▷ 机械振动

一维保守力在稳定平衡位置附近一定是弹性力.

$m\ddot{x}=-kx \Rightarrow x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$, $\omega^2=\frac{k}{m}$

弹簧振子: $\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$, $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$ $E=E_k+V=\frac{1}{2}kA^2$

$E_k=\frac{A^2}{2}m\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)=\frac{kA^2}{4}[1-\cos2(\omega t+\varphi_0)]$

$V=\frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega t+\varphi_0)=\frac{kA^2}{4}[1+\cos2(\omega t+\varphi_0)]$

一个周期内对时间平均: $\langle E_k\rangle=\langle V\rangle=\frac{1}{2}E$

一维振动合成: $\left.\begin{array}{l}x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)\\ x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)\end{array}\right\}$ 振幅、初相不同

$\Rightarrow x=A\cos(\omega t+\varphi)\begin{cases}A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}\\ \tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}\end{cases}$

频率、初相不同:

$x_1=A\cos(\omega_1t+\varphi_1)$, $x_2=A\cos(\omega_2t+\varphi_2)$.

$\Rightarrow x=\boxed{2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)}\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$

→ 取绝对值后即振幅

振幅变化频率/拍频

拍现象: 合振幅时大时小

$\nu=\left|\frac{\omega_1-\omega_2}{2\pi}\right|=|\nu_1-\nu_2|$

两个垂直、同频谐振动合成:

$x=A_x\cos(\omega t+\varphi_x)$, $y=A_y\cos(\omega t+\varphi_y)$

$\Rightarrow \frac{\left(\frac{x}{A_x}+\frac{y}{A_y}\right)^2}{A_+^2}+\frac{\left(\frac{x}{A_x}-\frac{y}{A_y}\right)^2}{A_-^2}=1\begin{cases}A_+=2\cos\frac{\varphi_y-\varphi_x}{2}\\ A_-=2\sin\frac{\varphi_y-\varphi_x}{2}\\ \varphi=\frac{\varphi_y-\varphi_x}{2}\end{cases}$

或:

$\frac{x^2}{A_x^2}+\frac{y^2}{A_y^2}-\frac{2xy}{A_xA_y}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$

① $\varphi_y-\varphi_x=\frac{\pi}{2}$: 顺(右旋); ② $\varphi_y-\varphi_x=\frac{3\pi}{2}$: 逆(左旋)

阻尼振动方程: $m\ddot{x}=-kx-\gamma\dot{x}$ $\begin{cases}\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\text{(固有角频率)}\\ \beta=\frac{\gamma}{2m}\text{(阻尼因子)}\end{cases}$

解 $x=A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t}$

$r_1=-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$, $r_2=-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$ 阻尼度 $\Lambda=\frac{\beta}{\omega_0}$

① 弱(欠)阻尼 ($\beta<\omega_0$): $x=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0)$, $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$

振幅 $A=A_0e^{-\beta t}$, 周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}>$ 系统固有周期

阻尼振子总能量 $E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\approx\frac{1}{2}m\omega_0^2A_0^2e^{-2\beta t}=\frac{1}{2}kA^2$

$\frac{dE}{dt}=-\gamma v^2=fv$ (克服粘滞阻力做功)

② 临界阻尼 ($\beta=\omega_0$): $x=(A_1+A_2t)e^{-\beta t}$ (不振,趋衡最快

③ 过阻尼 ($\beta>\omega_0$): 非周期,缓慢回到平衡(灵敏电流计)

$x=A_1\exp[-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t]+A_2\exp[-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t]$

受迫振动: $m\ddot{x}=-kx-\gamma\dot{x}+F_0\cos\Omega t$ $\begin{cases}\beta=\frac{\gamma}{2m}\\ h=\frac{F_0}{m}\\ \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\end{cases}$ → 本征频率

解 $x=\underbrace{A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi')}_{\text{暂态解(随时间消失)}}+\underbrace{A\cos(\Omega t+\varphi)}_{\text{稳态解}}$

定态解振幅 $A=\frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}}$, 相位 $\varphi=\arctan\frac{-2\beta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$

$\xrightarrow{\frac{dA}{d\Omega}=0}$ 共振角频率 $\Omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$, 振幅 $A_r=\frac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$

① β 越小, $\Omega_r\to\omega_0$, A_r 越大 ② $\beta=0$ 时, $\Omega_r=\omega_0$, $A_r\to\infty$ 尖锐

振子功率 $P=\frac{1}{T}\int_0^T\gamma\dot{x}^2dt=\frac{1}{2}\gamma(\Omega A)^2=\frac{\gamma h^2\Omega^2}{2[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2]}$

能量共振: $\frac{dP}{d\Omega}=0\Rightarrow\Omega=\omega_0$

单摆: 重力形成的力矩,在角度很小时有 $M=-mgl\sin\theta\approx-mgl\theta$. 根据转动定律, $I\beta=M\Rightarrow\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{mgl}{I}\theta$. 又有 $I=ml^2$. 故 $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0.\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$, $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

复摆: $I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mgl\sin\theta\approx-mgl\theta\Rightarrow\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{mgl}{I}\theta$

$\omega=\sqrt{\frac{mgl}{I}}=\sqrt{\frac{g}{L}}$, $T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, $L\triangleq\frac{I}{ml}$ 等值单摆长

▷ 机械波

固: 横、纵 液、气: 纵

① 弹性绳上横波: $u=\sqrt{\frac{F_T}{\rho}}$ $\begin{cases}F_T\text{: 绳中张力}\\ \rho\text{: 绳的线密度}\end{cases}$

② 固体棒中纵波: $u=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$

Y: 杨氏弹性模量, ρ: 体密度 $\left(\frac{F}{S}=Y\frac{\Delta l}{l_0}\right)$

③ 固体中横波: $u=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$. G: 切变模量 $\left(\frac{F}{S}=G\varphi\right)$

④ 流体中纵波: $u=\sqrt{\frac{B}{\rho}}$. B: 容变模量. ρ: 流体密度

理想气体: $u=\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$. $\gamma=\frac{C_p}{C_v}$, μ: 摩尔质量

角波数 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$. 右行波 $y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$

波动方程: $\frac{\partial^2y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2y}{\partial t^2}$ (平面波)

$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\Rightarrow\nabla^2\xi-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0.$

折射定律: $\frac{\sin i_1}{\sin i_2}=\frac{u_1}{u_2}=\frac{n_2}{n_1}$ 反/折射后,纵波可能变成横波或部分纵波部分横波(若横波可在介质中传播); 反之亦然.

相干条件: ① 同频. ② 相位相同或相位差恒定. ③ 振动方向相同(平行).

非相干波叠加: ① 同方向、同相速、不同频率:

$A\cos[\omega_1(t-\frac{x}{v})+\varphi_1]+A\cos[\omega_2(t-\frac{x}{v})+\varphi_2]$

$=2A\cos\left[\frac{\omega_1-\omega_2}{2}(t-\frac{x}{v})+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right]\cos\left[\frac{\omega_1+\omega_2}{2}(t-\frac{x}{v})+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right]$

(合成波(调制波)传播速度 = 各分波相速度)

② 同方向、不同频率、不同相速(存在色散):

$A\cos(\omega_1t-k_1x+\varphi_1)+A\cos(\omega_2t-k_2x+\varphi_2)$

$=\boxed{2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t-\frac{k_1-k_2}{2}x+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)}\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t-\frac{k_1+k_2}{2}x+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$

合成波包络线(群速度 = 其峰值传播速度) $u_g=\frac{\omega_2-\omega_1}{k_2-k_1}$

若由频率连续分布的多列波合成 $u_g=\frac{d\omega}{dk}$

瑞利群速公式: $u_g=u_p+k\frac{du_p}{dk}=u_p-\lambda\frac{du_p}{d\lambda}$

色散关系: u_p (或 k) 可能与 ω 有关.

$\frac{du_p}{d\lambda}=0$ (无色散); >0 (正常色散); <0 (反常色散)

驻波: 反向行进(左行+右行)、同频、同方向; 弦长 $L=n\frac{\lambda}{2}$.

合成波是一种振动,位相不在空间传播

$A\cos(\omega t-kx+\varphi_1)+A\cos(\omega t+kx+\varphi_2)$

$=2A\cos\left(kx+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\cos\left(\omega t+\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\right)$

相邻波腹/节距离 $=\frac{\lambda}{2}$ ① 若 $\cos\left(kx+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)>0$, 相位 $=\omega t+\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}$; ② 若 $\cos\left(kx+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)<0$, 相位 $=\omega t+\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}+\pi$ (波节间同相,波节两边反相)

纵波驻波: ① 波节: 质点密集. ② 波腹: 质点稀疏.

自由端: 形成波腹,相位突变0,全波反射,无半波损失

(疏→疏) $\left.\begin{array}{l}A\cos(\omega t-kx)+\underbrace{A\cos(\omega t+kx-2kl)}_{\text{反射波}}\\ =2A\cos(kx-kl)\cos(\omega t-kl)\end{array}\right\}$ 端点 $x=l$ (波腹)

(疏→密) 固定端: 形成波节,相位突变 π,半波反射,有半波损失

$A\cos(\omega t-kx)+\underbrace{A\cos(\omega t+kx-2kl-\pi)}_{\text{反射波}}$ (端点 $x=l$: 波节)

$=2A\cos(kx-kl-\frac{\pi}{2})\cos(\omega t-kl-\frac{\pi}{2})$

观察者 v_D (向波源>0), 波源 v_S (向观察者>0):

$\frac{\text{接收频率}\,\nu'}{\text{波源频率}\,\nu}=\frac{V+v_D}{V-v_S}$ (V: 介质中波速)

波源速度 $v_S>$ 波速 u: 马赫锥半顶角满足 $\sin\alpha=\frac{u}{v_S}$

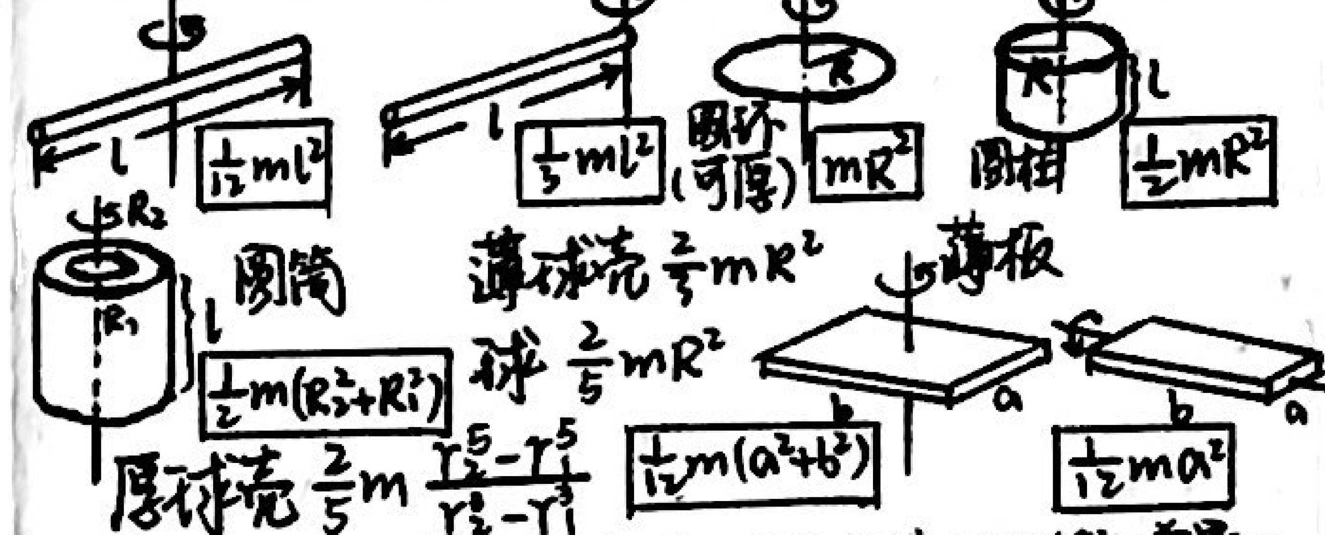
马赫数 $=\frac{v_S}{u}$

▷ 刚体力学

$I=\boxed{I_c}+m\underline{d}^2$ (两平行轴间距)

绕质心轴

(对平面分布刚体) 正交轴定理: $I_z=I_x+I_y$



合外力矩对刚体所做的功 = 刚体转动动能增量

刚体转动动能 $E_k=\frac{1}{2}I\omega^2$ 刚体定轴转动的角动量定理: $\int_{t_0}^{t}Mdt=I\omega-I\omega_0$ [若 I 在转动时发生变化(转轴不变), 则 $\int_{t_0}^{t}Mdt=I\omega-I_0\omega_0$]

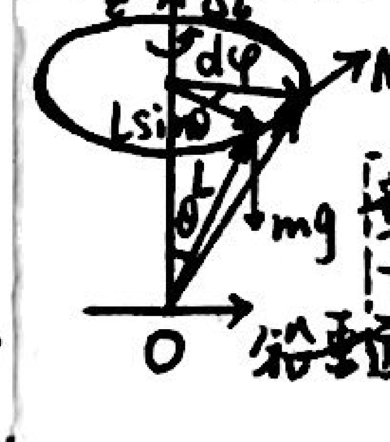
刚体定轴转动定理 $M=\frac{d(I\omega)}{dt}=I\beta$ 角动量守恒 $\sum I\omega=\text{const}$ 刚体动能 $E_k=\frac{1}{2}m_cv_c^2+\frac{1}{2}I_c\omega_c^2$

刚体平面平行运动的动能原理(注意要取质心作基点)

$E_k(t)-E_k(t_0)=A=\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{\theta_1}^{\theta_2}M_cd\theta$

纯滚动: 判据: $v_c=R\omega$, $a_c=R\beta$. 静摩擦力不做功

① 车轮在刚性水平地面上纯滚动: $f=0$ ② 主动轮: f 向前. ③ 被动轮: f 向后 ④ 车轮在斜面上纯滚动: 无论车轮向上向下, f 向上. (以上 f 表示静摩擦力)



z: 进动轴; 陀螺进动角速度 $\Omega=\frac{M}{L\sin\theta}$

L: 自转轴 $=\frac{mgr_c}{I\omega}$ 矢量式: $\vec{M}=\vec{\Omega}\times\vec{L}$

章动: 当陀螺的自转角速度不够大时,除了自转和进动外,陀螺对称轴还会在铅垂面内上下摆动,即角会有大小波动.

▷ 万有引力

有心力场质点运动: ① $\hat{r}$ 方向: $m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=f(r)$.

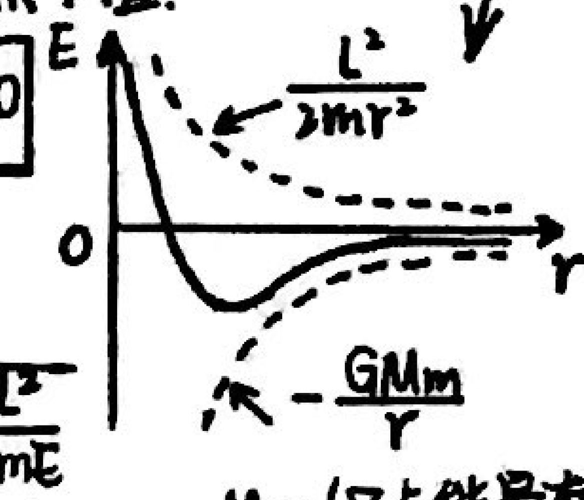
② $\hat{\theta}$ 方向: $m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})=0$ ③ 对原点(力心)角动量守恒: $mr^2\dot{\theta}=L(\text{const})$. ④ 机械能守恒: $E_k+V=\frac{1}{2}mv_r^2+\frac{1}{2}mv_\theta^2+V(\vec{r})=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+V(\vec{r})=$

$E(\text{const})=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\boxed{\frac{L^2}{2mr^2}+V(\vec{r})}$ → $V_{eff}(\vec{r})$ 有效势能

拱点: 质点的总能量为 E 的水平线与有效势能曲线的交点. (对引力场轨道, 拱点处径向速度 $v_r=\dot{r}=0$. 由式

$E=\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}$ 可得拱点 r 值.

$\Leftrightarrow\boxed{r^2+G\frac{Mm}{E}r-\frac{L^2}{2mE}=0}$



$E>0$: 双曲线. $E=0$: 抛物线

$E<0$: 椭圆 $r_{3min}\le r\le r_{3max}$

$r_{3min/max}=-G\frac{Mm}{2E}\mp\sqrt{\left(G\frac{Mm}{2E}\right)^2+\frac{L^2}{2mE}}$

半长轴 $a=\frac{1}{2}(r_{3min}+r_{3max})=-G\frac{Mm}{2E}$ (只与能量有关, $|E|$ 越小 a 越大)

$E=V_{eff\text{-}min}$, $r_4=\frac{L^2}{Gm^2M}$ (圆)

定量处理: 令 $h=\frac{L}{m}$. 由角动量守恒和机械能守恒定律: $r^2\dot{\theta}=h$, $\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{mh^2}{2r^2}+V(r)=E$. 解得

$r=\frac{r_0}{1+\varepsilon\cos\theta}$ ($r_0=\frac{h^2}{GM}$, ε 为与 E 和 $V(r)$ 有关待定常数)

① $\varepsilon=0$: 圆 ② $0<\varepsilon<1$: 椭圆(偏心率 ε, 近力心点 $\frac{r_0}{1+\varepsilon}$, 远力心点 $\frac{r_0}{1-\varepsilon}$. 长轴 $2a=\frac{2r_0}{1-\varepsilon^2}$. 短轴 $2b=\frac{2r_0}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$)

③ $\varepsilon=1$: 抛物线(顶点 $(\frac{r_0}{2},0)$, 准线 $x=r_0$). ④ $\varepsilon>1$ 双曲线(焦点 $(0,0)$, 开口向左)

[求由地球向火星发射人造天体的发射速度] 取双切轨道方案(霍曼轨道方案). 设地球轨道和火星轨道半径分别为 r_e、r_m, 则飞船运行椭圆轨道半长轴 $a=\frac{1}{2}(r_e+r_m)$. 由 $a=-\frac{Gm_sm}{2E}$ 得 $E=-\frac{Gm_sm}{r_e+r_m}$, 其中 m_s, m 分别为太阳和飞船质量, E 为飞船摆脱地球引力束缚后总能量. 此时飞船与太阳距离仍为 r_e, 动能 $E_k=\frac{1}{2}mv^2=E-V=-\frac{Gm_sm}{r_e+r_m}+\frac{Gm_sm}{r_e}$.

$\Rightarrow v=\sqrt{2Gm_s\left(\frac{1}{r_e}-\frac{1}{r_e+r_m}\right)}$ (这是相对于太阳的速度).

飞船摆脱地球引力后相对地球速度 $u=v-v_e$, 其中 $v_e=29.6\,km/s$ 为地球公转速度. 设飞船相对地球发射速度为 v', 则 $\frac{1}{2}mv'^2-\frac{Gm_em}{R_e}=\frac{1}{2}mu^2\Rightarrow v'^2=u^2+\frac{2Gm_e}{R_e}=u^2+v_2^2$, 其中 $v_2=11.2\,km/s$ 为第二宇宙速度. 代入数据得 $v=32.7\,km/s$, $u=2.9\,km/s$, $v'=11.6\,km/s$.

▷ 角动量守恒

角动量为掠面速度的 $2m$ 倍

质点角动量定理: $\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}$ (仅适用于惯性系)

质点系角动量定理: 只有外力矩才对体系角动量变化有贡献. 不论质心系是惯性系还是非惯性系, 在质心系中, 角动量定理仍然适用.

体系角动量=质心角动量+体系相对质心角动量

用角动量守恒定律解释星系的圆盘形结构：

银河系最初可能是球形的 $\xrightarrow{\text{与其他星系相互作用}}$ 具有一定角动量（在凝聚过程中，$r^2\omega=\text{const}$ 要求 $\omega\propto r^{-2}$，因而离心力 $\propto\frac{v^2}{r}=r\omega^2\propto r^{-3}$ 增大且比引力 $\propto r^{-2}$ 增大更快）→ 引力和离心力平衡 → 限制星系在垂直转轴方向进一步坍缩（但不妨碍星系沿转轴方向的坍缩）→ 圆盘状

▷ 动能定理

质点系动能定理：$\boxed{E_k(t)-E_k(t_0)=A_{外}+A_{内}}$

$A_{内}=A_{保内}+A_{非保内}$，$A_{保内}=V(t_0)-V(t)$ ⟹ $E(t)-E(t_0)=A_{外}+A_{非保内}$
（机械能） "功能原理"

①功能原理和机械能守恒定律只在惯性系中成立，非惯性系中要引入惯性力. ②内力做功与参考系无关. ③外力做功与参考系有关. ④体系的动能与参考系有关. ⑤体系的势能与参考系无关.

柯尼希定理：体系动能=质心动能+体系相对质心系动能（不论质心系是惯性系还是非惯性系）

质心系功能原理：$E(t)-E(t_0)=A_{外}+A_{非保内}$（即使质心系不是惯性系，也不需考虑惯性力所做功）

第一宇宙速度（人造卫星）：$m\frac{v_1^2}{r}=G\frac{Mm}{r^2}\Rightarrow v_1=\sqrt{\frac{GM}{r}}=\sqrt{\frac{GM}{R+h}}\approx\sqrt{\frac{GM}{R}}\approx7.9\,\text{km/s}$.

第二宇宙速度/逃逸速度（太阳系人造行星）：

$\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{GMm}{r}=0\Rightarrow v_2=\sqrt{\frac{2GM}{r}}=\sqrt{\frac{2GM}{R+h}}\approx\sqrt{\frac{2GM}{R}}\approx11.2\,\text{km/s}$. [产生黑洞：$v_2=C\Rightarrow$ 质量为 M 天体半径 $\frac{2GM}{C^2}$]

引力半径 $R_g=\frac{2GM}{C^2}$，总质量 $M=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$，$r=R_g$

$\Rightarrow R_g=\sqrt{\frac{3C^2}{8\pi G\rho}}$. 宇宙环境 $\rho=10^{-26}\,\text{kg/m}^3\Rightarrow R_g=10^{26}\,\text{m}$.（宇宙半径）

第三宇宙速度（银河系人造行星）：同 v_2 法可得以太阳为参考系的第三宇宙速度 $V_3=\sqrt{\frac{2GM_s}{\bar{r}}}$，其中太阳质量 $M_s\approx332\times10^3M$（地球质量），太阳-地球平均距离 $\bar{r}=1.5\times10^8\,\text{km}\approx234\times10^2R$（地球半径）. 故 $V_3=\sqrt{\frac{332\times10^3}{234\times10^2}}\,v_2\approx42.2\,\text{km/s}$. 这是从日心系看飞行器冲出的速度，其中包含地球绕太阳公转速度 $\bar{v}\approx29.8\,\text{km/s}$）从地球-飞行器质心参考系看，飞行器冲出地球引力范围时速度 $v_3'=V_3-\bar{v}\approx12.4\,\text{km/s}$. 再追溯到地面附近 h 高度，发射速度 v_3 满足机械能守恒：$\frac{1}{2}mv_3^2-G\frac{Mm}{R}=\frac{1}{2}mv_3'^2$. 利用 $\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}mv_2^2$ 得 $v_3^2=v_2^2+v_3'^2\Rightarrow v_3=16.7\,\text{km/s}$.

恢复系数 $e=\frac{|\vec{v}_1-\vec{v}_2|}{|\vec{v}_{10}-\vec{v}_{20}|}$　对心碰撞：

$\vec{v}_1=\frac{m_1-em_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{10}+\frac{(1+e)m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{20}$

$\vec{v}_2=\frac{(1+e)m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{10}+\frac{m_2-em_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{20}$

$\Delta E_k=\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_{10}-\vec{v}_{20})^2$

资用能：真正参与粒子反应的能量（实验室参考系内质心动能不参与粒子间反应）

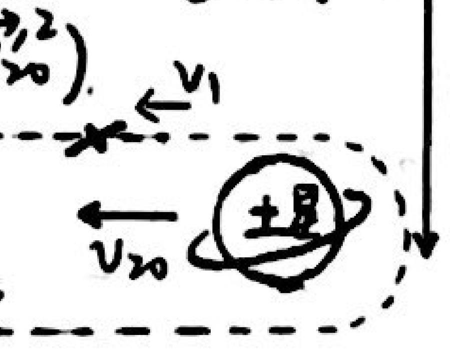
让相同的高能粒子沿相反方向运动.

在质心系中讨论正碰：实验室系（L系）中质心速度 $\vec{v}_c=\frac{m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20}}{m_1+m_2}$. 在质心系（C系）中：

$m_1\vec{v}_{10}'+m_2\vec{v}_{20}'=m_1\vec{v}_1'+m_2\vec{v}_2'=\vec{0}$，$\vec{v}_2'-\vec{v}_1'=e(\vec{v}_{10}'-\vec{v}_{20}')\Rightarrow\vec{v}_1'=-e\vec{v}_{10}'$，$\vec{v}_2'=-e\vec{v}_{20}'$.

$\Delta E_k'=(1-e^2)\cdot\frac{1}{2}(m_1\vec{v}_{10}'^2+m_2\vec{v}_{20}'^2)$.

弹弓效应：看成无接触碰撞，$e=1$，$m_1\ll m_2$. 则



$v_1=\frac{m_1-em_2}{m_1+m_2}v_{10}+\frac{(1+e)m_2}{m_1+m_2}v_{20}$

$\approx-v_{10}+2v_{20}=[-10.4+2\times(-9.6)]\,\text{km/s}=-29.6\,\text{km/s}$

两个相互作用的质点所组成 $\boxed{\text{孤立体系}}$ 的力学问题：

①S参考系法：选择与 m_2 相对静止的参考系，m_2 位于原点.（非惯性系）. 令 $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$. 则 $\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}$（若 $m_1\ll m_2$，则 $\mu=m_1$）

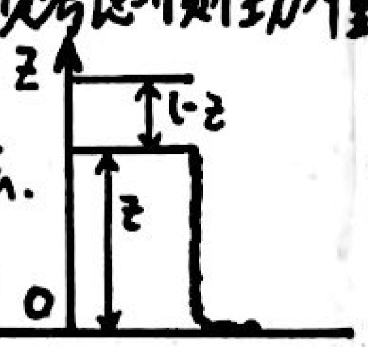
②质心系法：孤立体系的质心系是惯性系.

质心系中机械能 $E=\frac{1}{2}\mu v^2+V(r)$，其中 $\vec{v}=\vec{v}_1-\vec{v}_2$，$V(r)$ 为系统势能，$\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$.

▷ 动量守恒

动量定理只适用于惯性系，非惯性系中须考虑惯性力冲量.

绳：质量 m，长 l. 求下落到所剩长度为 z 时，地面对这段绳子的作用力. ①动量法.



绳子上端下落速度 $v=-\sqrt{2g(l-z)}$. 设紧靠地面的质元 dm 与地面碰时受支持力 N_1，则 $(N_1-gdm)dt=-vdm$. 忽略二级小量，并考虑 dt 内落地绳子长 $-vdt$，可得 $N_1=-v\frac{dm}{dt}=-v(-vdt\frac{m}{l})/dt=\frac{mv^2}{l}=2mg(1-\frac{z}{l})$. 已落地一段绳子受支持力 $N_2=(l-z)\frac{m}{l}g$. 故 $N=N_1+N_2=3mg(1-\frac{z}{l})$.

②质心法. 把绳子看作一质点系. 当绳子下落到所剩长度为 z 时，质心高度 $z_c=\frac{1}{m}\int_0^z z'\frac{m}{l}dz'=\frac{z^2}{2l}$，质心速度 $v_c=\frac{dz_c}{dt}=\frac{z}{l}\frac{dz}{dt}=\frac{zv}{l}$. 绳子上端下落速度 $v=-\sqrt{2g(l-z)}$，$\frac{dv}{dt}=-g$. 质心加速度 $a_c=\frac{dv_c}{dt}=\frac{d}{dt}(\frac{zv}{l})=\frac{v^2}{l}+\frac{z}{l}\frac{dv}{dt}=2g-\frac{3zg}{l}$. 由质心运动定理，$N-mg=ma_c\Rightarrow N=3mg(1-\frac{z}{l})$.

密舍尔斯基方程：$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\boxed{(\vec{u}-\vec{v})\frac{dm}{dt}}+\vec{F}$.　$\boxed{m\text{是变量}}$

dm 对主体的冲击力（$\frac{dm}{dt}\gtrless0$ 均成立）　附体　主体　$\vec{F}=\vec{F}_{dm}+\vec{F}_m$

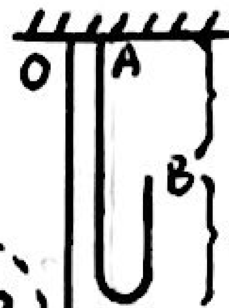
雨滴自由下落时质量 m_0，单位时间凝聚水汽质量 λ. 求雨滴经时间 t 下落距离.（忽略空气阻力）.

$\frac{d}{dt}[(m_0+\lambda t)v]=(m_0+\lambda t)g\xrightarrow[\text{积分}]{t=0\text{时}v=0}v=\frac{m_0t+\frac{1}{2}\lambda t^2}{m_0+\lambda t}g$

$=\frac{1}{2}gt+\frac{m_0g}{2\lambda}-\frac{\frac{m_0^2g}{2\lambda}}{m_0+\lambda t}=\frac{dx}{dt}\xrightarrow[\text{积分}]{t=0\text{时}x=0}$

$x=\frac{1}{2}g\left[\frac{1}{2}t^2+\frac{m_0}{\lambda}t-(\frac{m_0}{\lambda})^2\ln(1+\frac{\lambda}{m_0}t)\right]$

① 当 $u=v$ 时，$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$（$m$ 是变量）② $u=0$ 时变为 $\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$.



柔软绳子（长 l，线密度 λ），求 B 自由下落 x 时支点受力 T. ①变质量法.

B 降落 x 时速度 $u=\sqrt{2gx}$. dt 时间内进入左端绳子质量 $dm=\frac{1}{2}\lambda udt$. 对左端绳子：

$(\frac{l+x}{2})\lambda\frac{dv}{dt}=(u-v)\frac{dm}{dt}+(\frac{l+x}{2})\lambda g-T\xrightarrow{v=0}$

$T=\frac{\lambda g}{2}(l+3x)$. ②质心法. $mg-T=ma_c$

当 B 自由下落 x 时质心位置 $r_c=\frac{m_Ar_{Ac}+m_Br_{Bc}}{m_A+m_B}=-\frac{x^2}{4l}+\frac{x}{2}+\frac{l}{4}$. 由 $x=\frac{1}{2}gt^2$ 知 $a_c=\ddot{r}_c=\frac{g}{2}(1-\frac{3x}{l})$.

故 $T=mg-ma_c=\frac{\lambda g}{2}(l+3x)$.

火箭喷气相对速度 $\vec{u}-\vec{v}$ 为常量 v_r. 则 $m\frac{dv}{dt}=-v_r\frac{dm}{dt}$

$\Rightarrow-\int_M^m\frac{dm}{m}=\frac{1}{v_r}\int_0^{v_f}dv\Rightarrow v_f=v_r\ln\frac{M}{m}$.

▷ 非惯性参考系

每日两次涨潮、落潮（除两极）.

若不考虑地球自转，地球参考系是平动参考系，由于太阳引力的不均匀性，太阳引力和惯性力的合力使 A、C 靠近，B、D 远离. 若再考虑地球自转，由于水面形状、位置相对太阳不变，于是地球上一天将看到两次涨潮和两次落潮. 月球对潮汐的作用比太阳更大：月球离地球近，月球比太阳的引力不均匀性大得多.

动参考系作匀角速转动：①速度变换：绝对速度 $\vec{v}=$ 相对速度 $\vec{v}'+$ 牵连速度 $\vec{\omega}\times\vec{r}'$ ②加速度变换：绝对加速度 $\vec{a}=$ 相对加速度 $a'+$ 牵连加速度 $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')+$ 科里奥利加速度 $2\vec{\omega}\times\vec{v}'$. ③惯性离心力：$\vec{f}_c=-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$ ④科里奥利力：$\vec{f}_{cor}=-2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$.

选取水面底为原点，建立随水桶一起转动的坐标系，在水面上取一质量元 m.

$mg\sin\theta-m\omega^2r\cos\theta=0\Rightarrow\tan\theta=\frac{\omega^2r}{g}$.

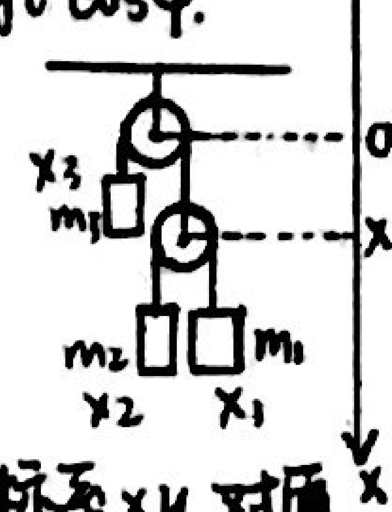
又 $\tan\theta=\frac{dz}{dr}\Rightarrow\frac{dz}{dr}=\frac{\omega^2r}{g}\xrightarrow[\text{积分}]{r=0\text{时}z=0}z=\frac{\omega^2}{2g}r^2$.

科里奥利力只有当物体相对转动参考系运动时才出现，与相对速度成正比且垂直. [傅科摆北顺南逆]

①北半球河流冲刷右岸. ②火车对右轨偏压较大. ③自由落体偏东. ④傅科摆转动角速度 $\Omega=-\omega\sin\theta$（θ 为纬度）⑤大气图上高、低气压环流能长期存在.

纬度 φ 处落体偏东距离 $y=\frac{1}{3}\omega gt^3\cos\varphi$.

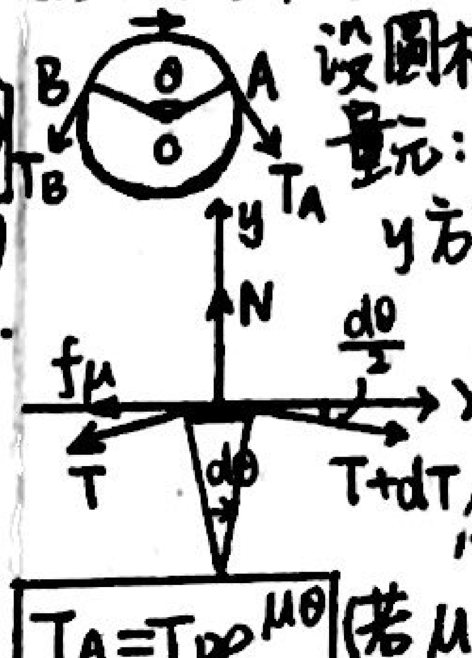
▷ 质点动力学



设动滑轮中心坐标 x，加速度 a.

由绳长不变得 $x+x_3=l_1$，$(x_2-x)+(x_1-x)=l_2$. 微分两次得 $a+a_3=0$，

$a_2+a_1-2a=0\xrightarrow{\text{消}a}a_2+a_1+2a_3=0$.



设圆柱右力大于左力，建坐标系 xy. 对质量元：x 方向：$(T+dT)\cos\frac{d\theta}{2}-T\cos\frac{d\theta}{2}-f_\mu=0$.

y 方向：$-(T+dT)\sin\frac{d\theta}{2}-T\sin\frac{d\theta}{2}+N=0$.

又有 $f_\mu=\mu N$，$\sin\frac{d\theta}{2}\approx\frac{d\theta}{2}$，$\cos\frac{d\theta}{2}\approx1$.

$\Rightarrow dT=\mu N$，$\frac{1}{2}dTd\theta+Td\theta=N$.

忽略二级小量：$\int_{T_B}^{T_A}\frac{dT}{T}=\mu\int_0^\theta d\theta\Rightarrow$

$\boxed{T_A=T_Be^{\mu\theta}}$（若 $\mu=0$，$T_A=T_B$，无摩擦滑轮）

▷ 质点运动学

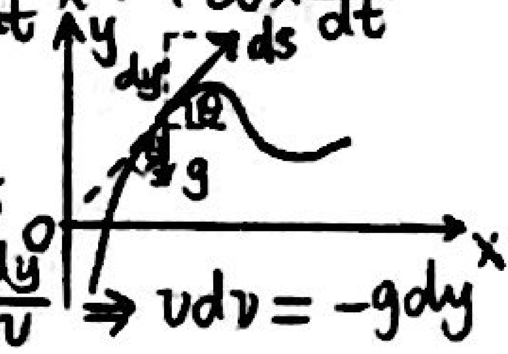
$\boxed{a_\tau=\frac{dv}{dt},\ \rho=\frac{v^2}{a_n}}$

已知 $a=a(x)$：$a(x)=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}\Rightarrow a(x)dx=vdv\Rightarrow v^2-v_0^2=2\int_{x_0}^{x}a(x)dx$. 曲率 $k=\frac{|\vec{r}'\times\vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}$

曲率半径 $\rho=\frac{1}{k}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$　自然坐标系下加速度

$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\hat{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\hat{n}$　圆周运动线量与角量的关系：

$v=R\omega$，$a_\tau=R\beta$，$a_n=R\omega^2$. 圆周运动矢量描述法：$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$.



已知 $a_\tau=-g\sin\theta$. 则 $dv=a_\tau dt=-g\sin\theta dt=-g\frac{dy}{ds}dt=-g\frac{dy}{v}\Rightarrow vdv=-gdy$

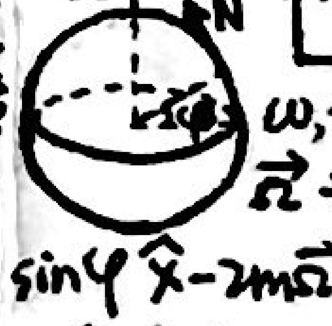
$\Rightarrow\int_{v_0}^{v}vdv=\int_{y_0}^{y}(-g)dy\Rightarrow v^2-v_0^2=2g(y_0-y)$.

平面极坐标系：$\vec{v}=v_r\hat{r}+v_\theta\hat{\theta}$.　$\frac{d\hat{r}}{d\theta}=\hat{\theta}$，$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}=-\hat{r}$

$\boxed{\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}=a_r\hat{r}+a_\theta\hat{\theta}.}$

自然坐标系：运动轨迹固定或已知；平面极坐标系：有心运动（加速度总是指向空间某一固定点）

$\boxed{v_r=\dot{r}\hat{r},\ v_\theta=r\dot{\theta}}$　极坐标系下质点对 $r=0$ 点角动量 $L=mr^2\dot{\theta}\Rightarrow\frac{dL}{dt}=mr(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})$



纬度 φ 傅科摆，单摆振动角频率 ω，地球自转角频率 Ω. 科里奥利力 $F_c=2m\dot{\vec{x}}\times\vec{\Omega}+2m\dot{\vec{y}}\times\vec{\Omega}$，其在 xy 平面分量 $F_{c,xy}=2m\Omega\dot{y}\sin\varphi\,\hat{x}-2m\Omega\dot{x}\sin\varphi\,\hat{y}$. 单摆回复力 $F_0=-m\omega^2x\hat{x}-m\omega^2y\hat{y}$. 合力 $F_x=(2m\Omega\dot{y}\sin\varphi-m\omega^2x)\hat{x}-(2m\Omega\dot{x}\sin\varphi+m\omega^2y)\hat{y}$. 转动角速度 $\Omega\sin\varphi$.

$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$.　$\int\frac{1}{\sin^2x}dx=-\cot x+C$.

$\int\frac{1}{\cos^2x}dx=\tan x+C$.