = \int_0^y \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1}(1-x)^{n-i}\,\mathrm{d}x.$$

(5) 用 S_i 表示 Poisson 过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 第 i 个事件发生的时刻. 求 $\mathbb{E}[S_i \mid N(t)=n]$.

解答 (1) 如题所述,

$$\begin{aligned} f_{X_{(i)}}(x) &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\mathbb{P}\big(X_{(i)} \in [x, x+\Delta x]\big)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \binom{n}{i}\binom{i}{1}[F(x)]^{i-1}\big[\overline{F}(x)\big]^{n-i} \cdot \frac{\mathbb{P}(X_1 \in [x, x+\Delta x])}{\Delta x} \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}[F(x)]^{i-1}\big[\overline{F}(x)\big]^{n-i} f(x). \end{aligned}$$

(2) $X_{(i)} < x$ 当且仅当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中有至少 i 个小于 x.

(3) $\mathbb{P}\big(X_{(i)} \leqslant x\big) = \mathbb{P}(X_1, \cdots, X_n$ 中至少 i 个不超过 $x) = \displaystyle\sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} [F(x)]^k \big[\overline{F}(x)\big]^{n-k}$.

(4) 由 (1) 可知,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(X_{(i)} \leqslant x\big) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}[F(t)]^{i-1}\big[\overline{F}(t)\big]^{n-i} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}[F(t)]^{i-1}[1-F(t)]^{n-i}\,\mathrm{d}F(t) \\ &\xlongequal{u=F(t)} \int_{0}^{F(x)} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} u^{i-1}(1-u)^{n-i}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

由于 $F(x) \in [0,1]$, 作替换 $y = F(x)$, 结合 (3) 即得证.

(5) 由于 $[(S_1, \cdots, S_n) \mid N(t)=n] \overset{\mathrm{d}}{=} \big(U_{(1)}, \cdots, U_{(n)}\big)$, 其中 $U_1, \cdots, U_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,t)$, $U_{(1)} < \cdots < U_{(n)}$ 为 $U_1, \cdots, U_n$ 的次序统计量. 因此当 $i \leqslant n$ 时,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_i \mid N(t)=n] = \mathbb{E}\big[U_{(i)}\big] &\xlongequal{(1)} \int_0^t x \cdot \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\Big(\frac{x}{t}\Big)^{i-1}\Big(1-\frac{x}{t}\Big)^{n-i}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{\frac{x}{t}\to x} \frac{it}{n+1}\int_0^1 \frac{(n+1)!}{(i+1-1)!(n-i)!} x^i (1-x)^{(n+1)-(i+1)}\,\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{(4)} \frac{it}{n+1}\sum_{k=i+1}^{n+1}\binom{n+1}{k} y^k (1-y)^{n+1-k}\Bigg|_{y=1} \\ &= \frac{it}{n+1}. \end{aligned}$$

又当 $i > n$ 时, 由 Poisson 过程的独立增量性,

$$\mathbb{E}[S_i \mid N(t)=n] = t + \mathbb{E}[S_{i-n}] = t + \frac{i-n}{\lambda},$$

其中 λ 为 Poisson 过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 的强度. 故

$$\mathbb{E}[S_i \mid N(t)=n] = \begin{cases} \dfrac{it}{n+1}, & i \leqslant n, \\ t + \dfrac{i-n}{\lambda}, & i > n. \end{cases}$$

□

习题 2.18 用 $U_{(1)},\cdots,U_{(n)}$ 表示 n 个 $(0,1)$ 上的均匀随机变量的次序统计量. 证明: 给定 $U_{(n)}=y$ 条件下, $U_{(1)},\cdots,U_{(n-1)}$ 与 $n-1$ 个 $(0,y)$ 上的均匀随机变量的次序统计量同分布.

证明 用 f 表示 $\big(U_{(1)},\cdots,U_{(n)}\big)$ 的联合密度函数. 记 $\mathbf{U}=\big(U_{(1)},\cdots,U_{(n-1)}\big)$, 则条件密度函数

$$f_{\mathbf{U}|U_{(n)}}(u_1,\cdots,u_{n-1}\,|\,y)=\frac{f(u_1,\cdots,u_{n-1},y)}{f_{U_{(n)}}(y)}=\frac{n!}{ny^{n-1}}=\frac{(n-1)!}{y^{n-1}},$$

其中 $f_{U_{(n)}}(y)=ny^{n-1}$ 由对分布函数 $F_{U_{(n)}}(y)=\mathbb{P}(U_i\leqslant y,\forall i)=y^n$ 求导得到. $\square$

习题 2.19 载有顾客的公交车按照强度为 λ 的 Poisson 过程到达一个有无穷多个服务窗口的排队系统. 设服务时间的分布函数为 G, 每辆公交车载有 j 名乘客的概率为 α_j $(j=1,2,\cdots)$. 用 $X(t)$ 表示在时刻 t 前完成服务的顾客数.

(1) 求 $\mathbb{E}[X(t)]$.

(2) $X(t)$ 是否服从 Poisson 分布.

解答 (1) 将“载有 j 名乘客的公交车到达”划入 j 型事件, 用 $N_j(t)$ 表示截至 t 时刻发生的 j 型事件数, 则 $\{N_j(t),t\geqslant 0\}\sim\mathrm{HPP}(\lambda\alpha_j)$ 且相互独立. 由 $M/G/\infty$ 队列结论 (例 2.3(B)), 到时刻 t 已完成服务的 j 型公交车数 $M_j(t)$ 服从均值为 $\lambda\alpha_j\displaystyle\int_0^t G(s)\,\mathrm{d}s$ 的 Poisson 分布. 故

$$\mathbb{E}[X(t)]=\lambda\int_0^t G(s)\,\mathrm{d}s\sum_{j=1}^{\infty}j\alpha_j.$$

(2) $X(t)$ 不服从 Poisson 分布. 例如取 G 为退化分布, 即服务时长为定值, 再令 $\alpha_1=\alpha_3=\alpha_5=\cdots=0$, 则 $\mathbb{P}(X(t)=1)=\mathbb{P}(X(t)=3)=\mathbb{P}(X(t)=5)=\cdots=0$, 这时 $X(t)$ 不服从 Poisson 分布. $\square$

习题 2.20 设强度为 λ 的 Poisson 过程的事件被划入 $1,2,\cdots,k$ 型之一, 时刻 s 发生的事件与其余事件独立地以概率 $P_i(s)$ 划入 i 型 $(i=1,2,\cdots,k)$, $\displaystyle\sum_{i=1}^k P_i(s)=1$. 用 $N_i(t)$ 表示在时间段 $[0,t]$ 内发生的 i 型事件数. 证明: $\{N_i(t)\}_{i=1}^k$ 相互独立, 且 $N_i(t)$ 服从均值为 $\lambda\displaystyle\int_0^t P_i(s)\,\mathrm{d}s$ 的 Poisson 分布.

证明 设 $N(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^k N_i(t)$, 用 S_i 表示第 i 个事件发生时刻. 对任意 $n_1,\cdots,n_k\geqslant 0$, 记 $n=\displaystyle\sum_{i=1}^k n_i$, 则

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_1(t)=n_1,\cdots,N_k(t)=n_k)&=\mathbb{P}(N_1(t)=n_1,\cdots,N_k(t)=n_k\,|\,N(t)=n)\cdot\mathbb{P}(N(t)=n)\\
&=\mathbb{P}(\text{于 } S_1,\cdots,S_n \text{ 时刻发生事件划入 } i \text{ 型有 } n_i \text{ 个}, 1\leqslant i\leqslant k)\cdot\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}\\
&=\mathbb{P}\big(\text{于 } U_{(1)},\cdots,U_{(n)} \text{ 时刻发生事件划入 } i \text{ 型有 } n_i \text{ 个}, 1\leqslant i\leqslant k\big)\cdot\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}\\
&=\mathbb{P}(\text{于 } U_1,\cdots,U_n \text{ 时刻发生事件划入 } i \text{ 型有 } n_i \text{ 个}, 1\leqslant i\leqslant k)\cdot\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}\\
&=\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}P_1^{n_1}\cdots P_k^{n_k}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda},
\end{aligned}$$

其中

$$P_i=\mathbb{P}(\text{于 } U \text{ 发生事件划入 } i \text{ 型})=\mathbb{E}[\mathbb{P}(\text{于 } U \text{ 发生事件划入 } i \text{ 型})\,|\,U]$$

$$= \mathbb{E}[P_i(U)] = \frac{1}{t}\int_0^t P_i(s)\,\mathrm{d}s.$$

于是

$$\mathbb{P}(N_1(t) = n_1, \cdots, N_k(t) = n_k) = \prod_{i=1}^{k} \frac{(\lambda P_i t)_i^n}{n_i!} \mathrm{e}^{-\lambda P_i t}.$$

这说明 $\{N_i(t)\}_{i=1}^k$ 相互独立, 且 $N_i(t)$ 服从均值为 $\lambda \int_0^t P_i(s)\,\mathrm{d}s$ 的 Poisson 分布. □

习题 2.22 假设汽车以强度为 λ 的 Poisson 过程驶入一单向无限长高速公路, 第 i 辆驶入的汽车保持速度 V_i. 假定这些 V_i 是独立同分布的正值随机变量, 共同分布函数为 F. 求时刻 t 位于区间 (a, b) 中的汽车数的分布. 假设超车无时间损耗.

解答 对于在 s 时刻进入高速公路的汽车, 若它在时刻 t 位于区间 (a, b), 则将其划入 I 型, 相应概率为

$$p(s) = \begin{cases} F\left(\frac{b}{t-s}\right) - F\left(\frac{a}{t-s}\right), & 0 \leqslant s < t, \\ 0, & s \geqslant t. \end{cases}$$

其余划入 II 型. 由 Poisson 过程事件分类性质, 时刻 t 位于区间 (a, b) 中的汽车数 $N_1(t) \sim \mathrm{Poi}(f)$, 其中

$$f = \lambda \int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s = \lambda \int_0^t \left[F\left(\frac{b}{t-s}\right) - F\left(\frac{a}{t-s}\right)\right] \mathrm{d}s.$$

□

习题 2.30 用 $T_1, T_2, \cdots$ 表示 $\mathrm{NHPP}(\lambda(t))$ 的事件发生间隔时间.

(1) 这些 T_i 是否独立?

(2) 这些 T_i 是否同分布?

(3) 求 T_1 的分布?

(4) 求 T_2 的分布.

解答 (1) 不独立, 因为

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_2 > t_2 \,|\, T_1 = t_1) &= \mathbb{P}(N(t_1 + t_2) - N(t_1) = 0 \,|\, T_1 = t_1) \\ &= \mathbb{P}(N(t_1 + t_2) - N(t_1) = 0) \\ &= \mathrm{e}^{-[m(t_1+t_2) - m(t_1)]} \end{aligned}$$

依赖于 t_1.

(2)(3)(4) 这些 T_i 不同分布, 例如

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N(t) = 0) = \mathrm{e}^{-m(t)},$$

而

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_2 > t) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_2 > t \,|\, T_1 = s)\,\mathrm{d}\left(1 - \mathrm{e}^{-m(s)}\right) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{m(s) - m(s+t)} \cdot m'(s) \mathrm{e}^{-m(s)}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-m(s+t)} \cdot \lambda(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

□

习题 2.31 设 $\{N(t), t \geqslant 0\} \sim \mathrm{NHPP}(\lambda(t))$, 其中 $\lambda(t) > 0, \forall t$. 令 $N^*(t) = N\big(m^{-1}(t)\big)$, 证明 $\{N^*(t), t \geqslant 0\} \sim \mathrm{HPP}(1)$.

证明 $\{N^*(t), t \geqslant 0\}$ 为计数过程, 且

- $N^*(0) = N\big(m^{-1}(0)\big) = N(0) = 0$.
- m^{-1} 严格单调递增, 将互不相交的区间映为互不相交的区间, 因此 $\{N^*(t), t \geqslant 0\}$ 继承了 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 的独立增量性.
- $N^*(t+s) - N^*(s) = N\big(m^{-1}(t+s)\big) - N\big(m^{-1}(s)\big) \sim \mathrm{Poi}(t), \forall s, t \geqslant 0$.

故 $\{N^*(t), t \geqslant 0\} \sim \mathrm{HPP}(1)$. □

习题 2.32 (1) 设 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 为非齐次 Poisson 过程, 均值函数为 $m(t)$. 在给定 $N(t) = n$ 条件下, 证明事件发生时刻的无序集与 n 个具有分布函数

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{m(x)}{m(t)}, & x \leqslant t, \\ 1, & x > t \end{cases}$$

的独立同分布随机变量有相同的分布.

(2) 假设工人按以 $m(t)$ 为均值函数的非齐次 Poisson 过程遭遇事故, 每个伤员停工的时间分布为 F. 用 $X(t)$ 表示在时刻 t 停工的工人数, 求 $\mathbb{E}[X(t)]$ 与 $\mathrm{Var}(X(t))$.

解答 (1) 令 $N^*(t) = N\big(m^{-1}(t)\big)$, 则由习题 2.31, $\{N^*(t), t \geqslant 0\} \sim \mathrm{HPP}(1)$. 于是

$$[(S_1, \cdots, S_n) \,|\, N(t) = n] \overset{\mathrm{d}}{=} \big[\big(m^{-1}(m(S_1)), \cdots, m^{-1}(m(S_n))\big) \,\big|\, N^*(m(t)) = n\big].$$

由于 $m(S_n)$ 是 $\{N^*(t), t \geqslant 0\}$ 的事件发生时刻, 我们有

$$[m(S_1), \cdots, m(S_n) \,|\, N^*(m(t)) = n] \overset{\mathrm{d}}{=} (U_{1:n}, \cdots, U_{n:n}),$$

其中 $U_1, \cdots, U_n \overset{\mathrm{iid}}{\sim} U(0, m(t))$, $U_{1:n} < \cdots < U_{n:n}$ 为 $U_1, \cdots, U_n$ 的次序统计量. 因此

$$[(S_1, \cdots, S_n) \,|\, N(t) = n] \overset{\mathrm{d}}{=} \big(m^{-1}(U_{1:n}), \cdots, m^{-1}(U_{n:n})\big).$$

而 $m^{-1}(U_1)$ 的分布函数

$$\mathbb{P}\big(m^{-1}(U_1) \leqslant x\big) = \mathbb{P}(U_1 \leqslant m(x)) = F(x),$$

故 $[(S_1, \cdots, S_n) \,|\, N(t) = n]$ 的分布函数为

$$G(s_1, \cdots, s_n) = n! \prod_{i=1}^{n} F(s_i).$$

(2) 对在时刻 s 遭遇事故的员工, 若其在时刻 t 仍未复工, 则将其划入 I 型, 相应概率为

$$p(s) = \begin{cases} \overline{F}(t-s), & 0 \leqslant s \leqslant t, \\ 0, & s > t. \end{cases}$$

其余划入 II 型. 用 $N_j(t)$ 表示 $(0,t]$ 时间段发生的 j 型事件数 $(j=1,2)$. 由非齐次 Poisson 过程事件分类性质, $X(t)=N_1(t)\sim\mathrm{Poi}(f)$, 其中

$$f=\int_0^t \lambda(s)p(s)\,\mathrm{d}s=\int_0^t \lambda(s)\overline{F}(t-s)\,\mathrm{d}s.$$

故 $\mathbb{E}[X(t)]=\mathrm{Var}(X(t))=f$. □

习题 2.38 设 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是一个复合 Poisson 过程, 其中 $X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}X_i$, 且 $\lambda=1$, $\mathbb{P}(X_i=j)=\dfrac{j}{10}$ $(j=1,2,3,4)$. 求 $\mathbb{P}(X(4)=20)$.

解答 记 $N_j(t)=\sharp\{k:X_k=j,1\leqslant k\leqslant N(t)\}$ $(j=1,2,3,4)$. 由 Poisson 过程事件分类性质, $\{N_j(t)\}_{j=1}^4$ 相互独立, 且 $N_j(t)\sim\mathrm{Poi}(\lambda p_j t)$. 代入 $\lambda=1$, $p_j=\mathbb{P}(X_i=j)$ 与 $t=4$ 得

$$N_j(4)\sim\mathrm{Poi}\left(\frac{2j}{5}\right),\quad j=1,2,3,4.$$

记不定方程 $a+2b+3c+4d=20$ 的非负整数解集为 S, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X(4)=20)&=\sum_{(a,b,c,d)\in S}\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^a}{a!}\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}}\cdot\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^b}{b!}\mathrm{e}^{-\frac{4}{5}}\cdot\frac{\left(\frac{6}{5}\right)^c}{c!}\mathrm{e}^{-\frac{6}{5}}\cdot\frac{\left(\frac{8}{5}\right)^d}{d!}\mathrm{e}^{-\frac{8}{5}}\\&=\frac{117789860087635397733487210 4}{885084594547748565673828125}\cdot\mathrm{e}^{-4}\approx 0.024375032120201087.\end{aligned}$$ □

习题 2.39 考虑复合 Poisson 过程 $X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}X_i$, 求 $\mathrm{Cov}(X(s),X(t))$.

解答 不妨设 $s<t$, 则由复合 Poisson 过程的独立增量性, $X(t)-X(s)$ 与 $X(s)$ 独立, 进而二者不相关,

$$\mathrm{Cov}(X(s),X(t))=\mathrm{Cov}(X(s),X(t)-X(s))+\mathrm{Cov}(X(s),X(s))=\mathrm{Var}(X(s))=\lambda s\mathbb{E}\left[X_1^2\right].$$ □

习题 3.1 判断下列表述是否正确.

(1) $N(t)<n \iff S_n>t$.

(2) $N(t)\leqslant n \iff S_n\geqslant t$.

(3) $N(t)>n \iff S_n<t$.

解答 (1) 正确.

(2) 错误. 由于 X_{n+1} 可以取 0, $S_n\geqslant t \not\Rightarrow N(t)\leqslant n$.

(3) 错误. 这与 (2) 等价. □

习题 3.2 在定义更新过程时, 我们假定到达时刻间隔有限的概率 $F(\infty)=1$. 若 $F(\infty)<1$, 则在每次更新后不再有更新的概率为 $1-F(\infty)>0$, 这时用 $N(\infty)$ 表示更新的总次数, 证明: $1+N(\infty)$ 服从均值为 $\dfrac{1}{1-F(\infty)}$ 的几何分布.

证明 $\mathbb{P}(1+N(\infty)=n)=\mathbb{P}(\text{共有 } n-1 \text{ 次更新})=F(\infty)^{n-1}[1-F(\infty)], n\geqslant 1$. □

习题 3.3 用文字描述随机变量 $X_{N(t)+1}$ 的含义. 证明:

$$\mathbb{P}\big(X_{N(t)+1} \geqslant x\big) \geqslant \overline{F}(x).$$

当 $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$ 时, 求出 $\mathbb{P}\big(X_{N(t)+1} \geqslant x\big)$.

解答 $X_{N(t)+1}$ 是首个结束时刻 $> t$ 的更新区间的长度.

(法一) 我们有

$$\mathbb{P}\big(X_{N(t)+1} \geqslant x\big) = \mathbb{E}\big[\mathbb{P}\big(X_{N(t)+1} \geqslant x \,\big|\, S_{N(t)}\big)\big],$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(X_{N(t)+1} \geqslant x \,\big|\, S_{N(t)} = s\big) &= \mathbb{P}\big(X_{N(t)+1} \geqslant x \,\big|\, X_{N(t)+1} > t - s\big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n+1} \geqslant x \,|\, X_{n+1} > t - s) \cdot \mathbb{P}(N(t) = n) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \geqslant x \,|\, X_1 > t - s) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) = n) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \geqslant x \,|\, X_1 > t - s) \\
&\geqslant \mathbb{P}(X_1 > x) = \overline{F}(x).
\end{aligned}$$

故

$$\mathbb{P}\big(X_{N(t)+1} \geqslant x\big) \geqslant \mathbb{E}\big[\overline{F}(x)\big] = \overline{F}(x).$$

(法二) 由

$$\mathbb{P}\big(X_{N(t)+1} > x \,\big|\, A(t) = s\big) = \mathbb{P}(X > x \,|\, X > s) > \mathbb{P}(X > x)$$

即得

$$\mathbb{P}\big(X_{N(t)+1} > x\big) = \mathbb{E}\big[\mathbb{P}\big(X_{N(t)+1} > x \,\big|\, A(t)\big)\big] \geqslant \mathbb{P}(X > x).$$

当 $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$ 时, $\{N(t), t \geqslant 0\} \sim \mathrm{HPP}(\lambda)$. 因此

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(X_{N(t)+1} \geqslant x\big) &= \int_{[0,t]} \mathbb{P}\big(X_{N(t)+1} \geqslant x \,\big|\, S_{N(t)} = y\big) \,\mathrm{d}F_{S_{N(t)}}(y) \\
&= \mathbb{P}\big(X_{N(t)+1} \geqslant x \,\big|\, S_{N(t)} = 0\big)\overline{F}(t) + \int_{(0,t]} \mathbb{P}\big(X_{N(t)+1} \geqslant x \,\big|\, S_{N(t)} = y\big)\overline{F}(t-y) \,\mathrm{d}\lambda y.
\end{aligned}$$

- ◇ 若 $x \geqslant t$, 则

$$\mathbb{P}\big(X_{N(t)+1} \geqslant x\big) = \mathrm{e}^{-\lambda(x-t)} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} + \int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\mathrm{e}^{-\lambda(t-y)}} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda(t-y)} \,\mathrm{d}\lambda y = (\lambda t + 1)\mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

- ◇ 若 $x < t$, 则

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(X_{N(t)+1} \geqslant x\big) &= 1 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} + \int_0^{t-x} 1 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda(t-y)} \,\mathrm{d}\lambda y + \int_{t-x}^{t} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\mathrm{e}^{-\lambda(t-y)}} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda(t-y)} \,\mathrm{d}\lambda y \\
&= (1 + \lambda x)\mathrm{e}^{-\lambda x}.
\end{aligned}$$

□

习题 3.8 称随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 是可交换的, 若只要 $i_1,\cdots,i_n$ 是 $1,\cdots,n$ 的一个排列, 就有 $(X_{i_1},\cdots,X_{i_n}) \overset{\mathrm{d}}{=} (X_1,\cdots,X_n)$, 也即联合分布函数 $\mathbb{P}(X_1 \leqslant x_1,\cdots,X_n \leqslant x_n)$ 是关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的对称函数. 用 $X_1,X_2,\cdots$ 表示一个更新过程的到达时刻间隔.

(1) 证明在给定 $N(t)=n$ 条件下, $X_1,\cdots,X_n$ 是可交换的. 此时 $X_1,\cdots,X_n,X_{n+1}$ 是否可交换?

(2) 利用 (1) 证明对 $n>0$, 有

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_1+\cdots+X_{N(t)}}{N(t)}\,\middle|\,N(t)=n\right]=\mathbb{E}[X_1\,|\,N(t)=n].$$

(3) 证明:

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_1+\cdots+X_{N(t)}}{N(t)}\,\middle|\,N(t)>0\right]=\mathbb{E}[X_1\,|\,X_1<t].$$

证明 (1) 在给定 $N(t)=n$ 条件下,

$$\mathbb{P}(X_1 \leqslant x_1.\cdots,X_n \leqslant x_n\,|\,N(t)=n)=\mathbb{P}\left(X_1 \leqslant x_1.\cdots,X_n \leqslant x_n\,\middle|\,X_{n+1}>t-\sum_{i=1}^n X_i \geqslant 0\right),$$

其中 RHS 的条件不含 $x_1,\cdots,x_n$, 因此只需考虑

$$\mathbb{P}\left(X_1 \leqslant x_1.\cdots,X_n \leqslant x_n, X_{n+1}>t-\sum_{i=1}^n X_i \geqslant 0\right)$$

的对称性, 而它即是

$$\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_n}\mathbb{P}\left(X_{n+1}>t-\sum_{i=1}^n y_i\right)\mathrm{d}F(y_n)\cdots\mathrm{d}F(y_1),$$

由 Fubini 定理即知这是关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的对称函数. 而在给定 $N(t)=n$ 条件下, X_{n+1} 与 X_1 不同分布, 因此在前述过程中无法交换 (所有) 积分次序, 即 $X_1,\cdots,X_n,X_{n+1}$ 不可交换.

(2) 首先,

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_1+\cdots+X_{N(t)}}{N(t)}\,\middle|\,N(t)=n\right]=\frac{1}{n}\mathbb{E}[X_1+\cdots+X_n\,|\,N(t)=n]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}[X_i\,|\,N(t)=n].$$

设 $[(X_1,\cdots,X_n)\,|\,N(t)=n]$ 的联合分布函数为 $F_{\mathbf{X}}$. 由于此时 $X_1,\cdots,X_n$ 可交换, 对 $1<i\leqslant n$,

$$\mathbb{E}[X_i\,|\,N(t)=n]=\int_{\mathbb{R}^n}y_i\,\mathrm{d}F_{\mathbf{X}}(y_1,\cdots,y_i,\cdots,y_n)=\int_{\mathbb{R}^n}y_i\,\mathrm{d}F_{\mathbf{X}}(y_i,y_1,\cdots,y_n)=\mathbb{E}[X_1\,|\,N(t)=n].$$

故

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_1+\cdots+X_{N(t)}}{N(t)}\,\middle|\,N(t)=n\right]=\frac{1}{n}\cdot n\mathbb{E}[X_1\,|\,N(t)=n]=\mathbb{E}[X_1\,|\,N(t)=n].$$

(3) 由条件期望的塔性质,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{X_1+\cdots+X_{N(t)}}{N(t)}\,\middle|\,N(t)>0\right]&=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left[\frac{X_1+\cdots+X_{N(t)}}{N(t)}\,\middle|\,N(t)>0\right]\,\middle|\,N(t)\right]\right]\\&=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\frac{X_1+\cdots+X_{N(t)}}{N(t)}\,\middle|\,[N(t)\,|\,N(t)>0]\right]\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i \,|\, [N(t)=n \,|\, N(t)>0]]\mathbb{P}(N(t)=n \,|\, N(t)>0) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_1 \,|\, N(t)=n]\mathbb{P}(N(t)=n \,|\, N(t)>0) \\
&= \mathbb{E}[X_1 \,|\, N(t)>0] = \mathbb{E}[X_1 \,|\, X_1<t].
\end{aligned}
$$

□

习题 3.9 考虑一个只有一位服务员的银行, 潜在顾客按强度为 λ 的 Poisson 过程到达, 但只有在服务员空闲时才能进入银行. 用 G 表示服务时长的分布.

(1) 求顾客进入银行的速率.

(2) 求潜在顾客中进入银行者所占比例.

(3) 服务员的忙期占比.

解答 (1) 构造以服务台忙期起点为更新点的更新过程, 设一个循环长度为 T, 则

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[G] + \frac{1}{\lambda} \ (i \geqslant 2) \implies \text{顾客进入银行速率} = \frac{1}{\mathbb{E}[T]} = \frac{1}{\mathbb{E}[G]+\frac{1}{\lambda}}.$$

(2) 用 $N(T_{\text{on}})$ 表示一个循环中于服务台忙期到达银行的顾客数, 则潜在顾客中进入银行者所占比例为

$$\frac{1}{\mathbb{E}[N(T_{\text{on}})+1]} = \frac{1}{\mathbb{E}[\mathbb{E}[N(T_{\text{on}}) \,|\, T_{\text{on}}]]+1} = \frac{1}{\mathbb{E}[\lambda T_{\text{on}}]+1} = \frac{1}{\lambda\mathbb{E}[G]+1}.$$

(3) 服务员的忙期占比 $= \dfrac{\mathbb{E}[G]}{\mathbb{E}[T]} = \dfrac{\mathbb{E}[G]}{\mathbb{E}[G]+\frac{1}{\lambda}}$. □

习题 3.11 一个矿工被困在一个有三扇门的矿井中, 1 号门引导她经 2 天脱险, 2 号门引导她经 4 天回到矿井, 3 号门引导她经 8 天回到矿井. 假设她在任意时刻均等可能地选取其中一扇门, 用 T 表示她脱险所用时间.

(1) 定义一个独立同分布的随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots$ 和一个停时 N, 使得 $T = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$.

(2) 利用 Wald 等式求 $\mathbb{E}[T]$.

(3) 求 $\mathbb{E}\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i \,\middle|\, N=n\right]$, 注意它不等于 $\mathbb{E}\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$.

(4) 利用 (3) 重新求 $\mathbb{E}[T]$.

解答 (1) 设 X_i 为第 i 次选择的门对应的时间, 即 $\mathbb{P}(X_i=2)=\mathbb{P}(X_i=4)=\mathbb{P}(X_i=8)=\frac{1}{3}$, 再设 $N=\min\{n : X_n=2\}$. 由于 $\{N=n\}=\{X_k \neq 2 \ (k<n) \text{ 且 } X_n=2\}$ 与 $X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots$ 独立, N 是一个停时.

(2) 由于 $\mathbb{E}[X_1] = \frac{2+4+8}{3} = \frac{14}{3}$, 而 $N \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{3}\right)$, $\mathbb{E}[N]=3$, 由 Wald 等式, $\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[X_1]\cdot\mathbb{E}[N] = 14$.

(3) $\mathbb{E}\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i \,\middle|\, N=n\right] = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}[X_i \,|\, N=n] + \mathbb{E}[X_n \,|\, N=n] = (n-1)\left(\frac{4+8}{2}\right)+2 = 6n-4.$

(4) $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i \,\middle|\, N\right]\right] = \mathbb{E}[6N-4] = 6\mathbb{E}[N]-4 = 14.$ □

习题 3.14 用 $A(t)$ 和 $Y(t)$ 表示一个更新过程在时刻 t 的年龄和剩余寿命.

(1) $A(t) > x \iff$ 在区间 ______ 中无更新发生.

(2) $Y(t) > x \iff$ 在区间 ______ 中无更新发生.

(3) $\mathbb{P}(Y(t) > x) = \mathbb{P}(A(\quad) \geqslant \quad)$.

(4) 对 Poisson 过程求 $A(t)$ 和 $Y(t)$ 的联合分布.

解答 (1) $[t-x, t]$.

(2) $(t, t+x]$.

(3) $\mathbb{P}(A(t+x) \geqslant x)$.

(4) 对 $0 < x < t, y > 0$, $\mathbb{P}(A(t) > x, Y(t) > y) \xlongequal{(1)(2)} \mathbb{P}([t-x, t+y]$ 无事件$) = \mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}$. □

习题 3.15 用 $A(t)$ 和 $Y(t)$ 表示一个更新过程在时刻 t 的年龄和剩余寿命.

(1) 求 $\mathbb{P}(Y(t) > x \mid A(t) = s)$.

(2) 求 $\mathbb{P}\big(Y(t) > x \,\big|\, A\big(t + \frac{x}{2}\big) = s\big)$.

(3) 对 Poisson 过程求 $\mathbb{P}(Y(t) > x \mid A(t+x) > s)$.

(4) 求 $\mathbb{P}(Y(t) > x, A(t) > y)$.

(5) 设 $\mu < \infty$, 证明当 $t \to +\infty$ 时, $\dfrac{A(t)}{t} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.

解答 (1) $\mathbb{P}(Y(t) > x \mid A(t) = s) = \mathbb{P}(t-s$ 更新且 $(t-s, t+x]$ 无更新 $\mid [t-s, t]$ 无更新$) = \dfrac{\overline{F}(x+s)}{\overline{F}(s)}$.

(2) 若 $s \geqslant \dfrac{x}{2}$, 则 $\mathbb{P}\big(Y(t) > x \,\big|\, A\big(t+\frac{x}{2}\big) = s\big) = \mathbb{P}\Big(Y(t) > x \,\Big|\, A(t) = s - \dfrac{x}{2}\Big) = \dfrac{\overline{F}\big(\frac{x}{2}+s\big)}{\overline{F}(s)}$. 若 $s < \dfrac{x}{2}$, 则 $\mathbb{P}\big(Y(t) > x \,\big|\, A\big(t+\frac{x}{2}\big) = s\big) = 0$.

(3) 若 $s \geqslant x$, 则 $\mathbb{P}(Y(t) > x \mid A(t+x) > s) = 1$. 若 $s < x$, 由 Poisson 过程的独立增量性,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y(t) > x \mid A(t+x) > s) &= \mathbb{P}([t, t+x] \text{ 无事件} \mid [t+x-s, t+x] \text{ 无事件}) \\ &= \mathbb{P}([t, t+x-s] \text{ 无事件}) = \mathrm{e}^{-\lambda(x-s)}\end{aligned}$$

(4) $\mathbb{P}(Y(t) > x, A(t) > y) = \mathbb{P}(Y(t-y) > x+y) = \mathbb{P}(A(t+x) > x+y)$.

(5) 当 $t \to +\infty$ 时, $\dfrac{N(t)}{t} \xrightarrow{\text{a.s.}} \dfrac{1}{\mu}$, 因此

$$\frac{A(t)}{t} = \frac{t - S_{N(t)}}{t} = 1 - \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \cdot \frac{N(t)}{t} \xrightarrow{\text{a.s.}} 1 - \mu \cdot \frac{1}{\mu} = 0, \quad t \to +\infty.$$

□

习题 3.16 考虑一个到达时刻间隔 $\sim \Gamma(n, \lambda)$ 的更新过程. 利用命题 3.4.6 证明:

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{E}[Y(t)] = \frac{n+1}{2\lambda}.$$

如何不经计算得到该结果?

证明 由命题 3.4.6 即得

$$\lim_{t\to+\infty}\mathbb{E}[Y(t)]=\frac{\mathbb{E}\left[X^2\right]}{2\mu}=\frac{n\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2}{2\cdot\frac{n}{\lambda}}=\frac{n+1}{2\lambda}.$$

设 $\{N^*(t),t\geqslant 0\}\sim \mathrm{HPP}(\lambda)$, 用 S_k^* 表示第 k 个事件的发生时刻, $X_k^*=S_k^*-S_{k-1}^*$. 构造以 $S_n^*,S_{2n}^*,\cdots$ 为更新点的更新过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$, 用 $X_1,X_2,\cdots$ 表示其更新间隔序列, 则每个 X_i 均是 $X_1^*,\cdots,X_n^*\overset{\text{iid}}{\sim}\mathrm{Exp}(\lambda)$ 之和, 从而 $X_1,X_2,\cdots\overset{\text{iid}}{\sim}\Gamma(n,\lambda)$. 由于 [1]

$$\lim_{t\to+\infty}\mathbb{P}(N^*(t)\equiv 0\pmod n)=\cdots=\lim_{t\to+\infty}\mathbb{P}(N^*(t)\equiv n-1\pmod n)=\frac{1}{n},$$

由全期望公式可得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\mathbb{E}[Y(t)]&=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\lim_{t\to+\infty}\mathbb{E}[Y(t)\,|\,N^*(t)\equiv i\pmod n]\\&\overset{[2]}{=\!=}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[X_1^*+\cdots+X_{n-i}^*\right]\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n-i}{\lambda}=\frac{n+1}{2\lambda}.\end{aligned}$$

两处注记:

[1] 对取定的 $0\leqslant i\leqslant n-1$, 重新构造延迟交错更新过程, 其更新点为 $S_{n+i}^*,S_{2n+i}^*,\cdots$, 规定时刻 t 状态为 “on” $\iff N^*(t)\equiv i\pmod n$, 其余为 “off” 状态, 则

$$\mathbb{E}[T_{\text{on}}]=\mathbb{E}[X_1^*]=\frac{1}{\lambda},\quad \mathbb{E}[T_{\text{off}}]=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n-1}X_i^*\right]=\frac{n-1}{\lambda}.$$

进而

$$\lim_{t\to+\infty}\mathbb{P}(N^*(t)\equiv i\pmod n)=\lim_{t\to+\infty}\mathbb{P}(\text{时刻 }t\text{ 处于 “on” 状态})=\frac{\mathbb{E}[T_{\text{on}}]}{\mathbb{E}[T_{\text{on}}]+\mathbb{E}[T_{\text{off}}]}=\frac{1}{n}.$$

[2] 由 $\{N^*(t),t\geqslant 0\}\sim\mathrm{HPP}(\lambda)$ 可知 $[Y(t)\,|\,N^*(t)\equiv i\pmod n]\overset{\text{d}}{=\!=}X_1^*+\cdots+X_{n-i}^*$. □

习题 3.18 在习题 3.9 中假设潜在顾客按到达时刻间隔分布为 F 的更新过程到达. 若一次更新对应于一位顾客

(1) 进入银行,

(2) 离开银行,

问截至时刻 t 的事件数是否构成一个 (可能有延迟的) 更新过程? 若 F 服从指数分布, 结果如何?

解答 (1) **(进入银行)** 用 X_i 表示第 i 位顾客进入银行与第 $i+1$ 位顾客进入银行的时间间隔 $(i\geqslant 1)$. 用 Y_i 表示第 i 位顾客的服务时长, 令 $Z_i=X_i-Y_i$, 则 $\{(Y_i,Z_i),i\geqslant 1\}$ 为独立同分布的随机向量. 故截至时刻 t 的事件数构成一个延迟交替更新过程.

(2) **(离开银行)** 记此时的更新间隔序列为 $X_1,X_2,\cdots$. 用 Y_i 表示第 i 位顾客进入银行前的闲期, 令 $Z_i=X_i-Y_i$. 由于 $Z_1,Z_2,\cdots\overset{\text{iid}}{\sim}G$, 但 Y_k 依赖于 Z_{k-1} $(k\geqslant 2)$, 因此 $X_1,X_2,\cdots$ 不独立, 截至时刻 t 的事件数不构成更新过程.

(3) **(指数分布)** (1) 仍为延迟交错更新过程; 由指数分布的无记忆性, (2) 为交替更新过程. □

习题 3.20 连续抛掷一枚匀质硬币.

(1) 求直至花样 HHTHHTT 出现的抛掷次数的期望.

(2) 直至花样 HHTT 和 HTHT 出现的抛掷次数期望哪个更大?

解答 (1) 由于花样 HHTHHTT 的出现对下一个此花样的出现没有影响, 相应的抛掷次数期望为 2^7.

(2) 由于花样 HHTT 的出现对下一个此花样的出现没有影响, 花样 HTHT 的出现对下一个此花样的出现有影响, 且这两个花样长度相同, 因此 HTHT 相应的抛掷次数期望更大. □

习题 3.21 一个赌徒在每次赌博中独立于过去地分别以概率 p 和 $1-p$ 赢或输一个单位. 假设赌徒在首次连续赢 k 次后离开, 当她离开时, 求:

(1) 她赢得的赌资的期望.

(2) 她赢的次数的期望.

解答 不妨仅考虑 $p \in (0,1)$. 定义每当赌徒连续赢 k 次为一次更新 (先假定她不会离开), 设更新间隔为 $X_1, X_2, \cdots$. 注意到 X_1, X_2 均服从周期为 1 的格点分布, 由 Blackwell 定理,

$$\frac{1}{\mathbb{E}[X_2]} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\text{时刻 } n \text{ 出现的更新次数}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\text{时刻 } n \text{ 发生更新}) = p^k.$$

另一方面, 记 $A = \{\text{第 } S_1+1 \text{ 次赢}\}$, 则

$$\mathbb{E}[X_2] = \mathbb{E}[X_2 \mid A]\cdot\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}[X_2 \mid A^{\mathrm{c}}]\cdot\mathbb{P}(A^{\mathrm{c}}) = p + (1-p)(\mathbb{E}[X_1]+1).$$

联立即得

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1-p^k}{p^k - p^{k+1}}.$$

用 Y_i 表示第 i 次赌博所赢赌资. 由于 X_1 是 $Y_1, Y_2, \cdots$ 的一个停时, 进而也是 $\mathbb{1}_{\{Y_1=1\}}, \mathbb{1}_{\{Y_2=1\}}, \cdots$ 的一个停时, 由 Wald 等式,

(1) 赌徒赢得的赌资的期望为

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{X_1} Y_i\right] = \mathbb{E}[X_1]\cdot\mathbb{E}[Y_1] = (2p-1)\cdot\frac{1-p^k}{p^k-p^{k+1}}.$$

(2) 赌徒赢的次数的期望为

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{X_1} \mathbb{1}_{\{Y_i=1\}}\right] = \mathbb{E}[X_1]\cdot\mathbb{P}(Y_1=1) = \frac{1-p^k}{p^{k-1}-p^k}.$$

□

习题 3.24 从一副标准扑克牌中每次有放回地抽出一张, 求直至连续四张同花色牌出现时抽牌数的期望.

解答 定义每有连续四张同花色牌出现为一次更新, 设更新间隔为 $X_1, X_2, \cdots$. 注意到 X_1, X_2 均服从周期为 1 的格点分布, 由 Blackwell 定理,

$$\frac{1}{\mathbb{E}[X_2]} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\text{时刻 } n \text{ 出现的更新次数}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\text{时刻 } n \text{ 发生更新})$$

$$
\begin{aligned}
&= 4 \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(n-3 \to \clubsuit, n-2 \to \clubsuit, n-1 \to \clubsuit, n \to \clubsuit) \\
&= 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{64},
\end{aligned}
$$

因此 $\mathbb{E}[X_2] = 64$. 另一方面, 记 $A = \{S_1 + 1$ 与 S_1 时刻抽得同花色$\}$, 则

$$
\mathbb{E}[X_2] = \mathbb{E}[X_2 \mid A] \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{E}[X_2 \mid A^{\mathrm{c}}] \cdot \mathbb{P}(A^{\mathrm{c}}) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot \mathbb{E}[X_1],
$$

由此可得 $\mathbb{E}[X_1] = 85$. □

习题 3.26 对更新酬劳过程证明 Blackwell 定理, 即设更新间隔是非格点分布, 证明当 $t \to +\infty$ 时,

$$
\mathbb{E}[(t, t+a) \text{ 所获酬劳}] \to a \cdot \frac{\mathbb{E}[\text{一个更新周期所获酬劳}]}{\mathbb{E}[\text{一个更新周期的时长}]}.
$$

这里假定所有相关的函数均是直接 Riemann 可积的.

证明 令 $m(t) = \mathbb{E}[N(t)]$, 用 $R(t)$ 表示 $[0, t]$ 所获酬劳, 注意到 $N(t) + 1$ 是 $R_1, R_2, \cdots$ 的一个停时 (但 $N(t)$ 不是), 于是

$$
\mathbb{E}[R(t)] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)+1} R_i\right] - \mathbb{E}\big[R_{N(t)+1}\big] \xlongequal{\text{Wald 等式}} [m(t)+1] \cdot \mathbb{E}[R_1] - \mathbb{E}\big[R_{N(t)+1}\big].
$$

由此可知

$$
\mathbb{E}[(t, t+a) \text{ 所获酬劳}] = \mathbb{E}[R(t+a) - R(t)] = [m(t+a) - m(t)] \cdot \mathbb{E}[R_1] - \mathbb{E}\big[R_{N(t+a)+1} - R_{N(t)+1}\big].
$$

由 Blackwell 定理,

$$
\lim_{t\to+\infty} [m(t+a) - m(t)] \cdot \mathbb{E}[R_1] = a \cdot \frac{\mathbb{E}[\text{一个更新周期所获酬劳}]}{\mathbb{E}[\text{一个更新周期的时长}]},
$$

故往证 $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbb{E}\big[R_{N(t)+1}\big]$ 存在且有限. 记 $g(t) = \mathbb{E}\big[R_{N(t)+1}\big]$, 则

$$
\begin{aligned}
g(t) = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[R_{N(t)+1} \,\big|\, X_1\big]\big] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\big[R_{N(t)+1} \,\big|\, X_1 = x\big] \,\mathrm{d}F(x) \\
&= \underbrace{\int_t^{+\infty} \mathbb{E}[R_1 \mid X_1 = x] \,\mathrm{d}F(x)}_{\text{记为 } h(t)} + \int_0^t g(t-x) \,\mathrm{d}F(x) \\
&= h(t) + \int_0^t h(t-x) \,\mathrm{d}m(x).
\end{aligned}
$$

先假定 $R_1, R_2, \cdots$ 为非负随机变量, 由关键更新定理,

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} g(t) &= 0 + \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]} \int_0^{+\infty} h(t) \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]} \int_0^{+\infty} \int_t^{+\infty} \mathbb{E}[R_1 \mid X_1 = x] \,\mathrm{d}F(x) \,\mathrm{d}t \\
&\xlongequal[R_1 \geqslant 0]{\text{Fubini 定理}} \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]} \int_0^{+\infty} \int_0^x \mathbb{E}[R_1 \mid X_1 = x] \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}F(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]}\int_0^{+\infty} x\mathbb{E}[R_1 \mid X_1 = x]\,\mathrm{d}F(x) \\
&= \frac{\mathbb{E}[X_1\mathbb{E}[R_1 \mid X_1]]}{\mathbb{E}[X_1]} = \frac{\mathbb{E}[X_1R_1]}{\mathbb{E}[X_1]} < +\infty.
\end{aligned}
$$

对 $R_1, R_2, \cdots$ 为一般随机变量的情形, 先作正负部分解 $R_n = R_n^+ - R_n^-$, 再分而治之, 结果同前. 于是

$$
\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\big[R_{N(t+a)+1} - R_{N(t)+1}\big] = 0,
$$

定理得证. □

习题 3.28 假设旅客按到达时刻间隔均值为 μ 的 Poisson 过程到达火车站. 当有 n 位旅客候车时, 车站以单位时间 nc 美元的比率支付费用, 且每有一班火车发车就支付附加费用 K. 考虑以下两种策略:

(1) 每当车站内有 N 位旅客在候车, 就安排一班火车发车. 用 N^* 表示使长程平均费用最小的 N 值.

(2) 每隔时间 T 安排一班火车发车. 用 T^* 表示使长程平均费用最小的 T 值.

求策略 (1)(2) 的长程平均费用, 并证明策略 (1) 取 $N = N^*$ 比策略 (2) 取 $T = T^*$ 产生的平均费用更少.

解答 **(策略 (1))** 构造以火车发车为更新点的更新酬劳过程, 设其更新间隔序列为 $X_1, X_2, \cdots$, 则 $\mathbb{E}[X_1] = N\mu$. 设此更新区间中车站支付费用为 C, 用 T_i 表示一个更新区间中第 i 位旅客与第 $i+1$ 位旅客的到达时间间隔, 则

$$
\mathbb{E}[C] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N-1} icT_i\right] + K = \frac{c\mu N(N-1)}{2} + K.
$$

故长程平均费用为

$$
\frac{\mathbb{E}[C]}{\mathbb{E}[X_1]} = \frac{c(N-1)}{2} + \frac{K}{N\mu}.
$$

上式在 $N = M = \sqrt{\dfrac{2K}{\mu c}}$ 时取最小值 $\sqrt{\dfrac{2cK}{\mu}} - \dfrac{c}{2}$, 故 N^* 应在 $\lfloor M\rfloor - 1, \lfloor M\rfloor, \lfloor M\rfloor + 1$ 中取最优解.

(策略 (2)) 由 Poisson 过程的平稳增量性,

$$
\mathbb{E}[C \mid N(T) = n] = \frac{nc}{2}\cdot T + K \implies \mathbb{E}[C] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[C \mid N(T)]] = \frac{cT^2}{2\mu} + K.
$$

故长程平均费用为

$$
\frac{\mathbb{E}[C]}{T} = \frac{cT}{2\mu} + \frac{K}{T}.
$$

上式在 $T = T^* = \sqrt{\dfrac{2\mu K}{c}}$ 时取最小值 $\sqrt{\dfrac{2cK}{\mu}}$.

若忽略 N^* 为整数的限制, 则可知策略 (1) 取 $N = N^*$ 比策略 (2) 取 $T = T^*$ 产生的平均费用更少. □

习题 3.29 设小汽车的寿命分布为 F, 当汽车受损或车龄达到 A 时需参与以旧换新. 用 $R(A)$ 表示一辆车龄为 A 的小汽车的售价, 受损的车不再具有价值. 设一辆新车的价格为 C_1, 受损小汽车参与以旧换新需要支付费用 C_2.

(1) 定义更新点为每次购买一辆新车的时刻, 求长程单位时间平均费用.

(2) 定义更新点为每当一辆旧车受损的时刻, 求长程单位时间平均费用.

解答 (1) 设 $X_1, X_2, \cdots$ 为更新发生间隔, R_n 为第 n 个更新区间的费用, 则

$$\mathbb{E}[R_1] = \mathbb{E}[R \mid L > A] \cdot \mathbb{P}(L > A) + \mathbb{E}[R \mid L \leqslant A] \cdot \mathbb{P}(L \leqslant A) = C_1 - \overline{F}(A)R(A) + F(A)C_2,$$
$$\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[L \wedge A] = \int_0^A x \,\mathrm{d}F(x) + A\overline{F}(A).$$

记 $R(t)$ 为 $[0, t]$ 的费用, 则长程单位时间平均费用

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}[R_1]}{\mathbb{E}[X_1]} = \frac{C_1 - \overline{F}(A)R(A) + F(A)C_2}{\int_0^A x \,\mathrm{d}F(x) + A\overline{F}(A)}.$$

(2) 设 $Y_1, Y_2, \cdots$ 为更新发生间隔, Q_n 为第 n 个更新区间的费用. 由

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_1] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_1 \mid \text{车龄}]] = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[Y_1 \mid \text{车龄} = x] \,\mathrm{d}F(x) \\ &= \int_0^A x \,\mathrm{d}F(x) + \int_A^{+\infty} (A + \mathbb{E}[Y_1])\overline{F}(A) = \int_0^A x \,\mathrm{d}F(x) + (A + \mathbb{E}[Y_1])\overline{F}(A),\end{aligned}$$

可得

$$\mathbb{E}[Y_1] = \frac{\int_0^A x \,\mathrm{d}F(x) + A\overline{F}(A)}{F(A)}.$$

再由

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Q_1] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Q_1 \mid \text{车龄}]] = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[Q_1 \mid \text{车龄} = x] \,\mathrm{d}F(x) \\ &= \int_0^A (C_1 + C_2) \,\mathrm{d}F(x) + \int_A^{+\infty} (C_1 - R(A) + \mathbb{E}[Q_1]) \,\mathrm{d}F(A) \\ &= (C_1 + C_2)F(A) + (C_1 - R(A) + \mathbb{E}[Q_1])\overline{F}(A)\end{aligned}$$

可得

$$\mathbb{E}[Q_1] = \frac{C_1 - \overline{F}(A)R(A) + F(A)C_2}{F(A)}.$$

记 $Q(t)$ 为 $[0, t]$ 的费用, 则长程单位时间平均费用

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{Q(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}[Q_1]}{\mathbb{E}[Y_1]} = \frac{C_1 - \overline{F}(A)R(A) + F(A)C_2}{\int_0^A x \,\mathrm{d}F(x) + A\overline{F}(A)}.$$

□

习题 3.32 考虑一个顾客按 HPP(λ) 到达的单服务线排队系统, 服务时长分布 G 的期望为 μ_G. 假设 $\lambda\mu_G < 1$.

(1) 求系统处于空闲状态的时间比例 P_0.

(2) 求一个忙期时长的期望.

(3) 利用 (2) 与 Wald 等式求一个忙期中服务过的顾客数的期望.

解答 (1) 由 Little 公式, $1 - P_0 =$ 平均队长 $= \lambda\mu_G$, 故 $P_0 = 1 - \lambda\mu_G$.

(2) 此 M/G/1 随机服务系统的运行构成一个延迟交错更新过程, 更新点对应于一个忙期的起点, 每个

更新区间由忙期和闲期构成. 分别用 B 和 I 表示忙期和闲期的时长, 则

$$P_0 = 1 - \lambda\mu_G = \frac{\mathbb{E}[I]}{\mathbb{E}[I] + \mathbb{E}[B]}.$$

由于顾客按 $\mathrm{HPP}(\lambda)$ 到达, $\mathbb{E}[I] = \dfrac{1}{\lambda}$, 代入上式即得一个忙期时长的期望

$$\mathbb{E}[B] = \frac{\mu_G}{1 - \lambda\mu_G}.$$

(3) 用 C 表示一个忙期中服务过的顾客数, 设该忙期中第 i 位顾客的服务时长为 B_i, 则 $B = \sum_{i=1}^{C} B_i$. 由于 C 是 $B_1, B_2, \cdots$ 的一个停时, 由 Wald 等式,

$$\mathbb{E}[B] = \mathbb{E}[C] \cdot \mathbb{E}[B_1] = \mu_G \cdot \mathbb{E}[C] \implies \mathbb{E}[C] = \frac{\mathbb{E}[B]}{\mu_G} = \frac{1}{1 - \lambda\mu_G}.$$

□

习题 4.1 一家商店对某种商品采用如下 (s, S) 订货策略：若在一个时段开始时库存为 x, 则订货

$$\begin{cases} 0, & \text{若 } x \geqslant s, \\ S - x, & \text{若 } x < s. \end{cases}$$

到货时间不计. 每时段需求量相互独立, 且以概率 α_j 取 j, 所有不能立即满足的需求都会流失. 用 X_n 表示 n 个时段结束时的库存水平. 证明 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是 Markov 链, 并求其转移概率.

证明 设 n 第个时段的需求量为 D_n, 则 D_1, D_2 独立同分布, 且 D_k 独立于 $X_1, \cdots, X_{k-1}$. 由

$$X_{n+1} = 0 \wedge \begin{cases} X_n - D_n, & X_n \geqslant s, \\ S - D_n, & X_n < s \end{cases}$$

即知 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是 Markov 链, 其转移概率

$$P_{ij} = \begin{cases} \alpha_{S-j}, & i < s, 0 < j \leqslant S, \\ 0, & i < s, j > S, \\ \sum_{k=S}^{\infty} \alpha_k, & i < s, j = 0, \\ \alpha_{i-j}, & i \geqslant s, 0 < j \leqslant i, \\ 0, & i \geqslant s, j > i, \\ \sum_{k=i}^{\infty} \alpha_k, & i \geqslant s, j = 0. \end{cases}$$

□

习题 4.3 设状态数为 n. 证明：若 $i \to j$. 则状态 j 至多 n 步可达.

证明 若 $i \to j$, 则存在从 i 到 j 的路径 $\mathcal{P}$. 若 $\mathcal{P}$ 的长度大于 n, 则 $\mathcal{P}$ 必含一个到访次数至少为 2 的点, 通过删除与该点相关的无效路径, 可得到新路径 $\mathcal{P}'$, 其长度小于 $\mathcal{P}$ 的长度. 若 $\mathcal{P}'$ 的长度仍大于 n, 重复上述操作, 经过有限次缩减可得一条从 i 到 j 的路径, 其长度不超过 n, 即从 i 到 j 至多 n 步可达. □

习题 4.5 对状态 i,j,k $(k \neq j)$, 令

$$P_{ij/k}^n = \mathbb{P}(X_n = j, X_\ell \neq k, \ell = 1, \cdots, n-1 \mid X_0 = i).$$

(1) 用文字解释 $P_{ij/k}^n$ 的含义.

(2) 证明对 $i \neq j$, 有 $P_{ij}^n = \sum_{k=0}^{n} P_{ii}^k P_{ij/i}^{n-k}$.

解答 (1) $P_{ij/k}^n$ 表示从状态 i 出发, 经过 n 步到达状态 j 且出发后不途径状态 k 的概率.

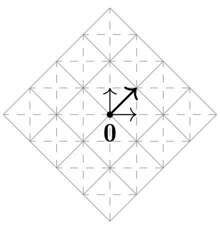
(2) 设 $T = \max\{0 \leqslant k \leqslant n : X_k = i\}$, 则

$$\begin{aligned}
P_{ij}^n &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = j, T = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = j, X_k = i, X_\ell \neq i, k+1 \leqslant \ell \leqslant n \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = j, X_\ell \neq i, k+1 \leqslant \ell \leqslant n \mid X_0 = i, X_k = i) \cdot \mathbb{P}(X_k = i \mid X_0 = i) \\
&\xlongequal{\text{Markov 性}} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = j, X_\ell \neq i, k+1 \leqslant n \mid X_k = i) \cdot P_{ii}^k \\
&\xlongequal{\text{时齐性}} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_{n-k} = j, X_\ell \neq i, 1 \leqslant \ell \leqslant n-k) \cdot P_{ii}^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} P_{ii}^k P_{ij/i}^{n-k}.
\end{aligned}$$

□

习题 4.6 证明二维对称随机游走是常返的, 而三维对称随机游走是滑过的.

证明 用 $\left\{\mathbf{S}_n^{(d)}, n \geqslant 0\right\}$ 表示 d 维对称随机游走, 它是不可约 Markov 链, 因此只需考虑 $\mathbf{0}$ 的常返性.



当 $d=2$ 时, 通过将 $\mathbb{Z}^2$ 旋转 $\frac{\pi}{4}$, 可将二维随机游走分解为沿两个新方向相互独立的一维随机游走, 进而

$$P_{\mathbf{00}}^{2n} = \mathbb{P}\left(\mathbf{S}_{2n}^{(2)} = \mathbf{0}\right) = \mathbb{P}\left(\mathbf{S}_{2n}^{(1)} = 0\right)^2 = \left[\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right]^2 \sim \frac{1}{\pi n}, \quad n \to \infty.$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{\mathbf{00}}^{2n} = +\infty$, 这说明二维对称随机游走是常返的.

当 $d=3$ 时,

$$P_{\mathbf{00}}^{2n} = \mathbb{P}\left(\mathbf{S}_{2n}^{(3)} = \mathbf{0}\right) = \frac{1}{6^{2n}} \sum_{i+j+k=n} \frac{(2n)!}{(i!j!k!)^2} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \sum_{i+j+k=n} \left(\frac{1}{3^n} \cdot \frac{n!}{i!j!k!}\right)^2.$$

由多项分布的概率质量函数可知

$$\sum_{i+j+k=n} \frac{1}{3^n} \cdot \frac{n!}{i!j!k!} = 1,$$

进而

$$\sum_{i+j+k=n} \left(\frac{1}{3^n} \cdot \frac{n!}{i!j!k!}\right)^2 \leqslant \max_{i+j+k=n} \left\{\frac{1}{3^n} \cdot \frac{n!}{i!j!k!}\right\} \leqslant \frac{n!}{3^n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{3}+1\right)^3}.$$

于是

$$P_{\mathbf{00}}^{2n} \leqslant \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \cdot \frac{n!}{3^n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{3}+1\right)^3} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\pi n}\right)^{\frac{3}{2}} \implies \sum_{n=1}^{\infty} P_{\mathbf{00}}^{2n} < +\infty,$$

这说明三维对称随机游走是滑过的. □

习题 4.8 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, $\mathbb{P}(X_i = j) = \alpha_j$ $(j \geqslant 0)$. 若 $X_n > \max\{X_1, \cdots, X_{n-1}\}$, 则称在时刻 n $(n > 0)$ 产生了一个记录, X_n 为其记录值. 这里 $X_0 \coloneqq -\infty$. 用 R_i 表示第 i 个记录值.

(1) 证明 $\{R_i, i \geqslant 1\}$ 是 Markov 链, 并求其转移概率.

(2) 用 T_i 表示第 i 个记录与第 $i+1$ 个记录之间的时间间隔. 问 $\{T_i, i \geqslant 1\}$ 和 $\{(R_i, T_i), i \geqslant 1\}$ 是否为 Markov 链? 若是, 求其转移概率.

(3) 令 $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$, $n \geqslant 1$. 证明 $\{S_n, n \geqslant 1\}$ 是 Markov 链, 并求其转移概率.

解答 (1) 由 "记录" 的定义即知 $\{R_i, i \geqslant 1\}$ 具有 Markov 性, 且

$$\mathbb{P}(R_{n+1} = j \,|\, R_n = i) = \frac{\alpha_j}{\sum\limits_{k=i+1}^{\infty} \alpha_k}.$$

再由

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(R_{n+m} = k \,|\, R_n = j) \\
=& \sum_{\ell_{m-1}=j+1}^{k-1} \sum_{\ell_{m-2}=\ell_{m-1}+1}^{k-1} \cdots \sum_{\ell_1=\ell_2+1}^{k-1} \mathbb{P}(R_{n+m} = k, R_{n+m-1} = \ell_1, \cdots, R_{n+1} = \ell_{m-1} \,|\, R_n = j) \\
=& \sum_{\ell_{m-1}=j+1}^{k-1} \sum_{\ell_{m-2}=\ell_{m-1}+1}^{k-1} \cdots \sum_{\ell_1=\ell_2+1}^{k-1} \mathbb{P}(R_{n+m} = k \,|\, R_{n+m-1} = \ell_1, \cdots, R_{n+1} = \ell_{m-1}, R_n = j) \\
&\cdot \mathbb{P}(R_{n+m-1} = \ell_1 \,|\, R_{n+m-2} = \ell_2, \cdots, R_{n+1} = \ell_{m-1}, R_n = j) \cdots \mathbb{P}(R_{n+1} = \ell_{m-1} \,|\, R_n = j) \\
\overset{\star}{=}& \sum_{\ell_{m-1}=j+1}^{k-1} \sum_{\ell_{m-2}=\ell_{m-1}+1}^{k-1} \cdots \sum_{\ell_1=\ell_2+1}^{k-1} \mathbb{P}(R_{n+m} = k \,|\, R_{n+m-1} = \ell_1) \cdots \mathbb{P}(R_{n+1} = \ell_{m-1} \,|\, R_n = j) \\
=& \sum_{\ell_{m-1}=j+1}^{k-1} \sum_{\ell_{m-2}=\ell_{m-1}+1}^{k-1} \cdots \sum_{\ell_1=\ell_2+1}^{k-1} \mathbb{P}(R_{m+1} = k \,|\, R_m = \ell_1) \cdots \mathbb{P}(R_2 = \ell_{m-1} \,|\, R_1 = j) \\
=& \mathbb{P}(R_{m+1} = k \,|\, R_1 = j)
\end{aligned}$$

可知 $\{R_n, n \geqslant 1\}$ 具有时齐性 ($\star$ 处用到了 Markov 性). 故 $\{R_i, i \geqslant 1\}$ 是 Markov 链, 其转移概率 $P_{ij} = \mathbb{P}(R_{n+1} = j \,|\, R_n = i)$ 如上.

(2) 由于 $T_i \sim \mathrm{Geo}(p_i)$, 其中 $p_i = \sum_{j > R_i} \alpha_j$ 与 R_i 有关, 因此仅由 T_{i-1} 无法推测 T_i. 或更具体地, 由

$$\mathbb{P}(T_3 = 1 \,|\, T_2 = 1, T_1 = 1) = \frac{\mathbb{P}(X_1 < X_2 < X_3 < X_4)}{\mathbb{P}(X_1 < X_2 < X_3)} = \frac{\frac{1}{4!}}{\frac{1}{3!}} = \frac{1}{4},$$

$$\mathbb{P}(T_3 = 1 \,|\, T_2 = 1, T_1 = 2) = \frac{\mathbb{P}(X_2 \leqslant X_1 < X_3 < X_4 < X_5)}{\mathbb{P}(X_2 \leqslant X_1 < X_3 < X_4)} = \frac{\frac{1}{5!}}{\frac{1}{4!}} = \frac{1}{5}$$

可见 $\{T_i, i \geqslant 1\}$ 不具有 Markov 性. 而对于 $j > i$, 有

$$\mathbb{P}(R_{n+1} = j, T_{n+1} = t \,|\, R_n = i, T_n = s) = \alpha_j \left(\sum_{k=0}^{i} \alpha_k\right)^{t-1},$$

因此 $\{(R_i, T_i), i \geqslant 1\}$ 是 Markov 链.

(3) 对于 $j > i$, 有

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \mathbb{P}(S_{n+1} = j \,|\, S_n = i) = \mathbb{P}((i,j) \text{ 不产生记录, 时刻 } j \text{ 产生记录} \,|\, \text{时刻 } i \text{ 产生记录}) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\text{前 } j-1 \text{ 个观测量最大值在第 } i \text{ 个}) \cdot \mathbb{P}(\text{前 } j \text{ 个观测量最大值在第 } j \text{ 个})}{\mathbb{P}(\text{前 } i \text{ 个观测量最大值在第 } i \text{ 个})} \\ &= \frac{\frac{1}{j-1} \cdot \frac{1}{j}}{\frac{1}{i}} = \frac{i}{(j-1)j}, \end{aligned}$$

因此 $\{S_n, n \geqslant 1\}$ 是 Markov 链. □

习题 4.9 对 Markov 链 $\{X_n, n \geqslant 0\}$, 证明

$$\mathbb{P}(X_k = i_k \,|\, X_j = i_j, \forall j \neq k) = \mathbb{P}(X_k = i_k \,|\, X_{k-1} = i_{k-1}, X_{k+1} = i_{k+1}).$$

证明 设状态空间 $S = \{i_j : j \in \mathcal{J}\}$, 则

$$\text{LHS} = \frac{\mathbb{P}(X_j = i_j, \forall j \in \mathcal{J})}{\mathbb{P}(X_j = i_j, \forall j \neq k)} = \frac{\prod\limits_{j \in \mathcal{J}} P_{i_j i_{j+1}}}{P^2_{i_{k-1} i_{k+1}} \prod\limits_{\substack{j \in \mathcal{J} \\ j \neq k-1, k}} P_{i_j i_{j+1}}} = \frac{P_{i_{k-1} i_k} \cdot P_{i_k i_{k+1}}}{P^2_{i_{k-1} i_{k+1}}},$$

其中含越界指标的转移概率均按 0 处理. 而

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \frac{\mathbb{P}(X_\ell = i_\ell, \ell = k-1, k, k+1)}{\mathbb{P}(X_{k-1} = i_{k-1}, X_{k+1} = i_{k+1})} = \frac{\mathbb{P}(X_\ell = i_\ell, \ell = k-1, k, k+1 \,|\, X_{k-1} = i_{k-1})}{\mathbb{P}(X_{k-1} = i_{k-1}, X_{k+1} = i_{k+1} \,|\, X_{k-1} = i_{k-1})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_k = i_k \,|\, X_{k-1} = i_{k-1}) \cdot \mathbb{P}(X_{k+1} = i_{k+1} \,|\, X_k = i_k)}{\mathbb{P}(X_{k+1} = i_{k+1} \,|\, X_{k-1} = i_{k-1})} = \text{LHS}. \end{aligned}$$

□

习题 4.11 设 $f_{ii} < 1$ 且 $f_{jj} < 1$. 证明:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n < \infty$.

(2) $f_{ij} = \dfrac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n}{1 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} P_{jj}^n}$.

证明 (1) 回忆用分别由概率序列 $\left\{P_{jk}^n, n \geqslant 0\right\}$ 和 $\left\{f_{jk}^n, n \geqslant 0\right\}$ 定义的概率母函数

$$\mathbf{P}_{jk}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{jk}^n z^n, \quad \mathbf{F}_{jk}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jk}^n z^n.$$

当 $i \neq j$ 时, 有等式

$$\mathbf{P}_{ij}(z) = \mathbf{F}_{ij}(z) \mathbf{P}_{jj}(z), \quad |z| < 1.$$

由 $f_{jj}<1$ 可知 $\mathbf{P}_{jj}(1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_{jj}^n<\infty$, 又 $\mathbf{F}_{ij}(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{ij}^n=f_{ij}\leqslant 1$, 因此当 $z=1$ 时上式 RHS 收敛. 由 Abel 定理, $\mathbf{F}_{ij}(z)\mathbf{P}_{jj}(z)$ 在 $z=1$ 处左连续, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}P_{ij}^n=\mathbf{P}_{ij}(1)=\lim_{z\to 1^-}\mathbf{P}_{ij}(z)=\lim_{z\to 1^-}\mathbf{F}_{ij}(z)\mathbf{P}_{jj}(z)=\mathbf{F}_{ij}(1)\mathbf{P}_{jj}(1)<\infty.$$

(2) 由 (1) 已得 $\mathbf{P}_{ij}(1)=\mathbf{F}_{ij}(1)\mathbf{P}_{jj}(1)$, 展开即得证. □

习题 4.31 一只蜘蛛在地点 1 和地点 2 之间捕捉一只苍蝇, 蜘蛛从地点 1 出发, 按转移矩阵为 $\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.3 & 0.7\end{bmatrix}$ 的 Markov 链移动. 苍蝇没有注意到蜘蛛, 从地点 2 出发, 按转移矩阵为 $\begin{bmatrix}0.4 & 0.6\\ 0.6 & 0.4\end{bmatrix}$ 的 Markov 链移动. 一旦它们相遇, 蜘蛛就捕获苍蝇, 捕猎结束.

(1) 证明: 除非知道捕猎结束的地点, 这个捕猎的过程都可以用一个具有 3 个状态的 Markov 链描述, 其中一个吸收状态表示捕猎结束, 其余两个状态蜘蛛和苍蝇在不同的地点. 求此 Markov 链的转移概率矩阵.

(2) 求在时刻 n 蜘蛛和苍蝇都回到它们最初位置的概率.

(3) 求捕猎的平均用时.

解答 (1) 定义 Markov 链 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 的 3 个状态如下:

(蜘蛛, 苍蝇)	$(1,1)$	$(2,2)$	$(1,2)$	$(2,1)$
状态	0		1	2

转移概率 $P_{11}=0.7\cdot 0.4=0.28$, $P_{12}=0.3\cdot 0.6=0.18$, $P_{10}=1-0.28-0.18=0.54$, $P_{21}=0.3\cdot 0.6=0.18$, $P_{22}=0.7\cdot 0.4=0.28$, $P_{20}=1-0.18-0.28=0.54$. 转移概率矩阵 $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.54 & 0.28 & 0.18\\ 0.54 & 0.18 & 0.28\end{bmatrix}$.

(2) 记 $a_n=\mathbb{P}(X_n=1\,|\,X_0=1), b_n=\mathbb{P}(X_n=1\,|\,X_0=2)$, 则

$$\begin{cases}a_n=0.28a_{n-1}+0.18b_{n-1},\\ b_n=0.18a_{n-1}+0.28b_{n-1}\end{cases}\implies\begin{cases}a_n+b_n=0.46(a_{n-1}+b_{n-1})=\cdots=0.46^n,\\ a_n-b_n=0.1(a_{n-1}-b_{n-1})=\cdots=0.1^n.\end{cases}$$

故在时刻 n 蜘蛛和苍蝇都回到它们最初位置的概率 $a_n=\dfrac{1}{2}(0.46^n+0.1^n)$.

(3) 由转移概率矩阵可见捕猎用时 $T\sim\mathrm{Geo}(0.54)$, 因此 $\mathbb{E}[T]=\dfrac{1}{0.54}=\dfrac{50}{27}$. □

习题 4.32 考虑 $\mathbb{Z}$ 上的简单随机游走, 每次粒子以概率 p 往正方向移动一步, 以概率 p 往负方向移动一步, 以概率 $q=1-2p$ $(0<p<\frac{1}{2})$ 不移动. 假设原点处有一吸收壁, 即 $P_{00}=1$, 且 N 处有一反射壁, 即 $P_{N,N-1}=1$, 粒子由 n $(0<n<N)$ 处出发. 证明粒子被吸收的概率为 1, 并求被吸收所需步数的均值.

解答 用 p_n 表示由 n $(0<n<N)$ 处出发的粒子最终被吸收的概率, 则

$$\begin{cases} p_n = pp_{n-1} + (1-2p)p_n + pp_{n+1}, \\ p_0 = 1, \quad p_N = p_{N-1} \end{cases} \implies p_n = 1, 0 \leqslant n \leqslant N.$$

用 μ_n 表示由 n $(0<n<N)$ 处出发的粒子被吸收所需步数的均值, 则由全期望公式,

$$\begin{cases} \mu_n = 1 + p\mu_{n-1} + (1-2p)\mu_n + p\mu_{n+1}, \\ \mu_0 = 0, \quad \mu_N = 1 + \mu_{N-1} \end{cases} \implies \begin{cases} p(\mu_{n+1} - \mu_n) = p(\mu_n - \mu_{n-1}) - 1, \\ \mu_0 = 0, \quad \mu_N - \mu_{N-1} = 1. \end{cases}$$

解得 $\mu_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{N-k}{p}\right) = n + \frac{Nn}{p} - \frac{n(n+1)}{2p}$. □

习题 4.33 给定分支过程 $\{X_n, n \geqslant 0\}$. 证明:

(1) X_n 要么趋于 0, 要么趋于 $+\infty$.

(2) $\operatorname{Var}(X_n \mid X_0 = 1) = \begin{cases} \sigma^2\mu^{n-1}\frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}, & \mu \neq 1, \\ n\sigma^2, & \mu = 1, \end{cases}$ 其中 μ 和 σ^2 是每个个体产生后代数的均值和方差.

证明 (1) 只需注意到对任意正整数 n, $\{1,2,\cdots,n\}$ 是一个非常返类 (否则, 由 $1 \to 0$ 及 $\{0\}$ 是一个常返类可得 $0 \to 1$, 显然不可能), 因此若 X_n 不趋于 0, 则对任意正整数 n, 对充分大的 m 均有 $X_m > n$, 即 $X_n \to +\infty$.

(2) 由

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(X_n \mid X_0 = 1) &= \mathbb{E}[\operatorname{Var}(X_n \mid X_{n-1}, X_0 = 1)] + \operatorname{Var}(\mathbb{E}[X_n \mid X_{n-1}, X_0 = 1]) \\ &= \mathbb{E}[\operatorname{Var}(X_n \mid X_{n-1})] + \operatorname{Var}(\mu X_{n-1} \mid X_0 = 1) \\ &= \mathbb{E}\big[\sigma^2 X_{n-1}\big] + \mu^2 \operatorname{Var}(X_{n-1} \mid X_0 = 1) \\ &= \sigma^2\mu^{n-1} + \mu^2 \operatorname{Var}(X_{n-1} \mid X_0 = 1) \end{aligned}$$

可得

$$\operatorname{Var}(X_n \mid X_0 = 1) = \sigma^2\big(\mu^{n-1} + \mu^n + \cdots + \mu^{2n-2}\big) = \begin{cases} \sigma^2\mu^{n-1}\frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}, & \mu \neq 1, \\ n\sigma^2, & \mu = 1. \end{cases}$$ □

习题 4.45 证明: 满足 $P_{ij} > 0$ $(\forall i \neq j)$ 的有限状态遍历 Markov 链是时间可逆的当且仅当

$$P_{ij}P_{jk}P_{ki} = P_{ik}P_{kj}P_{ji}, \quad \forall i,j,k.$$

证明 由于所给 Markov 链是遍历的, 可设其平稳分布为 $\{\pi_i\}$. 由 $P_{ij}>0\ (\forall i\neq j)$ 可得

$$\text{时间可逆}\begin{cases}\pi_iP_{ij}=\pi_jP_{ji},\\ \pi_jP_{jk}=\pi_kP_{kj},\\ \pi_kP_{ki}=\pi_iP_{ik}\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\pi_iP_{ij}P_{jk}P_{ki}=P_{ji}\pi_jP_{jk}P_{ki}=P_{ji}P_{kj}\pi_kP_{ki}=\pi_iP_{ik}P_{kj}P_{ji}$$

$$\Updownarrow$$

$$P_{ij}P_{jk}P_{ki}=P_{ik}P_{kj}P_{ji}$$

□

习题 4.48 对遍历的半 Markov 过程:

(1) 求过程从 i 转移到 j 的速率.

(2) 证明 $\displaystyle\sum_i\frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}=\frac{1}{\mu_{jj}}$.

(3) 证明过程处在状态 i 且将前往状态 j 所占时间比例为 $\dfrac{P_{ij}\eta_{ij}}{\mu_{ii}}$, 其中 $\eta_{ij}=\displaystyle\int_0^{+\infty}\overline{F}_{ij}(t)\,\mathrm{d}t$.

(4) 证明过程处在状态 i 且在时间 x 内的下一状态为 j 所占时间比例为 $\dfrac{P_{ij}\eta_{ij}}{\mu_{ii}}F_{ij}^{\mathrm{e}}(x)$, 其中 F_{ij}^{e} 是 F_{ij} 的平衡分布.

解答 (1) 定义延迟更新酬劳过程, 更新点为从其他状态进入 i 状态的时刻, 第 n 个更新区间的酬劳 $R_n=\begin{cases}1, & i\text{ 的下一个状态为 } j,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 用 $R_{ij}(t)$ 表示 $[0,t]$ 所获酬劳, T_{ii} 表示相邻两次访问状态 i 的时间间隔. 则过程从 i 转移到 j 的速率 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{R_{ij}(t)}{t}=\frac{\mathbb{E}[R]}{\mathbb{E}[T_{ii}]}=\frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}$.

(2) 由 (1), $\displaystyle\sum_i\frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}=\sum_i$ 从 i 转移到 j 的速率 $=$ 访问 j 的速率 $=\dfrac{1}{\mathbb{E}[T_{jj}]}=\dfrac{1}{\mu_{jj}}$.

(3) 调整 (1) 中酬劳 $R_n=\begin{cases}T_{ij}, & i\text{ 的下一个状态为 } j,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 其中 T_{ij} 表示从 i 出发访问 j 前滞留在 i 的时间, 则过程处在状态 i 且将前往状态 j 所占时间比例 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{R_{ij}(t)}{t}=\frac{\mathbb{E}[R]}{\mathbb{E}[T_{ii}]}=\frac{P_{ij}\mathbb{E}[T_{ij}]}{\mu_{ii}}=\frac{P_{ij}\eta_{ij}}{\mu_{ii}}$.

(4) 调整 (3) 中酬劳 $R_n=\begin{cases}x\wedge T_{ij}, & i\text{ 的下一个状态为 } j,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 则过程处在状态 i 且在时间 x 内的下一状态为 j 所占时间比例 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{R_{ij}(t)}{t}=\frac{\mathbb{E}[R]}{\mathbb{E}[T_{ii}]}=\frac{P_{ij}\mathbb{E}[x\wedge T_{ij}]}{\mu_{ii}}=\frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}\int_0^x\overline{F}_{ij}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{P_{ij}\eta_{ij}}{\mu_{ii}}F_{ij}^{\mathrm{e}}(x)$. □

习题 4.49 对遍历的半 Markov 过程, 求 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\mathbb{P}(\text{时间 } t \text{ 以后下一个访问的状态为 } j\,|\,X(t)=i)$.

解答 我们有

$$\lim_{t\to+\infty}\mathbb{P}(\text{时间 } t \text{ 以后下一个访问的状态为 } j\,|\,X(t)=i)$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{\lim\limits_{t\to+\infty}\mathbb{P}(\text{时间 } t \text{ 以后下一个访问的状态为 } j)}{\mathbb{P}(X(t)=i)}\\
&=\frac{P_{ij}\int_0^{+\infty}\overline{F}_{ij}(y)\,\mathrm{d}y}{\mu_{ii}P_i}\\
&=\frac{P_{ij}\eta_{ij}}{\mu_i}.
\end{aligned}
$$

□

习题 4.50 一辆出租车在 3 个地点之间行驶. 当它到达地点 1 时, 它下一次等可能地驶向 2 和 3; 当它到达地点 2 时, 它下一次以概率 $\frac{1}{3}$ 驶向 1, 以概率 $\frac{2}{3}$ 驶向 3; 从地点 3 它总是驶向 1. 在地点 j 和 j 之间的平均时间为 $t_{12}=20, t_{13}=30, t_{23}=30$ $(t_{ij}=t_{ji})$.

(1) 求出租车最近一次停靠的地点为 i $(i=1,2,3)$ 的 (极限) 概率.

(2) 求出租车前往地点 2 的 (极限) 概率.

(3) 求出租车正从 2 前往 3 所占时间比例. (注：到达一个地点后出租车立即离开.)

解答 转移概率矩阵 $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\\ 1&0&0\end{bmatrix}$. 由 $(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)\mathbf{P}$ 并归一化解得平稳分布 $\pi_1=\frac{3}{7}, \pi_2=\frac{3}{14}, \pi_3=\frac{5}{14}$. 于是 $\mu_1=P_{12}t_{12}+P_{13}t_{13}=25, \mu_2=P_{21}t_{21}+P_{23}t_{23}=\frac{80}{3}, \mu_3=P_{31}t_{31}+P_{32}t_{32}=30$.

(1) 由 $P_i=\dfrac{\pi_i\mu_i}{\pi_1\mu_1+\pi_2\mu_2+\pi_3\mu_3}$ 即得 $P_1=\dfrac{15}{38}, P_2=\dfrac{4}{19}, P_3=\dfrac{15}{38}$.

(2) 由习题 4.48 (3) 可知所求即 $\dfrac{P_{12}\eta_{12}}{\mu_{11}}=P_{12}t_{12}\left(\dfrac{\mu_1}{P_1}\right)^{-1}=\dfrac{3}{19}$.

(3) 由习题 4.48 (3) 可知所求即 $\dfrac{P_{23}\eta_{23}}{\mu_{22}}=P_{23}t_{23}\left(\dfrac{\mu_2}{P_2}\right)^{-1}=\dfrac{3}{19}$. □

习题 5.2 假设一单细胞生物可处在 A,B 两种状态之一. 在状态 A 的一个个体以指数速率 α 转移到状态 B, 在状态 B 的一个个体以指数速率 β 分裂为两个 A 型个体. 对这个种群定义一个恰当的连续时间 Markov 链, 并确定此模型的参数.

解答 记 $\sharp A=a, \sharp B=b$ 为状态 (a,b), 则转移速率

$$
q_{(a,b),(a-1,b+1)}=a\alpha,\quad q_{(a,b),(a+2,b-1)}=b\beta.
$$

□

习题 5.3 证明连续时间 Markov 链是正则的, 若以下之一成立:

(1) $\nu_i<M<+\infty, \forall i$.

(2) 其嵌入 Markov 链是不可约且常返的.

证明 (1) 由一致化方法, 原先的 Markov 链等价于按如下方式进行状态转移: 以速率 M 发生状态转移, 以概率 $\dfrac{\nu_i}{M}$ 转移出 i, 以概率 $1-\dfrac{\nu_i}{M}$ 发生虚转移 (回到 i). 分别记一致化前后的 Markov 链截至 t 时刻的转移次数为 $N(t)$ 和 $N^*(t)$, 则 $N(t)\leqslant N^*(t)$. 由 $N^*(t)\sim\mathrm{HPP}(M)$ 即知 $\mathbb{P}(N^*(t)<+\infty)=1$, 从而 $\mathbb{P}(N(t)<+\infty)=1$.

(2) 不妨设状态空间 $S=\{0,1,2,\cdots\}$. 设时刻 0 处在状态 j, 由于 j 为嵌入 Markov 链的常返态, 可定义更新过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$, 更新点为访问状态 j 的时刻, 设其更新间隔序列为 $\{X_n,n\geqslant 1\}$. 用 W_k 表示此连续时间 Markov 链滞留在状态 $k-1$ 的时间, 则

$$\sum_{k=1}^{\infty}W_k=\sum_{n=1}^{\infty}X_n=+\infty,$$

因此此连续时间 Markov 链是正则的. □

习题 5.7 考虑一个只有一个祖先的 Yule 过程 $\{X(t)\}$, 出生率为 λ. 设在时刻 s 出生的个体有 $P(s)$ 概率是健康的. 求在 $(0,t)$ 时间段内出生的健康个体数的分布.

解答 用 $R(t)$ 表示在 $(0,t)$ 时间段内出生的健康个体数, 设 $V_1,\cdots,V_{k-1}$ 独立同分布, 具有共同密度函数 $f(s)=\begin{cases}\dfrac{\lambda\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda t}}, & s\in(0,t),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 由 $X(t)\sim\mathrm{Geo}\big(\mathrm{e}^{-\lambda t}\big)$ 可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R(t)=n)&=\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(R(t)=n\,|\,X(t)=k)\mathbb{P}(X(t)=k)\\
&=\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(\text{于时刻 }S_1,\cdots,S_k\text{ 出生的个体有 }n\text{ 个健康}\,|\,X(t)=k)\cdot\mathrm{e}^{-\lambda t}\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\big)^{k-1}\\
&=\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(\text{于时刻 }V_{1:k-1},\cdots,V_{k-1:k-1}\text{ 出生的个体有 }n\text{ 个健康})\cdot\mathrm{e}^{-\lambda t}\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\big)^{k-1}\\
&=\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(\text{于时刻 }V_1,\cdots,V_{k-1}\text{ 出生的个体有 }n\text{ 个健康})\cdot\mathrm{e}^{-\lambda t}\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\big)^{k-1}\\
&=\sum_{k=n+1}^{\infty}\binom{k-1}{n}p^n(1-p)^{k-1-n}\mathrm{e}^{-\lambda t}\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\big)^{k-1}\\
&=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}p^n(1-p)^{k-n}\mathrm{e}^{-\lambda t}\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\big)^{k},
\end{aligned}$$

其中

$$p=\int_0^t p(s)\frac{\lambda\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda t}}\,\mathrm{d}s.$$

□

习题 5.12 系统状态可用转移速率 $\nu_0=\lambda,\nu_1=\mu$ 的两状态的连续时间 Markov 链 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 描述. 当系统处在状态 i 时, 事件按强度为 α_i $(i=0,1)$ 的 Poisson 过程发生. 用 $N(t)$ 表示 $(0,t)$ 中发生事件数.

(1) 求 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{N(t)}{t}$.

(2) 设初始状态为 0, 求 $\mathbb{E}[N(t)]$.

解答 (1) 构造以系统进入状态 0 为更新点的延迟更新过程, 第 n 个更新区间的酬劳 $R_n=$ 第 n 个更新区间发生事件数, 用 $R(t)$ 表示截至 t 时刻所得酬劳, 则

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}\frac{N(t)}{t}&=\lim_{t\to+\infty}\frac{R(t)}{t}\xlongequal[N_0(t)\sim\mathrm{HPP}(\alpha_0),N_1(t)\sim\mathrm{HPP}(\alpha_1)]{Y\sim\mathrm{Exp}(\lambda),Z\sim\mathrm{Exp}(\mu)}\frac{\mathbb{E}[N_0(Y)+N_1(Z)]}{\mathbb{E}[T]}\\
&=\frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}[N_0(Y)\,|\,Y]]+\mathbb{E}[\mathbb{E}[N_1(Z)\,|\,Z]]}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}}=\frac{\frac{\alpha_0}{\lambda}+\frac{\alpha_1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}}=\frac{\alpha_0\mu+\alpha_1\lambda}{\lambda+\mu}.
\end{aligned}$$

(2) 用 $T_i(t)$ 表示截至 t 时刻系统处在状态 i 的总时长 $(i=0,1)$, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N(t)] &= \mathbb{E}[N_0(T_0(t))] + \mathbb{E}[N_1(T_1(t))] \\ &= \alpha_0\mathbb{E}[T_0(t)] + \alpha_1\mathbb{E}[T_1(t)] \\ &= \alpha_0\mathbb{E}[T_0(t)] + \alpha_1(t - \mathbb{E}[T_0(t)]) \\ &= \alpha_1 + (\alpha_0 - \alpha_1)\mathbb{E}[T_0(t)],\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_0(t)] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\text{状态 }0}(s)\,\mathrm{d}s\right] = \int_0^t \mathbb{P}(s\text{ 时刻处在状态 }0)\,\mathrm{d}s \xlongequal{X(0)=0} \int_0^t P_{00}(s)\,\mathrm{d}s \\ &\overset{\star}{=} \int_0^t \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)s}\right)\mathrm{d}s = \frac{\mu t}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\Big[1 - \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}\Big].\end{aligned}$$

$\star$ 处来源: 由 Kolmogorov 向前方程组,

$$P_{00}'(t) = -\lambda P_{00}(t) + \mu P_{01}(t) \xlongequal{P_{00}(t)+P_{01}(t)=1} \mu - (\lambda+\mu)P_{00}(t),$$

再结合初值 $P_{00}(0)=1$ 可解得

$$P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}.$$

故

$$\mathbb{E}[N(t)] = \alpha_1 + (\alpha_0-\alpha_1)\left\{\frac{\mu t}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\Big[1-\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}\Big]\right\}.$$

□

习题 5.21 一个只有一位理发师的理发店最多容纳两位顾客. 潜在顾客以每小时 3 人的 Poisson 速率到达, 服务时长是均值为 $\frac{1}{4}$ 小时的独立指数随机变量.

(1) 求店里顾客的平均数.

(2) 求潜在顾客中进入店里的比例.

(3) 若理发师的工作效率翻倍, 她能多做多少生意?

解答 设从 0 时刻开始, 用 $\{X(t)\}$ 表示 t 时刻店里顾客数, 状态空间 $S=\{0,1,2\}$, 则 $\{X(t), t\geqslant 0\}$ 为一个生灭过程, 出生率 $\lambda_0=3, \lambda_1=3, \lambda_2=0$, 死亡率 $\mu_0=0, \mu_1=4, \mu_2=4$. 故转移速率矩阵为

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 4 & -7 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

由 $(P_0, P_1, P_2)\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ 并归一化可解得 $P_0 = \frac{16}{37}, P_1 = \frac{12}{37}, P_2 = \frac{9}{37}$.

(1) $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \lim\limits_{t\to+\infty}[\mathbb{P}(X(t)=1) + 2\mathbb{P}(X(t)=2)] = P_1 + 2P_2 = \frac{30}{37}$.

(2) 潜在顾客中进入店里的比例 $= \lim\limits_{t\to+\infty}\mathbb{P}(X(t)<2) = P_0 + P_1 = \frac{28}{37}$.

(3) 将前面求得的死亡率修改为 $\mu_1=\mu_2=8$, 计算可得

$$\widetilde{\mathbf{Q}}=\begin{bmatrix}-3 & 3 & 0\\ 8 & -11 & 3\\ 0 & 8 & -8\end{bmatrix} \implies \widetilde{P}_0=\frac{64}{97},\widetilde{P}_1=\frac{24}{97},\widetilde{P}_2=\frac{9}{97}.$$

此时潜在顾客中进入店里的比例 $=\lim\limits_{t\to+\infty}\mathbb{P}(X(t)<2)=\widetilde{P}_0+\widetilde{P}_1=\frac{88}{97}$. 因此实际光顾顾客的到达速率增加量为

$$3\cdot\left(\frac{88}{97}-\frac{28}{37}\right)=\frac{1620}{3589}\approx 0.45(\text{人/小时}).$$

□

习题 5.22 求 M/M/s 系统的极限概率, 并确定它们存在的条件.

解答 设顾客到达过程 $\sim$ HPP(λ), 服务时长 $\sim$ HPP(μ). 记 $X(t)$ 为时刻 t 系统中顾客人数, 则 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 为一个生灭过程, 出生率 $\lambda_n=\lambda$, 死亡率 $\mu_n=\mu(n\wedge s)$. 代入生灭过程极限概率表达式得

$$\begin{aligned}P_0&=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1}\right]^{-1}=\left[1+\sum_{n=1}^{s}\frac{\lambda^n}{\mu^n n!}+\sum_{n=s+1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\mu^n s!s^{n-s}}\right]^{-1}\\&=\left[\sum_{n=0}^{s}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)^n\right]^{-1},\end{aligned}$$

因此极限概率存在当且仅当级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)^n$ 收敛, 即 $\lambda<\mu s$, 此时

$$P_0=\left[\sum_{n=0}^{s}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!}\cdot\frac{\lambda}{\mu s-\lambda}\right]^{-1}.$$

余下的极限概率

$$P_n=\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1}P_0=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{\mu^n n!}P_0, & n\leqslant s,\\ \dfrac{\lambda^n}{\mu^n s!s^{n-s}}P_0, & n>s.\end{cases}$$

□

习题 5.37 令 $Y_i=X_{(i)}-X_{(i-1)}$ $(i=1,\cdots,n+1)$, 其中 $X_{(0)}=0,X_{(n+1)}=t$, 且 $X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)}$ 是 n 个独立的 $(0,t)$ 上的均匀随机变量的次序统计量. 证明 $\mathbb{P}(Y_i\leqslant y_i,i=1,\cdots,n+1)$ 是 $y_1,\cdots,y_n$ 的对称函数.

证明 作变换

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{J} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{J^{-1}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

由于 $\det(J)=1$, $(Y_1,\cdots,Y_n)$ 的密度函数为

$$f_{(Y_1,\cdots,Y_n)}(y_1,\cdots,y_n) = f(y_1, y_1+y_2, \cdots, y_1+\cdots+y_n),$$

其中 f 为 $\left(X_{(1)},\cdots,X_{(n)}\right)$ 的联合密度函数. 因此

$$f_{(Y_1,\cdots,Y_n)}(y_1,\cdots,y_n) = n!, \quad 0 < y_1 < y_1+y_2 < \cdots < y_1+\cdots+y_n < 1,$$

也即

$$f_{(Y_1,\cdots,Y_n)}(y_1,\cdots,y_n) = n!, \quad 0 < y_i < 1, 1 \leqslant i \leqslant n, y_1+\cdots+y_n < 1.$$

故 $\mathbb{P}(Y_i \leqslant y_i, i=1,\cdots,n+1)$ 是 $y_1,\cdots,y_n$ 的对称函数. □

习题 6.1 设 $\{Z_n, n \geqslant 1\}$ 是鞅, 证明: 对 $1 \leqslant k < n$, 有 $\mathbb{E}[Z_n \mid Z_1,\cdots,Z_k] = Z_k$.

证明 由鞅的定义,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_n \mid Z_1,\cdots,Z_k] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_n \mid Z_1,\cdots,Z_{n-1}] \mid Z_1,\cdots,Z_k] = \mathbb{E}[Z_{n-1} \mid Z_1,\cdots,Z_k] \\ &= \cdots = \mathbb{E}[Z_{k+1} \mid Z_1,\cdots,Z_k] = Z_k. \end{aligned}$$

□

习题 6.2 对鞅 $\{Z_n, n \geqslant 1\}$, 令 $X_i = Z_i - Z_{i-1}$ $(i \geqslant 1)$, 其中 $Z_0 = 0$. 证明: $\operatorname{Var}(Z_n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i)$.

证明 由于

$$\operatorname{Var}(Z_n) = \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \operatorname{Cov}(X_i, X_j),$$

而对 $1 \leqslant i < j \leqslant n$, 有

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) &= \mathbb{E}[X_iX_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] = \mathbb{E}[X_iX_j] = \mathbb{E}[(Z_i - Z_{i-1})(Z_j - Z_{j-1})] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(Z_i - Z_{i-1})(Z_j - Z_{j-1}) \mid Z_1,\cdots,Z_i]] \\ &= \mathbb{E}[(Z_i - Z_{i-1})(\mathbb{E}[Z_j \mid Z_1,\cdots,Z_i] - \mathbb{E}[Z_{j-1} \mid Z_1,\cdots,Z_i])] \\ &\xlongequal{\text{习题 6.1}} \mathbb{E}[(Z_i - Z_{i-1})(Z_i - Z_i)] = 0, \end{aligned}$$

故结论得证. □

习题 6.4 考虑一个 Markov 链, 每次转移以概率 p 向右一步, 以概率 $q = 1-p$ 向左一步. 证明: $\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}, n \geqslant 1\right\}$ 是鞅.

证明 我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n+1}} \,\middle|\, \left(\frac{q}{p}\right)^{S_1}, \cdots, \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}} \,\middle|\, \left(\frac{q}{p}\right)^{S_1}, \cdots, \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\right] \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}} \,\middle|\, \left(\frac{q}{p}\right)^{S_1}, \cdots, \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\right] \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}}\right] \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\left[\left(\frac{q}{p}\right)\cdot p + \left(\frac{q}{p}\right)^{-1}\cdot q\right] \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}.
\end{aligned}$$

□

习题 6.6 用 $X(n)$ 表示一个分支过程第 n 代的群体规模, 用 π_0 表示此过程由一个祖先起步至最终灭亡的概率. 证明: $\left\{\pi_0^{X(n)}, n \geqslant 0\right\}$ 是鞅.

证明 设每个个体产生后代个数独立同分布于 Z, 其分布列为 $\{p_i, i \geqslant 0\}$, 则

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\pi_0^{X(n+1)} \,\middle|\, \pi_0^{X(1)}, \cdots, \pi_0^{X(n)}\right] &= \prod_{i=1}^{X(n)} \mathbb{E}\left[\pi_0^{Z} \,\middle|\, \pi_0^{X(1)}, \cdots, \pi_0^{X(n)}\right] = \prod_{i=1}^{X(n)} \mathbb{E}\left[\pi_0^{Z}\right] \\
&= \prod_{i=1}^{X(n)} \sum_{j=0}^{\infty} p_j \pi_0^j = \pi_0^{X(n)}.
\end{aligned}$$

□

习题 6.7 设随机变量 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 独立同分布, 均值为 0, 方差为 σ^2, 令 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $Z_n = S_n^2 - n\sigma^2$. 证明: $\{Z_n, n \geqslant 1\}$ 是鞅.

证明 由于

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_{n+1}^2 \,\middle|\, S_1^2, \cdots, S_n^2\right] &= \mathbb{E}\left[(S_n + X_{n+1})^2 \,\middle|\, S_1^2, \cdots, S_n^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[S_n^2 \,\middle|\, S_1^2, \cdots, S_n^2\right] + 2\mathbb{E}\left[X_{n+1} S_n \,\middle|\, S_1^2, \cdots, S_n^2\right] + \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2 \,\middle|\, S_1^2, \cdots, S_n^2\right] \\
&= S_n^2 + 2\mathbb{E}[X_{n+1}]\mathbb{E}\left[S_n \,\middle|\, S_1^2, \cdots, S_n^2\right] + \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2\right] \\
&= S_n^2 + \sigma^2,
\end{aligned}$$

因此

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid Z_1, \cdots, Z_n] = \mathbb{E}\left[S_{n+1}^2 - (n+1)\sigma^2 \,\middle|\, S_1^2, \cdots, S_n^2\right] = S_n^2 + \sigma^2 - (n+1)\sigma^2 = S_n^2 - n\sigma^2 = Z_n.$$

□

习题 6.10 连续抛掷一枚硬币, 正面出现的概率为 p. 利用鞅论求下列花样首次出现的抛掷数的期望.

(1) HHTTHHT.

(2) HTHTHTH.

解答 引入公平赌博模型, 第 i 个赌徒于时刻 i 进入赌局参与赌博, 每人至多赌 7 局, 输则立即离开.

(1) 赌徒所选机制: 以 \$1 赌 H → 以 $\$\frac{1}{p}$ 赌 H → 以 $\$\frac{1}{p^2}$ 赌 T → 以 $\$\frac{1}{p^2q}$ 赌 T → 以 $\$\frac{1}{p^2q^2}$ 赌 H → 以 $\$\frac{1}{p^3q^2}$ 赌 H → 以 $\$\frac{1}{p^4q^2}$ 赌 T. 用 N 表示所求花样首次出现时刻, 则前 $N-7$ 赌徒累计输 $\$(N-7)$,

赌徒 $N-6$ 输累计赢 $\$\left(\frac{1}{p^4q^3}-1\right)$, 赌徒 $N-5$ 累计输 \$1, 赌徒 $N-4$ 累计输 \$1, 赌徒 $N-3$ 累计输 \$1, 赌徒 $N-2$ 累计赢 $\$\left(\frac{1}{p^2q}-1\right)$, 赌徒 $N-1$ 累计输 \$1, 赌徒 N 累计输 \$1. 由鞅停止定理,

$$\mathbb{E}\left[(N-7)-\left(\tfrac{1}{p^4q^3}-1\right)+1+1+1-\left(\tfrac{1}{p^2}-1\right)+1+1\right]=0 \implies \mathbb{E}[N]=\frac{1}{p^4q^3}+\frac{1}{p^2q}.$$

(2) 赌徒所选机制：以 \$1 赌 H $\to$ 以 $\$\frac{1}{p}$ 赌 T $\to$ 以 $\$\frac{1}{pq}$ 赌 H $\to$ 以 $\$\frac{1}{p^2q}$ 赌 T $\to$ 以 $\$\frac{1}{p^2q^2}$ 赌 H $\to$ 以 $\$\frac{1}{p^3q^2}$ 赌 T $\to$ 以 $\$\frac{1}{p^3q^3}$ 赌 H. 用 N 表示所求花样首次出现时刻, 则前 $N-7$ 赌徒累计输 $\$(N-7)$, 赌徒 $N-6$ 输累计赢 $\$\left(\frac{1}{p^4q^3}-1\right)$, 赌徒 $N-5$ 累计输 \$1, 赌徒 $N-4$ 累计赢 $\$\left(\frac{1}{p^3q^2}-1\right)$, 赌徒 $N-3$ 累计输 \$1, 赌徒 $N-2$ 累计赢 $\$\left(\frac{1}{p^2q}-1\right)$, 赌徒 $N-1$ 累计输 \$1, 赌徒 N 累计赢 $\$\left(\frac{1}{p}-1\right)$. 由鞅停止定理,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(N-7)-\left(\tfrac{1}{p^4q^3}-1\right)+1-\left(\tfrac{1}{p^3q^2}-1\right)+1-\left(\tfrac{1}{p^2q}-1\right)+1-\left(\tfrac{1}{p}-1\right)\right]&=0\\ \implies \mathbb{E}[N]=\frac{1}{p^4q^3}+\frac{1}{p^3q^2}+\frac{1}{p^2q}+\frac{1}{p}.\end{aligned}$$

□

习题 6.13 令 $Z_n=\prod_{i=1}^{n}X_i$, 其中 X_i $(i\geqslant 1)$ 是独立的随机变量, 满足 $\mathbb{P}(X_i=2)=\mathbb{P}(X_i=0)=\frac{1}{2}$. 令 $N=\min\{n:Z_n=0\}$. 问鞅停止定理是否可用？若可以, 能得到什么结论？若不行, 说明原因.

解答 不能用. 假设能用, 则 $\mathbb{E}[Z_N]=\mathbb{E}[Z_0]=\frac{1}{2}\cdot 2=1$, 但由 N 的定义, $\mathbb{E}[Z_N]=\mathbb{E}[0]=0$, 矛盾. □

习题 6.23 瓮中最初有一个白球和一个黑球, 每一次从中抽取一个球, 并将其与一个同色的球放回瓮中. 用 Z_n 表示第 n 次取放后瓮中白球比例.

(1) 证明：$\{Z_n,n\geqslant 1\}$ 是鞅.

(2) 证明：在瓮中白球比例曾达 $\frac{3}{4}$ 的概率至多为 $\frac{2}{3}$.

证明 (1) $\mathbb{E}[Z_{n+1}\,|\,Z_1,\cdots,Z_n]=Z_n\cdot\dfrac{(n+2)Z_n+1}{n+3}+(1-Z_n)\cdot\dfrac{(n+2)Z_n}{n+3}=Z_n.$

(2) 由于 $\{Z_n,n\geqslant 1\}$ 为非负鞅, 由 Kolmogorov 下鞅不等式,

$$\mathbb{P}\big(\max\{Z_1,\cdots,Z_n\}>\tfrac{3}{4}\big)\leqslant\frac{\mathbb{E}[Z_n]}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\mathbb{E}[Z_1]=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}.$$

□

习题 6.24 独立地抛掷硬币. 假设 A 认为 $\mathbb{P}(\mathrm{H})=a$, 假设 B 为 $\mathbb{P}(\mathrm{H})=b$, 其中 $0<a,b<1$. 用 X_i 表示第 i 次抛掷结果, 并令

$$Z_n=\frac{\mathbb{P}(X_1,\cdots,X_n\,|\,A)}{\mathbb{P}(X_1,\cdots,X_n\,|\,B)}.$$

证明若假设 B 正确, 则

(1) $\{Z_n,n\geqslant 1\}$ 是鞅.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}Z_n$ a.s. 存在.

(3) 若 $b\neq a$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}Z_n$.

解答 (1) 不妨令 $X_i = \mathbb{1}_{\{第\ i\ 次为\ \mathrm{H}\}}$. 利用 $Z_{n+1} = Z_n \cdot \dfrac{\mathbb{P}(X_{n+1} \mid A)}{\mathbb{P}(X_{n+1} \mid B)}$ 可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid Z_1, \cdots, Z_n] &= Z_n \cdot \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{P}(X_{n+1} \mid A)}{\mathbb{P}(X_{n+1} \mid B)}\right] = Z_n \cdot \mathbb{E}\left[\frac{a^{X_{n+1}}(1-a)^{1-X_{n+1}}}{b^{X_{n+1}}(1-b)^{1-X_{n+1}}}\right] \\ &= Z_n\left[\frac{a}{b} \cdot b + \frac{1-a}{1-b} \cdot (1-b)\right] = Z_n.\end{aligned}$$

(2) 由鞅收敛定理, 非负鞅必收敛.

(3) 定义随机变量 Y 使得 $\mathbb{P}\big(Y = \frac{a}{b}\big) = b, \mathbb{P}\Big(Y = \frac{1-a}{1-b}\Big) = 1-b$, 令 $Y_1, Y_2, \cdots \overset{\text{iid}}{\sim} Y$, 则 $Z_{n+1} = Z_n Y_{n+1} = Z_{n-1} Y_{n+1} Y_n = \cdots Z_1 Y_{n+1} Y_n \cdots Y_2 = Y_{n+1} Y_n \cdots Y_1$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{\ln Z_{n+1}}{n+1} &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} \ln Y_i \xrightarrow[\text{大数定律}]{n\to\infty} \mathbb{E}[Y] = b \ln\frac{a}{b} + (1-b)\ln\frac{1-a}{1-b} \\ &< \ln\left(b \cdot \frac{a}{b} + (1-b) \cdot \frac{1-a}{1-b}\right) = 0.\end{aligned}$$

故

$$\frac{\ln Z_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} -\lambda < 0 \implies Z_n = \mathrm{e}^{-\lambda n + o(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

□

习题 8.1 用 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 表示标准 Brown 运动过程. 令 $Y(t) = tX\big(\frac{1}{t}\big)$.

(1) 求 $Y(t)$ 的分布.

(2) 求 $\mathrm{Cov}(Y(s), Y(t))$.

(3) 证明 $\{Y(t), t \geqslant 0\}$ 亦为 Brown 运动过程.

(4) 令 $T = \inf\{t > 0 : X(t) = 0\}$, 用 (3) 证明 $\mathbb{P}(T = 0) = 1$.

解答 (1) $X\big(\frac{1}{t}\big) \sim N\big(0, \frac{1}{t}\big) \implies Y(t) \sim N(0, t)$.

(2) $\mathrm{Cov}(Y(s), Y(t)) = st\,\mathrm{Cov}\big(X\big(\frac{1}{s}\big), X\big(\frac{1}{t}\big)\big) = st \min\big\{\frac{1}{s}, \frac{1}{t}\big\} = \min\{s, t\}$.

(3) 我们通过 Brown 运动过程的等价定义完成验证. 由 (1) 与 (2), 只需再证 $\{Y(t), t \geqslant 0\}$ 为 Gauss 过程：对任意 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $X\Big(\frac{1}{t_1}\Big) - X\Big(\frac{1}{t_2}\Big), \cdots, X\Big(\frac{1}{t_{n-1}}\Big) - X\Big(\frac{1}{t_n}\Big), X\Big(\frac{1}{t_n}\Big)$ 为独立正态分布随机变量列, 因而 $(Y(t_1), \cdots, Y(t_n))$ 作为它们的线性组合服从多元正态分布.

(4) 由于 $\{Y(t), t \geqslant 0\}$ 为 Brown 运动过程, 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\big(Y(t) \neq 0, \forall t \in \big[\tfrac{1}{\varepsilon}, +\infty\big]\big) = 0,$$

也即

$$\mathbb{P}(T > \varepsilon) = \mathbb{P}(X(t) \neq 0, \forall t \in [0, \varepsilon]) = 0,$$

故 $\mathbb{P}(T = 0) = 1 - \mathbb{P}(T > 0) = 1$. □

习题 8.4 用 $\{Z(t), t \geqslant 0\}$ 表示 Brown 桥过程. 证明：令

$$X(t) = (t+1) Z\Big(\tfrac{t}{t+1}\Big),$$

则 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 为 Brown 运动过程.

证明 我们通过 Brown 运动过程的等价定义完成验证.

(1) 当 $t \geqslant 0$ 时, $\frac{t}{t+1} \in [0,1)$, 因此 $\mathbb{E}[X(t)] = (t+1)\mathbb{E}\left[Z\left(\frac{t}{t+1}\right)\right] = 0$.

(2) 对 $0 \leqslant s < t$, 由于 $0 \leqslant \dfrac{s}{s+1} < \dfrac{t}{t+1} < 1$, 我们有

$$\operatorname{Cov}(X(s), X(t)) = (s+1)(t+1)\operatorname{Cov}\left(Z\left(\tfrac{t}{t+1}\right), Z\left(\tfrac{s}{s+1}\right)\right) = (s+1)(t+1)\tfrac{s}{s+1}\left(1 - \tfrac{t}{t+1}\right) = s.$$

(3) 对任意 $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n$, 由 $\left(Z\left(\frac{t_1}{t_1+1}\right), \cdots, Z\left(\frac{t_n}{t_n+1}\right)\right)$ 服从多元正态分布知 $(X(t_1), \cdots, X(t_n))$ 服从多元正态分布. □

习题 8.5 随机过程 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 称为平稳过程, 若

$$(X(t_1), \cdots, X(t_n)) \overset{\mathrm{d}}{=\!=} (X(t_1+a), \cdots, X(t_n+a)), \quad \forall n, a, t_1, \cdots, t_n.$$

(1) 证明: Gauss 过程为平稳过程当且仅当 $\operatorname{Cov}(X(s), X(t))$ 仅依赖于 $t-s$ $(s \leqslant t)$, 且 $\mathbb{E}[X(t)] \equiv c$.

(2) 设 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 为 Brown 运动过程, 定义

$$V(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha t}{2}} X\left(\alpha \mathrm{e}^{\alpha t}\right).$$

证明 $\{V(t), t \geqslant 0\}$ 为平稳的 Gauss 过程. 它称为 Ornstein-Uhlenbeck 过程.

证明 (1) **(⇒)** 对 $0 \leqslant s < t$, 由平稳性, $\operatorname{Cov}(X(s), X(t)) = \operatorname{Cov}(X(0), X(t-s))$ 仅依赖于 $t-s$, 且 $\mathbb{E}[X(t)] \equiv \mathbb{E}[X(0)]$.

(⇐) $(X(t_1), \cdots, X(t_n))$ 与 $(X(t_1+a), \cdots, X(t_n+a))$ 均服从多元正态分布, 且其均值向量与协方差矩阵均相同, 因此二者同分布.

(2) 由于

$$\mathbb{E}[V(t)] = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha t}{2}} \mathbb{E}\left[X\left(\alpha \mathrm{e}^{\alpha t}\right)\right] = 0,$$
$$\operatorname{Cov}(V(s), V(t)) = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha(s+t)}{2}} \operatorname{Cov}\left(X(\alpha \mathrm{e}^{\alpha s}), X\left(\alpha \mathrm{e}^{\alpha t}\right)\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha(t-s)}{2}}, \quad \forall 0 \leqslant s < t,$$

而 Brown 运动过程是 Gauss 过程, 由 (1) 即得证. □

习题 8.7 用 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 表示标准 Brown 运动过程. 求下列随机变量的分布:

(1) $|X(t)|$.

(2) $\left|\min\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} X(s)\right|$.

(3) $\max\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} X(s) - X(t)$.

解答 (1) 对 $y \geqslant 0$, $\mathbb{P}(|X(t)| > y) = \mathbb{P}(X(t) > y) + \mathbb{P}(X(t) < -y) = 2\mathbb{P}(X(t) > y)$.

(2) 对 $y \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\min_{0 \leqslant s \leqslant t} X(s)\right| > y\right) &= \mathbb{P}\left(\min_{0 \leqslant s \leqslant t} X(s) > y\right) + \mathbb{P}\left(\min_{0 \leqslant s \leqslant t} X(s) < -y\right) = \mathbb{P}\left(\min_{0 \leqslant s \leqslant t} X(s) < -y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\max_{0 \leqslant s \leqslant t} X(s) \geqslant y\right) = \mathbb{P}(T_y \leqslant t) = 2\mathbb{P}(X(t) \geqslant y).\end{aligned}$$

(3) 由对偶原理, 对 $v \geqslant 0$ 与 $u \leqslant v$, 有

$$\mathbb{P}\left(\max_{0\leqslant s\leqslant t} X(s) > v, X(t) \leqslant u\right) = \mathbb{P}(X(t) > 2v-u) = \int_{2v-u}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}\,\mathrm{d}x,$$

因此将 $\dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v}$ 作用于

$$F(u,v) \coloneqq \mathbb{P}\left(\max_{0\leqslant s\leqslant t} (X) \leqslant v, X(t) \leqslant u\right) = \mathbb{P}(X(t) \leqslant u) - \mathbb{P}\left(\max_{0\leqslant s\leqslant t} X(s) > v, X(t) \leqslant u\right)$$

即得

$$f(u,v) \coloneqq \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} F(u,v) = \frac{2(2v-u)}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{(2v-u)^2}{2t}}.$$

故对 $y \geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{0\leqslant s\leqslant t} X(s) - X(t) \leqslant y\right) &= \iint\limits_{\substack{0\leqslant v\leqslant u+y \\ u\leqslant v}} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&\xlongequal[\mu=v]{\lambda=v-u} \int_0^y \int_0^{+\infty} \frac{2(\lambda+\mu)}{t\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{(\lambda+\mu)^2}{2t}}\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \\
&\xlongequal{x=\mu+\lambda} \int_0^y \int_\lambda^{+\infty} \frac{2x}{t\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_0^y \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2t}}\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \mathbb{P}(|X(t)| \leqslant y).
\end{aligned}$$

□

习题 8.9 用 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 表示标准 Brown 运动过程. 令 $M(t) = \max\limits_{0\leqslant s\leqslant t} X(s)$, 证明

$$\mathbb{P}(M(t) > a \,|\, M(t) = X(t)) = \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2t}}, \quad a > 0.$$

证明 令 $V(t) = M(t) - X(t)$, 由习题 8.7 (3) 可知 $V(t)$ 的概率密度函数

$$f_{V(t)}(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}}, \quad y \geqslant 0.$$

而 $M(t)$ 与 $V(t)$ 的联合密度函数

$$\begin{aligned}
f_{M(t),V(t)}(m,v) = f_{M(t),X(t)}(m-v,m) &\xlongequal{\text{习题 8.7 (3)}} \frac{2[2m-(m-v)]}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{[2m-(m-v)]^2}{2t}} \\
&= \frac{2(m+v)}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{(m+v)^2}{2t}}.
\end{aligned}$$

因此对 $a > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M(t) > a \,|\, M(t) = X(t)) = \mathbb{P}(M(t) > a \,|\, V(t) = 0) &= \int_a^{+\infty} \frac{f_{M(t),V(t)}(m,0)}{f_{V(t)}(0)}\,\mathrm{d}m \\
&= \int_a^{+\infty} \frac{\frac{2m}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{m^2}{2t}}}{\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}}\,\mathrm{d}m = \int_a^{+\infty} \frac{m}{t} \mathrm{e}^{-\frac{m^2}{2t}}\,\mathrm{d}m
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{m^2}{2t}}\Big|_{+\infty}^{a} = \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2t}}.$$ □

习题 8.10 用 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 表示标准 Brown 运动过程. 求 $T_x = \inf\{t \geqslant 0 : X(t) = x\}$ 的密度函数.

解答 对 $t > 0$, 由

$$\mathbb{P}(T_x \leqslant t) = 2\mathbb{P}(X(t) \geqslant |x|) = \int_{|x|}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2t}}\,\mathrm{d}u \xlongequal{u=\sqrt{t}v} \int_{\frac{|x|}{\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\,\mathrm{d}v$$

即得 T_x 的密度函数

$$f_{T_x}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\frac{|x|}{\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\,\mathrm{d}v = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi t^3}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}.$$ □

习题 8.14 用 T_x 表示标准 Brown 运动过程首次击中 x 的时刻, 求 $\mathbb{P}(T_1 < T_{-1} < T_2)$.

解答 我们有

$$\mathbb{P}(T_1 < T_{-1} < T_2) = \mathbb{P}(T_1 < T_{-1})\mathbb{P}(T_{-1} < T_2 \,|\, T_1 < T_{-1}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(T_{-2} < T_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$ □