Markov 链

M/G/1 系统 Example 4.1(A) X_n = 第 n 位顾客离开时系统滞留顾客数.

G/M/1 系统 Example 4.1(B) X_n = 第 n 位顾客到达时前面顾客数.

简单随机游走的绝对值 Example 4.1(D) $|S_n|$ = 时刻 n 与原点距离.

对 $i \neq 0$, $P(S_n = i \mid |S_n| = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \cdots, |S_1| = i_1) = \frac{p^i}{p^i + q^i}$.

Chapman-Kolmogorov 方程: $P_{ij}^{m+n} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^n P_{kj}^m$, 即 $\mathbb{P}^{(m+n)} = \mathbb{P}^{(m)} \mathbb{P}^{(n)}$.

周期是类性: 若 $i \leftrightarrow j$, 则 $d(i) = d(j)$.

$N_k(n) = \#\{\nu: X_\nu = k, 1 \le \nu \le n\}$ 表示前 n 步状态转移访问状态 k 的次数.

$f_{jk} = P(N_k(\infty) > 0 \mid X_0 = j)$ 从 j 出发, 最终能访问 k 的概率.

$g_{jk} = P(N_k(\infty) = \infty \mid X_0 = j)$ 从 j 出发, 能无穷次访问 k 的概率.

$f_{jk}^0 = 0, \forall j, k$. $f_{jk}^n = P(X_n = k, X_\nu \neq k, \nu = 1, \cdots, n-1 \mid X_0 = j)$, $n \ge 1$, 从 j 出发经 n 步首达 k.

$$f_{jk} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jk}^n, \quad P_{jk}^n = \sum_{m=1}^{n} f_{jk}^m P_{kk}^{n-m}, \quad \forall j, k.$$

$$g_{jk} = f_{jk} g_{kk}, \quad g_{kk} = \lim_{n\to\infty} (f_{kk})^n.$$

g_{kk}: 0-1 律. $g_{kk} = 1 \Leftrightarrow \underbrace{f_{kk} = 1}_{常返}$, $g_{kk} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{f_{kk} < 1}_{滑过}$.

有限状态 MC 所有状态不可能都是滑过的, 必有常返态.

常返/滑过如何用转移概率矩阵描述?

$f_{kk} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{kk}^n = \infty \qquad f_{kk} < 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{kk}^n < \infty$ (注意 P_{kk}^n 的含义)

常返性/非常返性是类性. (例如 Example 4.2(A) 对简单随机游走, 由于任意两状态互达, 只需考虑原点, 即分析 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^n$ 的敛散性. 只有对称简单随机游走常返.

设 $k \neq j$, $k \to j$ 且 $f_{kk} = 1$, 则 $j \leftrightarrow k$ 且 $f_{jk} = 1$.

常返类一定是闭的; 闭的非常返类一定含有无穷多个状态.

$\begin{cases} 闭的常返类 \\ 闭的非常返类 \\ 非闭的非常返类 \end{cases}$

设 C 为一个闭类, $k \in C$, 则 C 为常返类 $\Leftrightarrow f_{jk} = 1, \forall j \in C, j \neq k$.

若 j 为滑过态, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n < \infty, \forall i$. 从而 $P_{ij}^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

T_{jj} = 从 j 出发, 首次返回 j 所需步数.

$$\mu_{jj} = E[T_{jj}] = \begin{cases} \infty, & j \text{ 为非常返态} \\ \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^n, & j \text{ 为常返态} \end{cases}$$

$\mu_{jj} < \infty$: 正常返

$\mu_{jj} = \infty$: 零常返

称 j 为遍历的, 若 j 为正常返且非周期.

$$\lim_{n\to\infty} P_{jj}^{nd(j)} \Rightarrow \begin{cases} >0：正常返 \\ =0：零常返 \end{cases}$$

设 $i \leftrightarrow j$，则

- $P(\lim_{n\to\infty} \frac{N_j(n)}{n} = \frac{1}{\mu_{jj}} | X_0 = i) = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P_{ij}^k = \frac{1}{\mu_{jj}}$
- 若 j 非周期，则 $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{1}{\mu_{jj}}$
- 若 j 周期 d，则 $\lim_{n\to\infty} P_{jj}^{nd} = \frac{d}{\mu_{jj}}$. 不能换成ij

正/零常返性为类性.

$(\pi_0, \pi_1, \cdots)\mathbb{P} = (\pi_0, \pi_1, \cdots)$

一个 pmf $\{\pi_i, i \geq 0\}$ 称为 MC $\{X_n, n\geq 0\}$ 的平稳分布，若 $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}, \forall j$.

设 $X_0 \sim$ 平稳分布 $\{\pi_i, i\geq 0\}$，则 $X_n \sim$ 平稳分布，进而 $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}^n, \forall j$.

$\{X_n, n\geq 0\}$ 为平稳过程，即联合分布 $(X_n, X_{n+1}, \cdots, X_{n+m})$ 与 n 无关.

不可约非周期MC $\begin{cases} \text{(i) 所有状态滑过或零常返}, P_{ij}^n \to 0, \forall i,j, \text{不存在平稳分布.} \\ \text{(ii) 所有状态正常返(遍历)}, \pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n > 0, \forall i,j, \{\pi_j, j\geq 0\}\text{是唯一平稳分布.} \end{cases}$

注记 对于不可约、正常返(周期或非周期)MC，存在唯一的 pmf $\{\pi_i\}$ 满足 $\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}, \forall j$，$\pi_j$ 可解释为此MC在状态 j 的长程时间比例：

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\{\text{前}n\text{步转移访问状态}j\text{的次数}\} = \frac{1}{\mu_{jj}}.$$

不可约、正常返、周期为 d 的 MC：$\lim_{n\to\infty} P_{jj}^{nd} = d\pi_j, \forall j$.

赌徒破产问题 Example 4.4(A)

$$f_i := P(\text{MC在访问"0"之前先访问"N"} | X_0 = i) = \begin{cases} \frac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-(\frac{q}{p})^N}, & \text{若 } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{i}{N}, & \text{若 } p = \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{N\to\infty} \begin{cases} 1-(\frac{q}{p})^i, & \text{若 } p > \frac{1}{2} \\ 0, & \text{若 } p \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 即使是公平赌博，财富也不可能趋于无穷.

应用：求从 i 开始赌徒达到 0 或 n 的期望赌局数(构造停时+Wald等式)

分支过程：X_n = 第 n 代群体的大小 $(n\geq 0)$，Z_i = 第 $n-1$ 代第 i 个个体的后代数.

$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i$，若 $X_0 = 1$，则 $E[X_n] = \mu^n$. (μ 为每个个体后代数均值)

$\pi_0 := P(\text{群体最终灭绝})$，则 $\pi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} P(\text{群体最终灭绝} | X_1 = j) \cdot p_j = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \cdot \pi_0^j$.

在 $p_0 > 0, p_0 + p_1 < 1$ 下：$\pi_0 = 1 \Leftrightarrow \mu \leq 1$.

一个不可约正常返的MC必存在平稳分布 $\{\pi_i\}$. 当初始状态按平稳概率选取(即 $X_0 \sim \{\pi_i\}$)时，其逆向链也是MC，其转移概率 $P_{ij}^* = \frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i}$.

一个平稳MC称为时间可逆的，若 $P_{ij}^* = P_{ij}$ 即 $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}, \forall i,j$. 此时 $(X_n, X_{n+1}) \overset{d}{=} (X_{n+1}, X_n)$

时间可逆的充分条件：若存在 pmf $\{x_j\}$ 使得 $x_i P_{ij} = x_j P_{ji}, \forall i,j$，则 $\{X_n\}$ 时间可逆，且平稳分布为 $\{x_j\}$.

(遍历简单随机游走)

满足 $P_{i,i+1}+P_{i,i-1}=1$ 的遍历链是时间可逆的. Example 4.7(A)

时间可逆 MC 满足 $(X_m, X_{m+1}, \cdots, X_{m+k}) \overset{d}{=} (X_{m+k}, \cdots, X_{m+1}, X_m)$

不可约正常返的平稳 MC 是时间可逆的 $\Leftrightarrow P_{i,i_1}P_{i_1,i_2}\cdots P_{i_{k-1},i_k}P_{i_k,i}=P_{i,i_k}P_{i_k,i_{k-1}}\cdots P_{i_2,i_1}P_{i_1,i}$, $\forall i,i_1,\cdots,i_k,\ k\geq 1$.

逆向链的概念在过程不是时间可逆的情形也是有用的.

考虑一个转移概率矩阵 $\mathbb{P}=(p_{ij})$ 的不可约 MC. 若存在一个 pmf $\{\pi_i\}$ 和一个转移概率矩阵 $\mathbb{P}^*=(p_{ij}^*)$ 使得 $\pi_i P_{ij}=\pi_j P_{ji}^*$, $\forall i,j$. 则

(i) $\{\pi_i\}$ 为原MC的一个平稳分布.

(ii) P_{ij}^* 为逆向链的转移概率.

(iii) $\{\pi_i\}$ 也为逆向链的一个平稳分布.

时间可逆性的应用 ① Example 4.7(E) ② 设 $\{X_n\}$ 是一个不可约的MC, 其平稳分布为 $\{\pi_i\}$, 设 ϕ 为一个定义于状态空间的有界函数, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\phi(X_k)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\phi(j)\pi_j$.

"有界"可改为"非负"或" $\sum\pi_i|\phi(i)|<\infty$ ".

设 $\{\pi_i, i\in S\}$ 为 pmf, 则存在可逆不可约MC $\{X_n, n\geq 0\}$, 其状态空间为 S, 且 $\{\pi_i, i\in S\}$ 为MC的平稳分布.

半马氏过程 (SMP): $\{Z(t), t\geq 0\}$, $S=\{0,1,2,\cdots\}$, 若给定当前过程处在"i".

- 下一次状态转移进入"j"的概率为 P_{ij}.
- 在已知下一步转移进入"j"的条件下, 过程滞留"i"的时间分布为 F_{ij}.

SMP不是Markov过程.

T_i = SMP在下一次状态转移之前于状态 i 滞留时间 $\sim H_i(x)=\sum\limits_j P_{ij}F_{ij}(x)$.

$\mu_i=E[T_i]$ T_{ii} = SMP相邻两次访问状态 i 的时间间隔 $\mu_{ii}=E[T_{ii}]$

设SMP不可约, 且 T_{ii} 非格子点, $\mu_{ii}<\infty$, 则 $\lim\limits_{t\to\infty}P(Z(t)=i\,|\,Z(0)=j)=\frac{\mu_i}{\mu_{ii}}$, $\forall i,j$.

引入更新酬劳过程, 取消"非格子点"限制, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{(0,t]\text{处于"}i\text{"时长}}{t}=\frac{\mu_i}{\mu_{ii}}$.

实际中如何计算极限概率?

设SMP不可约, 其嵌入Markov链 $\{X_n\}$ 正常返, $\mu_{ii}<\infty$, 则 $P_i=\lim\limits_{t\to\infty}P(Z(t)=i\,|\,Z(0)=j)=\frac{\pi_i\mu_i}{\sum_j\pi_j\mu_j}$.

$Y(t)$ = 时刻 t "剩余寿命" $S(t)$ = t 之后下一个进入的状态

设SMP不可约, T_{ii} 非格子点, $\forall i$, 且 $\mu_{ii}<\infty$, 则 $\lim\limits_{t\to\infty}P(Z(t)=i, Y(t)>x, S(t)=j\,|\,Z(0)=k)=\frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}\int_x^\infty \bar{F}_{ij}(u)\,du$.

$\xrightarrow{\text{对}j\text{求和}} \lim\limits_{t\to\infty}P(Z(t)=i, Y(t)>x\,|\,Z(0)=k)=\frac{1}{\mu_{ii}}\int_x^\infty \bar{H}_i(u)\,du=P_i\cdot\bar{H}_{i,e}(x)$

$H_{i,e}(x)=\frac{1}{\mu_i}\int_0^x\bar{H}_i(u)\,du$ 为 H_i 的平衡分布

特殊的SMC

连续时间Markov链 $\nu_i=\infty$瞬态、$\nu_i=0$吸收

当MC进入"i"，滞留时间 $T_i\sim Exp(\nu_i)$. 与下一次转入的"j"无关(区别于SMC)

$P_{ii}=0$

T_i与下一步转移进入的状态独立

一个连续时间MC称为规则的，若有限时间内转移次数有限.

从i到j的转移速率 $q_{ij}=\nu_i\cdot P_{ij}$, $i\neq j$. 规定 $q_{ii}=-\nu_i$，矩阵 $Q=(q_{ij})_{s\times s}$ 每行元素和为0.

$P(于(t,t+\Delta t)访问状态 j\mid X(t)=i)=q_{ij}\Delta t+o(\Delta t)$

$P_{ij}(t)=P(X(t+s)=j\mid X(s)=i)$, $\forall s\geq 0$. 生灭过程Q矩阵只有3条对角线非0.

生灭过程：$q_{ij}=0$, $|i-j|>1$; $q_{i,i+1}=\lambda_i$(出生率); $q_{i,i-1}=\mu_i$(死亡率).

两指数分布随机变量取min $\Rightarrow T_i\sim Exp(\lambda_i+\mu_i)$. $\nu_i=q_{i,i+1}+q_{i,i-1}$ $\quad P_{i,i+1}=\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}$

HPP事件分类性质 ⇒ 处于"i"等待进入"i+1"的时间与等待进入"i-1"的时间独立.

M/M/s系统 Example 5.3(A)(i) 死亡率 $\mu_n=\mu\cdot\min\{n,s\}$, 出生率 $\lambda_n=\lambda$.

具有迁入的线性增长过程 Example 5.3(A)(ii) 该群体中每个个体以强度λ产生后代，以强度μ死亡，外部人口以强度θ进入该群体：$\lambda_n=n\lambda+\theta$, $\mu_n=n\mu$.

纯生过程：①如HPP(λ)，出生率 $\lambda_n\equiv\lambda$. ② Yule过程：$\lambda_n=n\lambda$. T_i=第i-1个出生到第i个出生之间的时间间隔(即从i到i+1时间) $\sim Exp(i\lambda)$

$\boxed{P(T_1+\cdots+T_n\leq t)=(1-e^{-\lambda t})^n}$, $n\geq 1 \Rightarrow P_{1j}(t)=P(S_{j-1}\leq t)-P(S_j\leq t)=e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-1}$,

即 $[X(t)\mid X(0)=1]\sim Geo^*(e^{-\lambda t}) \Rightarrow E[X(t)\mid X(0)=1]=e^{\lambda t}$. i个iid几何随机变量之和服从负二项分布.

前提：一个老祖先 $P_{ij}(t)=\binom{j-1}{i-1}e^{-\lambda t i}(1-e^{-\lambda t})^{j-i}$, $j\geq i\geq 1$.

$S_n=T_1+\cdots+T_n$. $[(S_1,\cdots,S_n)\mid X(t)=n+1]\overset{d}{=}(V_{1:n},\cdots,V_{n:n})$, $V_1,\cdots,V_n\overset{iid}{\sim}$ pdf. $f(s)=\begin{cases}\frac{\lambda e^{-\lambda(t-s)}}{1-e^{-\lambda t}}, & s\in(0,t)\\ 0, & 其他\end{cases}$

时刻t群体中个体年龄之和 Example 5.3(B) $A(t)=a_0+t+\sum_{i=1}^{X(t)-1}(t-S_i)$.

流行病模型 Example 5.3(C) 感染人数出生率 $\lambda_n=n(m-n)\alpha$

Kolmogorov向后微分方程：$P'_{ij}(t)=\sum_{k\neq i}q_{ik}P_{kj}(t)-\nu_iP_{ij}(t)$, 即 $P'(t)=QP(t)$. (后)

在一定的正则条件下(包括一切生灭过程和一切有限状态模型)，有向前微分方程

$P'_{ij}(t)=\sum_{k\neq j}P_{ik}(t)q_{kj}-P_{ij}(t)\nu_j$, 即 $P'(t)=P(t)Q$.

两状态MC Example 5.4(A) 利用 $P_{00}(t)+P_{01}(t)=1$, $P_{00}(0)=1$(初值)解ODE，不同方程参数对称性

$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \Rightarrow y=y_0e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_s^x p(t)dt}ds$.

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

生灭过程向前微分方程 Example 5.4(B)

$\mathbb{P}'(t)=\mathbb{P}(t)\mathbb{Q} \Rightarrow P_{i0}'(t)=-\lambda_0 P_{i0}(t)+\mu_1 P_{i1}(t),\ i\geq 0$

$P_{ij}'(t)=\lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t)-(\lambda_j+\mu_j)P_{ij}(t)+\mu_{j+1}P_{i,j+1}(t),\ j\geq 1.$

纯生过程 $\longrightarrow$ Example 5.4(C)

$P_{ii}'(t)=-\lambda_i P_{ii}(t)$

$P_{ij}'(t)=\lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t)-\lambda_j P_{ij}(t),\ j>i.$ （注意 $P_{i,i-1}(t)=0,\ \forall i$）

$$\Rightarrow\begin{cases} P_{ii}(t)=e^{-\lambda_i t} \text{（合理）} \\ P_{ij}(t)=\lambda_{j-1}e^{-\lambda_j t}\int_0^t e^{\lambda_j s}P_{i,j-1}(s)ds,\ j>i. \end{cases}$$

SMC理论 $\Rightarrow P_j:=\lim_{t\to\infty}P(X(t)=j\mid X(0)=i)=\dfrac{\frac{\pi_j}{\nu_j}}{\sum_k \frac{\pi_k}{\nu_k}}.$

如何用 $\{q_{ij}\}$ 表示 $\{P_i\}$？

$\boxed{(P_0,P_1,\cdots)\mathbb{Q}=(0,0,\cdots)}$ 看法：向前微分方程 $\mathbb{P}'(t)=\mathbb{P}(t)\mathbb{Q}$，$\mathbb{P}'(t)\to\mathbb{O}$.

- P_j 是长时间后过程处于"j"的时间占比.
- 若 $X(0)\sim pmf\{P_i\}$，则 $X(t)\sim pmf\{P_i\}$.
- 若 $X(0)\sim pmf\{P_i\}$，则 $(X(t_1+h),\cdots,X(t_n+h))$ 分布与h无关.

$\to P_j\nu_j=\sum_{i\neq j}P_i q_{ij}$（离开"j"速率＝进入"j"速率）

生灭过程：

状态	过程离开的速率 = 过程进入的速率
0	$P_0\lambda_0 = P_1\mu_1$
1	$P_1(\lambda_1+\mu_1) = P_2\mu_2+P_0\lambda_0$
$\vdots$	$\vdots \qquad \vdots$
n	$P_n(\lambda_n+\mu_n) = P_{n+1}\mu_{n+1}+P_{n-1}\lambda_{n-1}$

$$\Rightarrow\begin{cases} P_0\lambda_0=P_1\mu_1 \\ P_1\lambda_1=P_2\mu_2 \Rightarrow P_0\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}=P_n\mu_1\cdots\mu_n \\ P_n\lambda_n=P_{n+1}\mu_{n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\sum_{i=0}^{\infty}P_i=P_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1}\right)=1$$

生灭过程存在稳态分布 $\Leftrightarrow$ 此级数收敛

$\Rightarrow \boxed{P_0=\left[1+\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1}}\right]^{-1}}$，$P_1,P_2,\cdots$ 可依次求得.

M/M/1系统 Example 5.5(A) 顾客到达 $\sim HPP(\lambda)$，服务时间 $\sim Exp(\mu)$. 则 $\lambda_n\equiv\lambda,\ \mu_n\equiv\mu$.

$\to \rho:=\frac{\lambda}{\mu}<1$，即到达率 < 服务率才存在稳态分布.

$P_n=\dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{1+\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\lambda}{\mu})^k}=(\frac{\lambda}{\mu})^n(1-\frac{\lambda}{\mu}),\ n\geq 0$，即当 $t\to\infty$ 时，$X(t)\xrightarrow{d}Geo(1-\frac{\lambda}{\mu})$.

若 $\rho=1$，不可约MC零常返；$P_n=0$，由SMC理论，$\frac{E[T_n]}{E[T_{nn}]}=0$.

应用：Example 5.5(B)

考虑一个不可约正常返MC $\{X(t), t\ge 0\}$，假设 $X(0)$ 服从稳态分布 $\{P_i\}$，其嵌入链的平稳分布为 $\{\pi_i\}$. 则 $\{X(t)\}$ 的逆向链也是MC.

$\{X(t)\}$ 嵌入链的逆向链也是MC，转移概率 $P_{ij}^* = \frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i}$.

$\{X(t)\}$ 的逆向链在状态 i 滞留时间 $\tau_i^* \sim Exp(\nu_i)$.

$\{X(t), t\ge 0\}$ 称为时间可逆的，若 $P_{ij}^* = P_{ij}$，即 $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$，$\forall i,j$.

$\xrightarrow[q_{ij}=\nu_i P_{ij},\, i\ne j]{P_i \propto \frac{\pi_i}{\nu_i}}$ 时间可逆等价于 $\boxed{P_i q_{ij} = P_j q_{ji}}$ ($i\to j$ 速度 $= j \to i$ 速度) P_j 不仅是原MC的平稳概率也是逆向链的平稳概率

应用 生灭过程 遍历的生灭过程在稳态下是时间可逆的.

M/M/s系统的输出过程是Poisson过程：顾客按HPP(λ)到达，每个顾客服务时间 $\sim Exp(\mu)$，$\lambda < s\mu$，则系统在稳态下输出过程也是HPP(λ). Corollary 5.6.2

对连续时间MC $\{X(t)\}$，若存在pmf $\{x_i\}$ 满足 $x_j q_{ji} = x_i q_{ij}$，$\forall i,j$，则 $\{x_i\}$ 为MC的稳态分布，且MC为时间可逆的.

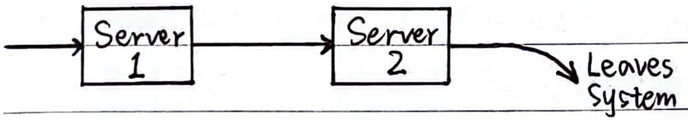
一个连续时间MC $\{X(t), t\ge 0\}$ 称为截于状态 $A\subset S$，是指其Q-矩阵 $Q^A = (q_{ij}^A)$ 满足：

$$q_{ij}^A = q_{ij},\ \forall i,j\in A; \qquad q_{ij}^A = 0,\ \forall i\in A, j\notin A.$$

记上述截于A的MC为 $\{X^A(t), t\ge 0\}$. 例子：M/M/1系统限制系统人数上限

设 $\{X(t), t\ge 0\}$ 时间可逆，稳态概率为 $\{P_i, i\in S\}$，则 $\{X^A(t), t\ge 0\}$ 也是时间可逆的，对应的稳态分布为 $P_i^A = \frac{P_i}{\sum_{j\in A} P_j}$，$\forall i\in A$.

$\overset{\lambda}{M}/\overset{\mu}{M}/1/N$-系统 (见左页)，$\lambda<\mu$，稳态概率 $P_j = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^j}{\sum_{k=0}^{N} (\frac{\lambda}{\mu})^k}$，$j=0,1,\cdots,N$.



串联排队系统：Server 1的输出是Poisson过程 $\Rightarrow$ Server 2面对M/M/1.

处于稳态的遍历M/M/1-排队系统
- 目前在系统中的顾客数(排队+服务)与过去离开时刻的序列独立.
- 顾客在系统中度过的时间(排队+服务)与他离开之前的离去过程独立.

处于稳态的M/M/2-串联排队系统 $\lambda < \min\{\mu_1, \mu_2\}$
- 目前在1号台和2号台的顾客数独立，$P(\#1=n, \#2=m) = (\frac{\lambda}{\mu_1})^n (1-\frac{\lambda}{\mu_1}) (\frac{\lambda}{\mu_2})^m (1-\frac{\lambda}{\mu_2})$.
- 顾客在1号台等待时间和在2号台等待时间独立. (但排队时间不独立)

$\underbrace{\text{等待时间和在2号台等待}}_{\text{排队+服务}}$

设 $Q=(q_{ij})$ 为一个不可约MC $\{X(t)\}$ 的转移速率矩阵，若能找到另外一个转移速率矩阵 $Q^* = (q_{ij}^*)$ 及一个pmf $\{P_i\}$，使得 $P_i q_{ij} = P_j q_{ji}^*$，$\forall i\ne j$，$\sum_{j\ne i} q_{ij} = \sum_{j\ne i} q_{ij}^*$，$\forall i$，则 $\{X(t)\}$ 逆向链转移速率矩阵为 Q^*，$\{P_i\}$ 为正向和逆向链的稳态分布.

一致化 考虑一个特殊的MC $\{X(t)\}$，满足 $\nu_i \equiv \nu$，$\forall i$，记 $N(t)$ 为 $[0,t]$ 时段状态转移次数，则 $\{N(t)\} \sim HPP(\nu)$。于是，

$$P_{ij}(t)=\sum_{n=0}^{\infty} P(X(t)=j \mid X(0)=i, N(t)=n)\cdot P(N(t)=n \mid X(0)=i)=\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{n}\frac{(\nu t)^n}{n!}e^{-\nu t}.$$

引进虚转移 设 $\{X(t)\}$ 为齐次MC，满足 $\nu_i \le \nu < \infty$，$\forall i$，则MC可等价为按如下方式进行状态转移：以速率 ν 发生状态转移，以概率 $\frac{\nu_i}{\nu}$ 转移出"i"，以概率 $1-\frac{\nu_i}{\nu}$ 发生虚转移（仍转入状态"i"）。用 P_{ij}^* 表示带有虚转移的MC的转移概率：

$$P_{ij}^*=\begin{cases} 1-\frac{\nu_i}{\nu}, & j=i, \\ \frac{\nu_i}{\nu}P_{ij}, & j\ne i. \end{cases} \Rightarrow P_{ij}(t)=\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{*n}\cdot\frac{(\nu t)^n}{n!}e^{-\nu t}.$$

应用 Example 5.8(A) 考虑 $\{0,1\}$ 两状态 MC $\{X(t)\}$，$\mathbb{Q}=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$，$\nu_0=\lambda$，$\nu_1=\mu$，$P_{01}=P_{10}=1$。取 $\nu=\lambda+\mu$，引进虚转移状态的MC，其转移概率矩阵为

$$\mathbb{P}^*=\begin{pmatrix} \frac{\mu}{\nu} & \frac{\lambda}{\nu} \\ \frac{\mu}{\nu} & \frac{\lambda}{\nu} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{P}^{*n}=(\mathbb{P}^*)^n=\mathbb{P}.$$

$$\Rightarrow P_{00}(t)=e^{-\nu t}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{(\nu t)^n}{n!}e^{-\nu t}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t},$$

$$P_{11}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

鞅

$\{Z_n, n\geq 1\}$称为鞅，如果$E[|Z_n|]<\infty, \forall n$，且$E[Z_{n+1}|Z_1,Z_2,\cdots,Z_n]=Z_n, a.s.\ \forall n\geq 1$.

- 设$\{X_n\}$独立，$E[X_n]=0$，记$Z_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$，则$\{Z_n\}$为鞅.
- 分支过程$\{X_n\}$，每个个体期望后代数为m，记$Z_n=\frac{X_n}{m^n}$，则$\{Z_n\}$为鞅.
- 设$\{X_n\}$独立，$E[X_n]=1$，记$Z_n=\prod_{j=1}^{n}X_j$，则$\{Z_n\}$为鞅.

在考虑Z_{n+1}的条件期望时，不只给定$Z_1,\cdots,Z_n$，而且还给定其他随机向量Y，若能证明$E[Z_{n+1}|Z_1,\cdots,Z_n,Y]=Z_n$，则$E[Z_{n+1}|Z_1,\cdots,Z_n]=E\{E[Z_{n+1}|Z_1,\cdots,Z_n,Y]|Z_1,\cdots,Z_n\}=E[Z_n|Z_1,\cdots,Z_n]=Z_n$. ✓ 应用

- 设$\{X, Y_n, n\geq 1\}$为任意随机变量序列，满足$E[|X|]<\infty$，定义$Z_n=E[X|Y_1,\cdots,Y_n], n\geq 1$，则$\{Z_n\}$为鞅. Doob型鞅 (若还有$\{X_n\}$ iid，则$Z_n=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)$)
- 已知任意$\{X_n, n\geq 1\}$满足$E[|X_n|]<\infty$ (不必独立)，定义$Z_n=\sum_{i=1}^{n}\{X_i-E[X_i|X_1,\cdots,X_{i-1}]\}, n\geq 1$，则$\{Z_n\}$为鞅. (减去投影)

设N为$\{Z_n, n\geq 1\}$的一个随机时刻，定义$\bar{Z}_n=Z_{n\wedge N}=\begin{cases}Z_n, & n\leq N,\\ Z_N, & n>N,\end{cases}$ 则称$\{\bar{Z}_n, n\geq 1\}$为$\{Z_n, n\geq 1\}$的停止过程.

设N为鞅$\{Z_n, n\geq 1\}$的随机时刻，则$\{\bar{Z}_n, n\geq 1\}$为鞅. $E[\bar{Z}_n]=E[\bar{Z}_1]=E[Z_1]$.

鞅停止定理 设$\{Z_n, n\geq 1\}$为鞅，N为停时. 若以下三条之一满足：

(i) $\bar{Z}_n$一致有界；(ii) N有界；(iii) $E[N]<\infty$，且存在常数$M<\infty$使$E[|Z_{n+1}-Z_n||Z_1,\cdots,Z_n]\leq M$，

则$E[Z_1]=E[Z_N]$.

花样问题：设$\{W_n, n\geq 1\}$ iid，$P(W_1=0)=\frac{1}{2}$，$P(W_1=1)=\frac{1}{3}$，$P(W_1=2)=\frac{1}{6}$. 记N为花样"020"首次发生时刻. 求$E[N]$. 引进公平赌博模型，有一系列赌徒进行公平赌博，第i个赌徒于时刻i开始进入赌局，开始赌博：

(1) 首局以\$1赌"0"，若"0"出现，则赌徒得\$2.

(2) 下局以\$2赌"2"，若"2"出现，则赌徒得\$12.

(3) 再下局以\$12赌"0"，若"0"出现，则赌徒得\$24.

一赌徒在任一局中输，则其累计输\$1；若连赢3局，则其累计赢\$(24-1)=\$23.

记X_n为到时刻n为止赌场累计所赢额，则$\{X_n, n\geq 1\}$为一个鞅，N为它的一个停时，$|X_{n+1}-X_n|\leq 3\times 23$. 则$X_N=(N-3)-23+1-1=N-26$，由鞅停止定理，$E[X_N]=E[X_1]=0$，于是$E[N]=26$.

n个人随机取帽，都得到自己帽子的期望轮数为n. $Z_k=\sum_{i=1}^{k}\{X_i-E[X_i|X_1,\cdots,X_{i-1}]\}, k\geq 1$.

设$E[|Z_n|]<\infty, \forall n\geq 1$.

(1) 下鞅：$E[Z_{n+1}|Z_1,\cdots,Z_n]\geq Z_n$, a.s. $\forall n\geq 1$. $E[Z_{n+1}]\geq E[Z_n]$ 上/下鞅的停止过程

(2) 上鞅：$E[Z_{n+1}|Z_1,\cdots,Z_n]\leq Z_n$, a.s. $\forall n\geq 1$. $E[Z_{n+1}]\leq E[Z_n]$ 仍为上/下鞅

鞅停止定理 设N为$\{Z_n, n\geq 1\}$的停时，若以下三条之一满足：

(i) Z_n一致有界；(ii) N有界；(iii) $E[N]<\infty$，且存在常数$M<\infty$使$E[|Z_{n+1}-Z_n||Z_1,\cdots,Z_n]\leq M$,

则 上鞅情形：$E[Z_1]\geq E[Z_N]$
下鞅情形：$E[Z_1]\leq E[Z_N]$.

设$\{X_n, n\geq 1\}$为下鞅，N为有界停时，$P(N\leq n)=1$，则$E[X_1]\leq E[X_N]\leq E[X_n]$.

设$\{Z_n, n\geq 1\}$为下(上)鞅，$f(x)$为单增(减)凸函数，则$\{f(Z_n), n\geq 1\}$为下(上)鞅. 若$\{Z_n\}$为鞅，f可不要求单调性

下鞅Kolmogorov不等式 设$\{Z_n, n\geq 1\}$为非负下鞅，则对任意$a>0$,

$$P(\max\{Z_1,\cdots,Z_n\}>a)\leq \frac{E[Z_n]}{a}.$$

$\xrightarrow{\text{取}f(x)=|x|} P(\max\{|Z_1|,\cdots,|Z_n|\}>a)\leq \frac{E[|Z_n|]}{a}$.

$\xrightarrow{\text{取}f(x)=x^2} P(\max\{|Z_1|,\cdots,|Z_n|\}>a)\leq \frac{E[Z_n^2]}{a^2}$.

鞅收敛定理 设$\{Z_n, n\geq 1\}$为鞅，且$E[|Z_n|]\leq M<\infty, \forall n\geq 1$，则$\lim_{n\to\infty} Z_n$以概率1存在有限.

$\xrightarrow{\text{推论}}$ 非负鞅必收敛(a.s.)于有限r.v.

应用 Example 6.4(B) 公平赌博一定会在有限时间内输光.

$N(0,t)$的矩母函数：$e^{\frac{ts^2}{2}}$ $= E[e^{sX(t)}]$

布朗运动

称$\{X(t),t\geq 0\}$为BMP，若(i) $X(0)=0$；(ii)具有独立平稳增量性；(iii)对$\forall t>0$, $X(t)\sim N(0,c^2t)$，其中$c>0$. 标准BMP：$c=1$.

对$\forall 0<t_1<\cdots<t_n$, $(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))\sim N_n(\vec{0},\Sigma)$，其中$\Sigma=\begin{bmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{bmatrix}$.

若$i\leq j$，则$Cov(X(t_i),X(t_j))=t_i$.

设$(Z_1,Z_2)\sim N_2\left(\binom{a}{b},\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix}\right)$，则$[Z_2|Z_1=x]\sim N(m(x),\sigma_{22}-\sigma_{21}\sigma_{11}^{-1}\sigma_{12})$，其中$m(x)=b+\sigma_{21}\sigma_{11}^{-1}(x-a)$.

对$\forall 0<s<t$, $[X(s)|X(t)=b]\sim N\left(\frac{s}{t}b,\frac{s(t-s)}{t}\right)$.

称$\{X(t),t\geq 0\}$为高斯过程，是指对$\forall t_1<t_2<\cdots<t_n$, $(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$多元正态分布.

$\{Z(t),0\leq t\leq 1\}$称为布朗桥 $\begin{cases} Z(0)=Z(1)=0 \\ \{Z(t),0<t<1\}\text{为高斯过程} \\ \text{对}\forall 0<s<t<1, E[Z(t)]=0, Cov(Z(s),Z(t))=s(1-t). \end{cases}$

BMP等价定义：(i)高斯过程.(ii) $E[X(t)]=0$.(iii)对$s\leq t$, $Cov(X(s),X(t))=s$.

设$\{X(t),t\geq 0\}$为布朗运动，则在给定$X(1)=0$条件下，$\{X(t),0\leq t\leq 1\}$为布朗桥.

设$\{X(t),t\geq 0\}$为布朗运动，定义$Z(t)=X(t)-tX(1)$，则$\{Z(t),0\leq t\leq 1\}$为布朗桥.

设$X_1,X_2,\cdots,X_n \stackrel{iid}{\sim} U(0,1)$，定义$N_n(s)=\#\{i: X_i\leq s, i=1,\cdots,n\}$, $F_n(s)=\frac{N_n(s)}{n}$, $s\in[0,1]$,

$\alpha_n(s)=\sqrt{n}(F_n(s)-s)$，则$\{\alpha_n(s),s\in[0,1]\}\xrightarrow{w}$布朗桥$\{Z(t),t\in[0,1]\}$.

击中时T_a. $\boxed{P(X(t)\geq a)=\frac{1}{2}P(T_a\leq t)\quad (a>0)}$

$P(T_a\leq t)=2P(X(t)\geq a)=2[1-\Phi(\frac{a}{\sqrt{t}})]\Rightarrow P(T_a<\infty)=1$, T_a是r.v.

$E[T_a]=\int_0^{+\infty}P(T_a>t)dt=\int_0^{+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{t}}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right)dt=\frac{2a^2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{y^2}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=+\infty$.

对$\forall a\in\mathbb{R}$, $T_a\stackrel{d}{=}T_{-a}$.

$P(\max_{0\leq s\leq t}X(s)\geq a)=P(T_a\leq t)=2P(X(t)\geq a)$. $\sqrt{\text{区间右端点/左端点}}$

反正弦律 对$\forall x\in(0,1)$, $t>0$, $P(\text{BMP于时间段}(xt,t)\text{未访问"0"})=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$.

几何BMP $Y(t)=e^{X(t)}$, $t\geq 0\Rightarrow E[Y(t)]=e^{\frac{t}{2}}$, $Var(Y(t))=e^{2t}-e^{t}$.

在一点被吸收的BMP 固定$x>0$，定义$Z(t)=\begin{cases}X(t), & T_x>t,\\ x, & T_x\leq t.\end{cases}$ 混合型cdf.

$P(Z(t)=x)=P(T_x\leq t)=2P(X(t)\geq x)$

对$\forall y<x$, $P(Z(t)\leq y)=P(X(t)\leq y,\max_{0\leq s\leq t}X(s)<x)=P(X(t)\leq y)-P(X(t)\leq y,\max_{0\leq s\leq t}X(s)\geq x)$

$\xlongequal{\text{对偶原理}} P(X(t)\leq y)-P(X(t)\geq 2x-y,\max_{0\leq s\leq t}X(s)\geq x)=P(X(t)\leq y)-P(X(t)\geq 2x-y)$.

积分BMP $Z(t)=\int_0^t X(s)ds$. ①$\{Z(t),t\ge 0\}$为高斯过程. ②$\{Z(t),t\ge 0\}$非Markov过程; $\{Z(t),X(t)\}$为Markov过程. ③$E[Z(t)]=0$; 对$s\le t$, $Cov(Z(s),Z(t))=s^2(\frac{t}{2}-\frac{s}{6})$. ④$(X(t),Z(t))\sim N_2(\vec{0},\Sigma)$, 其中

$$\Sigma=\begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \end{pmatrix}$$

称$\{X(t),t\ge 0\}$为漂移率为μ的布朗运动过程，若(i) $X(0)=0$; (ii)具有独立平稳增量性; (iii)对$\forall t>0$, $X(t)\sim N(\mu t,t)$. $X(t)=\mu t+B(t)$, 标准BMP.

$$\boxed{P(\underset{-B<x<A}{T_A<T_{-B}}\mid X(0)=x)=\frac{e^{2\mu B}-e^{-2\mu x}}{e^{2\mu B}-e^{-2\mu A}}}$$

- 标准BMP($\mu=0$), $P(T_c<T_d\mid B(0)=x)=\frac{x-d}{c-d}$, $d<x<c$.
- 当$x=0$, $\mu>0$时, 令$B\to\infty$得$P(T_A<\infty)=1$, $A>0$.
- 当$\mu<0$时, 令$x=0$且$B\to+\infty$得$P(T_A<\infty)=e^{2\mu A}$; 对偶地, 当$\mu>0$时, $P(T_{-B}<\infty)=e^{-2\mu B}$, $B\ge 0$.

$\Rightarrow$ 当$\mu<0$时, $\max\limits_{t\ge 0}X(t)\sim Exp(2|\mu|)$.

设$\{X(t),t\ge 0\}$为漂移率为$\mu\ge 0$的BMP, 则$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\max\limits_{0\le s\le t}X(s)=\mu$.

当$\mu\le 0$时, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\max\limits_{0\le s\le t}X(s)=0$.

设$\{X(t),t\ge 0\}$是漂移率为μ的BMP, 则$E[e^{-\theta T_x}]=\exp\{-x(\sqrt{\mu^2+2\theta}-\mu)\}$, $x\ge 0$, $\theta\ge 0$.

设$\{B(t),t\ge 0\}$为标准BMP, 则有鞅 $\begin{cases} Y(t)=B(t) \\ Y(t)=B^2(t)-t \\ Y(t)=e^{cB(t)-\frac{c^2t}{2}}, \forall c. \end{cases}$

基于鞅分析BMP 设$X(t)=B(t)+\mu t$, 定义停时$T=\min\{t: X(t)=A或X(t)=-B\}$, $-B<0<A$. T是鞅$Y(t)=e^{cB(t)-\frac{c^2t}{2}}=e^{cX(t)-c\mu t-\frac{c^2t}{2}}$的停时, 由于$Y(t)$介于$-B$与$A$之间(停止过程一致有界), 由鞅停止定理, $E[e^{cX(T)-c\mu T-\frac{c^2T}{2}}]=1$, 取$c=-2\mu$得

$$1=E[e^{-2\mu X(T)}]=e^{-2\mu A}P(T_A<T_{-B})+e^{2\mu B}[1-P(T_A<T_{-B})]\Rightarrow P(T_A<T_{-B})=\frac{e^{2\mu B}-1}{e^{2\mu B}-e^{-2\mu A}}.$$

求$E[T]$? 利用鞅$B(t)=X(t)-\mu t$及鞅停止定理, $0=E[X(T)-\mu T]=AP(T_A<T_{-B})-B[1-P(T_A<T_{-B})]-\mu E[T]\Rightarrow E[T]=\frac{Ae^{2\mu B}+Be^{-2\mu A}-A-B}{\mu[e^{2\mu B}-e^{-2\mu A}]}$.

设$\{X(t),t\ge 0\}$为漂移率为μ的BMP, 记$p(x,t;y)$为$[X(t)\mid X(0)=y]$的条件pdf.

向后扩散方程: $\frac{\partial}{\partial t}p(x,t;y)=\mu\frac{\partial}{\partial y}p(x,t;y)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}p(x,t;y)$.

向前扩散方程: $\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(x,t;y)=\mu\frac{\partial}{\partial x}p(x,t;y)+\frac{\partial}{\partial t}p(x,t;y)$.