近世代数（H）笔记

林晓烁 2024 春

https://xiaoshuo-lin.github.io

目 录

导 言

简要说明

旨趣 这是 2024 年春季学期近世代数 H 课堂笔记, 课程由中国科学技术大学数学科学学院陈小伍教授讲授.

附记

(1) 相关资料:

- Évariste Galois 档案: http://www.galois-group.net
- https://grothendieck.umontpellier.fr/archives-grothendieck/

(2) 访问我的个人主页查看本文档最新版本: https://xiaoshuo-lin.github.io

致谢

这份笔记所用 LaTeX 模板来自北京国际数学研究中心李文威教授, 在此表示谢意.

第一部分

课堂笔记

第一章 预备知识

1.1 集合与映射

例 1.1.1 (映射的例子) (1) 恒等映射 $\mathrm{Id}_X : X \to X, x \mapsto x$.

(2) 设 $S \subset X$. 包含映射 $\mathrm{inc} : S \to X, s \mapsto s$.

注记 1.1.2 根据映射相等的要求, 当 $S \subsetneq X$ 时, 上述 $\mathrm{inc} \neq \mathrm{Id}_X$.

约定 1.1.3 用 $X \overset{f}{\hookrightarrow} Y$ 表示单射, 用 $X \overset{f}{\twoheadrightarrow} Y$ 表示满射, 用 $X \overset{f}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} Y$ 表示双射.

例 1.1.4 有如下交换图表:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "\bar{f}"'] & & Y \\
& \mathrm{Im}(f) \arrow[ur, hook, "\mathrm{inc}"'] &
\end{tikzcd}$$

即 $f = \mathrm{inc} \circ \bar{f}$, 其中 $\bar{f} : X \to \mathrm{Im}(f), x \mapsto f(x)$.

练习 1.1.5 (范畴意义下单满射的内蕴刻画) 设 $f : X \to Y$. 证明:

(1) f 是单射 $\iff$ $\boxed{f \text{ 满足左消去律: } \forall g, g' : W \to X,\ f \circ g = f \circ g' \implies g = g'}$.

(2) f 是满射 $\iff$ $\boxed{f \text{ 满足右消去律: } \forall h, h' : Y \to Z,\ h \circ f = h' \circ f \implies h = h'}$.

(3) f 是双射 $\iff$ $\boxed{\exists! g : Y \to X, \text{ s. t. } g \circ f = \mathrm{Id}_X, f \circ g = \mathrm{Id}_Y}$.

例 1.1.6

$$\begin{aligned}
\mathrm{Map}(X, \{0,1\}) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(X) \\
f &\longmapsto S_f \coloneqq \{x \in X : f(x) = 1\}.
\end{aligned}$$

其逆映射为

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X) &\to \mathrm{Map}(X, \{0,1\}) \\
S &\mapsto \chi_S,
\end{aligned}$$

其中 χ_S 为 S 的特征函数.

定义 1.1.7 (无交并的集合论定义) 设 $(A_i : i \in I)$ 是以 I 为指标集的一族集合, 其无交并定义为

$$\bigsqcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \{(x, i) : x \in A_i\}.$$

例 1.1.8 典范双射

$$\begin{aligned} \mathrm{Map}(X \sqcup Y, Z) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Map}(X, Z) \times \mathrm{Map}(Y, Z) \\ f &\longmapsto \left(f\big|_X, f\big|_Y\right). \end{aligned}$$

例 1.1.9 典范双射

$$\begin{aligned} \mathrm{Map}(X, Y \times Z) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Map}(X, Y) \times \mathrm{Map}(Y, Z) \\ g &\longmapsto (g_1, g_2), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} g : X &\to Y \times Z \\ x &\mapsto (g_1(x), g_2(x)). \end{aligned}$$

例 1.1.10 (伴随双射) 存在典范双射

$$\begin{aligned} \mathrm{Map}(X \times Y, Z) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z)) \\ f &\longmapsto (x \mapsto \phi_{f,x}), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_{f,x} : Y &\to Z \\ y &\mapsto f(x, y). \end{aligned}$$

注记 1.1.11 集合 X 上最小的等价关系即 “等号”:

$$E = \{(x, x) : x \in X\}.$$

定义 1.1.12 给定 X 上的等价关系 $\stackrel{R}{\sim}$.

(1) $\forall a \in X$, a 的等价类 $[a] \coloneqq \left\{x \in X : x \stackrel{R}{\sim} a\right\}$.

(2) 关于 $\stackrel{R}{\sim}$ 的商集 $X/\stackrel{R}{\sim} \coloneqq \{所有的等价类\} \subset \mathcal{P}(X)$.

(3) 商映射 $\pi_R : X \twoheadrightarrow X/\stackrel{R}{\sim}, a \mapsto [a]$.

(4) 关于 $\stackrel{R}{\sim}$ 的完全代表元系为 $S \subset X$, s. t. $\forall x \in X, \exists!\, s \in S, s \in [x]$.

练习 1.1.13 (完全代表元系的等价刻画) 设 $\stackrel{R}{\sim}$ 是 X 上的等价关系, $S \subset X$. 证明: S 是完全代表元系当且仅当复合映射

$$S \xhookrightarrow{\mathrm{inc}} X \xrightarrow{\pi_R} X/\stackrel{R}{\sim}$$

是双射.

定义 1.1.14 集合 X 的分拆为 $\mathcal{R}=\{X_i : i\in I\}\subset\mathcal{P}(X)$, 满足

(1) $X_i\neq\varnothing,\forall i\in I$.

(2) $X_i\cap X_j\neq\varnothing,\forall i\neq j$.

(3) $X=\displaystyle\bigcup_{i\in I}X_i$.

性质 1.1.15 集合 X 上的等价关系与分拆有如下关系：

(1) 若 R 是 X 上的等价关系, 则 $X/\overset{R}{\sim}$ 是 X 的一个分拆.

(2) 若 $\mathcal{R}=\{X_i : i\in I\}$ 是 X 的分拆, 定义关系 $\overset{T}{\sim}$: $x\overset{T}{\sim}y\iff\exists i\in I,\ \mathrm{s.t.}\ x,y\in X_i$, 则 $\overset{T}{\sim}$ 是 X 上的等价关系, 且 $X/\overset{T}{\sim}=\mathcal{R}$.

定义 1.1.16 映射 $f:X\to Y$ 给出 X 上的等价关系 $\overset{f}{\sim}$: $x\overset{f}{\sim}x'\iff f(x)=f(x')$. 对任意 $y\in Y$, 记 $f^{-1}(y)\coloneqq\{x\in X:f(x)=y\}$, 称为 f 在 y 上的原像集 (或纤维).

注记 1.1.17 $f^{-1}(y)\neq\varnothing\iff y\in\mathrm{Im}(f)$.

练习 1.1.18 关于 $\overset{f}{\sim}$ 的等价类 $[x]=f^{-1}(f(x))$.

定理 1.1.19 (映射基本定理) 设 $f:X\to Y$, 则 f 诱导双射

$$\begin{aligned}\widetilde{f}:X/\overset{f}{\sim}&\xrightarrow{\sim}\mathrm{Im}(f)\\ [x]&\longmapsto f(x).\end{aligned}$$

也即有如下交换图表：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi_f"'] & Y \\
X/\overset{f}{\sim} \arrow[r, dashed, "\widetilde{f}"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, hook, "\mathrm{inc}"']
\end{tikzcd}$$

练习 1.1.20 设集合 X 上的二元运算 $\cdot$ 满足结合律：$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z),\forall x,y,z\in X$. 证明：

$$((x\cdot y)\cdot z)\cdot w=x\cdot(y\cdot(z\cdot w)),\quad\forall x,y,z,w\in X.$$

第二章 环论

2.1 环的定义

定义 2.1.1 (含幺) 环是三元组 $(R,+,\cdot)$, 其中 $R\neq\varnothing$, 加法 $+:R\times R\to R,(a,b)\mapsto a+b$ 与乘法 $\cdot:R\times R\to R,(a,b)\mapsto a\cdot b$ 满足以下八条公理:

(A1) 加法结合律: $(a+b)+c=a+(b+c),\forall a,b,c\in R$.

(A2) 加法交换律: $a+b=b+a,\forall a,b\in R$.

(A3) 加法有零元: $\exists 0_R\in R,\ \mathrm{s.t.}\ a+0_R=a,\forall a\in R$.

(A4) 加法有负元: $\forall a\in R,\exists b\in R,\ \mathrm{s.t.}\ a+b=0_R$.

(M1) 乘法结合律: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c),\forall a,b,c\in R$.

(M2) 乘法有幺元: $\exists 1_R\in R,\ \mathrm{s.t.}\ a\cdot 1_R=a=1_R\cdot a,\forall a\in R$.

(D1) 关于第一个分量的分配律: $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c,\forall a,b,c\in R$.

(D2) 关于第二个分量的分配律: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,\forall a,b,c\in R$.

注记 2.1.2 (1) 由 **(A2)** 易得加法零元唯一.

(2) 由 **(A1)** 与 **(A2)** 易得加法负元唯一. 把 a 的加法负元记作 $-a$.

(3) 定义 R 上减法: $a-b\coloneqq a+(-b),\forall a,b\in R$.

(4) 由定义易得乘法幺元唯一性.

例 2.1.3 (环的例子) (1) 整数环 $\mathbb{Z}=(\mathbb{Z},+,\cdot)$.

(2) Gauss 整数环 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]\coloneqq\{m+n\sqrt{-1}:m,n\in\mathbb{Z}\}$.

(3) 一元有理系数多项式环 $\mathbb{Q}[x]$.

(4) 模 $n(n\geqslant 2)$ 同余类环 $\overline{0},\overline{1},\cdots,\overline{n-1}$.

(5) n 阶复方阵 $M_n(\mathbb{C})$ 是非交换环的基本例子.

定义 2.1.4 $\forall a\in R, n\in\mathbb{Z}$, 定义 a 的 n 倍 na 如下: $0a := 0_R, 1a := a$, 对 $n>0$,

$$na := \underbrace{a+\cdots+a}_{n\text{个}},\quad (-n)a := \underbrace{(-a)+\cdots+(-a)}_{n\text{个}}.$$

练习 2.1.5 $\forall a\in R, \forall m,n\in\mathbb{Z}$, 总有 $(m+n)a = ma+na$. 提示 留心对 m,n 异号情形的讨论.

练习 2.1.6 $\forall a\in R, n\in\mathbb{Z}$, 总有 $na=(n1_R)\cdot a$. 特别地, 当 $n=0$ 时, 可得 $0_R = 0_R\cdot a, \forall a\in R$.

练习 2.1.7 (广义分配律) $\left(\sum\limits_{i=1}^m a_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^n b_j\right) = \sum\limits_{i=1}^m\sum\limits_{j=1}^n a_ib_j$. 提示 运用双重归纳.

练习 2.1.8 $\forall n\in\mathbb{Z}, a,b\in R, (na)\cdot b = n(a\cdot b) = a\cdot(nb)$.

例 2.1.9 (零环) 以下等价:

(1) $0_R = 1_R$.

(2) $R=\{0_R\}$.

(3) R 仅含一个元素.

提示 (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (1) 是平凡的.

阅读提示

以下如不另作说明, 环皆指非零的含幺环.

例 2.1.10 (二元环) 由例 2.1.9 可知二元环中 $0_R\neq 1_R$, 进而可定出加法表与乘法表. 易见二元环本质上即 $\mathbb{Z}_2$.

阅读提示

以下总假定环 R 为含幺交换环.

定义 2.1.11 (a 的 n 次幂)

$$\text{当 } n\geqslant 1 \text{ 时}, a^n := \underbrace{a\cdots a}_{n\text{个}};\quad a^0 := 1_R.$$

性质 2.1.12 $a^n\cdot a^m = a^{n+m}$.

定理 2.1.13 (二项式定理) 设 $a,b\in R, n\geqslant 1$, 则

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i\cdot b^{n-i}.$$

定义 2.1.14 $a\in R$ 称为乘法可逆元 (或单位), 若存在 $b\in R$, 使得 $a\cdot b = 1_R$.

注记 2.1.15 若 a 可逆, 对应的 b 是唯一的, 记 $b=a^{-1}$, 称为 a 的逆. 易知 $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

定义 2.1.16 (除法) 若 a 可逆, $c\div a := c\cdot a^{-1}$.

注记 2.1.17 (1) 由于 $0_R\neq 1_R$, 0_R 一定不可逆.

(2) 若 a 可逆, 可对全体 $n \in \mathbb{Z}$ 定义 a^n.

(3) 对可逆元有乘法消去律.

定义 2.1.18 环 R 的可逆元子集 $U(R) \coloneqq \{a \in R : a \text{ 可逆}\}$ 对 R 的乘法构成一个 Abel 群, 称为 R 的单位群.

例 2.1.19 (1) $U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$.

(2) $U(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^\times \coloneqq \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

(3) $U(\mathbb{Z}_n) = \{[m] : (m, n) = 1\}$.

(4) $U\big(\mathbb{Z}\big[\sqrt{-1}\big]\big) = \big\{\pm 1, \pm\sqrt{-1}\big\}$.

定义 2.1.20 非零环 R 称为整环, 若 $ab = 0_R$ 蕴含 $a = 0_R$ 或 $b = 0_R$.

定义 2.1.21 非零环 R 称为域, 若非零元均可逆.

注记 2.1.22 (1) 整环中满足乘法消去律: $ab = ac \implies a(b-c) = 0_R \xRightarrow{\text{若 } a \neq 0_R} b = c$.

(2) 域是整环.

例 2.1.23 $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-1}\big]$ 是整环, 但不是域.

命题 2.1.24 设 $n \geqslant 2$, 则以下等价:

(1) $\mathbb{Z}_n$ 是整环.

(2) n 是素数.

(3) $\mathbb{Z}_n$ 是域.

提示 (3) $\implies$ (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3).

注记 2.1.25 若 $\mathbb{Z}_p$ 是域, 记之为 $\mathbb{F}_p$.

练习 2.1.26 设 R 为有限环, 则 R 是整环 $\iff$ R 是域.

定义 2.1.27 设 R 为环. 子集 $S \subset R$ 称为子环, 若满足 $1_R \in S$, S 对加法、减法、乘法封闭.

阅读提示

我们强烈要求 $1_R \in S$.

定义 2.1.28 设 K 为域. 子环 $S \subset K$ 称为子域, 若满足 $0_R \neq a \in S$, 则 $a^{-1} \in S$, 即对除法也封闭.

注记 2.1.29 子环自然成为环; 子域自身作为环是域.

练习 2.1.30 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}_n$ 均没有真子环.

练习 2.1.31 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{F}_p$ 均没有真子域.

练习 2.1.32 $\mathbb{Q}\big(\sqrt{-1}\big) \coloneqq \big\{a + b\sqrt{-1} : a, b \in \mathbb{Q}\big\} \subset \mathbb{C}$ 是子域.

练习 2.1.33 若 $S \subset \mathbb{Q}\big(\sqrt{-1}\big)$ 是子域, 则 $S = \mathbb{Q}$ 或 $S = \mathbb{Q}\big(\sqrt{-1}\big)$.

练习 2.1.34 设 p 是素数, 则 $R(p) \coloneqq \left\{\dfrac{m}{p^a} : a \geqslant 0, m \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{Q}$ 是子环.

2.2 理想与商环

设 $R=(R,+,\cdot), S=(S,+,\cdot)$ 为两环.

定义 2.2.1 映射 $\theta: R\to S$ 称为环同态, 若

(1) $\theta(a+b)=\theta(a)+\theta(b), \theta(a\cdot b)=\theta(a)\cdot\theta(b), \forall a,b\in R$.

(2) $\theta(1_R)=1_S$.

双射的环同态称为环同构, 记为 $\theta: R\xrightarrow{\sim} S$.

性质 2.2.2 (1) $\theta(0_R)=0_S, \theta(a-b)=\theta(a)-\theta(b), \forall a,b\in R$.

(2) $\theta(a^m)=\theta(a)^m$.

(3) 环同态的复合仍是环同态.

(4) 若 $\theta: R\to S$ 为环同构, 则 $\theta^{-1}: S\to R$ 亦为环同构.

例 2.2.3 不存在 $\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}_n$ 的环同态. 提示 考虑 $\dfrac{1}{n}\in\mathbb{Q}$.

引理 2.2.4 设 $\theta: R\to S$ 为环同态, 则 $a\in U(R)\implies\theta(a)\in U(S)$, 即 θ 诱导 $U(R)\to U(S)$ 群同态.

证明 若 $a\in U(R)$, 则 $\theta(a^{-1})=\theta(a)^{-1}$. □

定义 2.2.5 $\mathrm{Aut}(R):=\left\{\theta: R\xrightarrow{\sim} R \text{ 环自同构}\right\}$ 称为环 R 的自同构群.

例 2.2.6 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})=\{\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}\}$.

例 2.2.7 $\mathrm{Aut}\big(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]\big)=\left\{\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]},\sigma\right\}$, 其中 $\sigma:\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]\to\mathbb{Z}[\sqrt{-1}], z\mapsto\bar{z}$.

提示 考虑 $\sqrt{-1}$ 在环同态下的像, 结合环同态保乘法的性质.

练习 2.2.8 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})=\{\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}\}$.

练习 2.2.9 $\mathrm{Aut}\big(\mathbb{Q}(\sqrt{-1})\big)=\left\{\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})},\sigma\right\}$, 其中 $\sigma:\mathbb{Q}(\sqrt{-1})\to\mathbb{Q}(\sqrt{-1}), z\mapsto\bar{z}$.

注记 2.2.10 同构的环 "本质一样", 即具有相同的性质:

(1) $\forall a\in R$, a 可逆 $\iff\theta(a)\in S$ 可逆.

(2) 有群同构 $U(R)\xrightarrow{\sim}U(S)$.

(3) 有群同构 $\mathrm{Aut}(R)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Aut}(S), \phi\mapsto\theta\circ\phi\circ\theta^{-1}$.

(4) R 是整环 $\iff$ S 是整环.

(5) R 是域 $\iff$ S 是域.

例 2.2.11 (特征同态) 对于任何环 R, 存在唯一的环同态 $\mathbb{Z}\to R, n\mapsto n1_R$, 称为特征同态.

回顾定理 1.1.19, 考虑环同态 $\theta: R\to S$, 注意到:

◇ 像 $\mathrm{Im}\,\theta\subset S$ 为子环.

- $a \overset{\theta}{\sim} b \iff \theta(a) = \theta(b) \iff a - b \in \theta^{-1}(0_S) =: \operatorname{Ker}\theta$ (θ 的核).
- 相应的等价类 $[a] = \theta^{-1}(\theta(a)) = a + \operatorname{Ker}\theta \coloneqq \{a + r : r \in \operatorname{Ker}\theta\}$ (核的 "平移").
- 商集 $R/\overset{\theta}{\sim}$ 等于 $\{\operatorname{Ker}\theta$ 的平移$\}$.

观察到核 $\operatorname{Ker}\theta$ 有以下特性:

- 核 $\operatorname{Ker}\theta$ 完全确定了等价关系 $\overset{\theta}{\sim}$.
- $\operatorname{Ker}\theta \subset R$ 对加法、减法、乘法封闭, 但不是子环 (R 非零环 $\implies 1_R \notin \operatorname{Ker}\theta$).
- 对任意 $x \in \operatorname{Ker}\theta, a \in R$, 均有 $ax \in \operatorname{Ker}\theta$, 即核 $\operatorname{Ker}\theta$ 对于 R 中求 "倍元" 封闭 (这远强于乘法封闭性).

定义 2.2.12 非空子集 $I \subset R$ 称为理想, 若 I 对加、减法以及倍元封闭, 即

(1) $a + b \in I, \forall a, b \in I$.

(2) $a \cdot r \in I, \forall a \in I, r \in R$.

记为 $I \lhd R$.

注记 2.2.13 (1) 虽然 $R \lhd R$, 但我们通常仅考虑真理想. 理想 I 是真理想当且仅当 $1_R \notin I$.

(2) $\{0_R\}$ 与 R 是 R 的平凡理想.

(3) 任意元素 $a \in R$ 给出 a 生成的主理想 $(a) = aR \coloneqq \{a \cdot r : r \in R\}$. 特别地, $(0_R) = \{0_R\}, (1_R) = R$.

(4) 环同态的核是真理想.

引理 2.2.14 环 R 为域当且仅当 R 仅有平凡理想.

例 2.2.15 $\mathbb{Z}$ 的所有理想为 $\{n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}_{\geqslant 0}\}$.

证明 设 $\{0\} \neq I \lhd \mathbb{Z}$, 则存在 $0 \neq n \in I$, 使得 $|n|$ 最小. 我们断言 $I = n\mathbb{Z}$. 注意到:

- $n\mathbb{Z} \subset I$.
- 对任意 $r \in I$, 作带余除法 $r = qn + r'$, 其中 $q \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant r' < |n|$. 由 $r' = r - qn \in I$ 及 $r' < |n|$ 即知 $r' = 0$. 故 $n \mid r, \forall r \in I$. □

约定 2.2.16 将 $a \overset{\theta}{\sim} b$ 记为 $a \equiv b \pmod{\operatorname{Ker}\theta}$.

定义 2.2.17 给定 $I \lhd R$, 定义商环 R/I 如下:

(1) 同余等价关系 $a \equiv b \pmod{I} \iff a - b \in I$. 等价类 $\overline{a} = a + I$.

(2) 商集 $R/\equiv$ 记为 R/I, 其上有自然运算 $\overline{a} + \overline{b} \coloneqq \overline{a + b}, \overline{a} \cdot \overline{b} \coloneqq \overline{a \cdot b}$. 故 R/I 自然成为环.

例 2.2.18 $n\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$ 且 $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

考虑理想 $I \lhd R$, 典范同态 $\operatorname{can} : R \twoheadrightarrow R/I, a \mapsto \overline{a}$, 则有 $\operatorname{Ker}(\operatorname{can}) = I$.

命题 2.2.19 (典范同态的泛性质) 设 $\theta: R \to S$ 为环同态, $I \lhd R$. 则 $I \subset \operatorname{Ker}\theta$ 当且仅当 $\theta = \theta' \circ \mathrm{can}$, 其中 $\theta': R/I \to S$ 为某个环同态. 此时, 由典范同态 can 为满射可知同态 θ' 是唯一的, 称其由 θ 诱导.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\mathrm{can}"'] & & S \\ & R/I \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\theta'\text{环同态}"'] & \end{tikzcd}$$

证明 ($\Leftarrow$) $\operatorname{Ker}\theta = \operatorname{Ker}(\theta' \circ \mathrm{can}) \supset \operatorname{Ker}(\mathrm{can}) = I$.

($\Rightarrow$) 定义映射 $\theta': R/I \to S, [a] \mapsto \theta(a)$. 检验其良定性: 对任意 $a, b \in R$, 若 $[a] = [b]$, 则 $a - b \in I \subset \operatorname{Ker}\theta$, 从而 $\theta(a) = \theta(b)$ 即 $\theta'([a]) = \theta'([b])$. 易见 θ' 为环同态. □

定理 2.2.20 (环同态基本定理) 设 $\theta: R \to S$ 为环同态, 则唯一存在环同构

$$\overline{\theta}: R/\operatorname{Ker}\theta \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im}\theta$$

使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & S \\ R/\operatorname{Ker}\theta \arrow[r, dashed, "\overline{\theta}"] & \operatorname{Im}\theta \arrow[u, "\mathrm{inc}"'] \end{tikzcd}$$

提示 由定理 1.1.19, 只需验证 $\overline{\theta}$ 为环同态.

注记 2.2.21 (1) 设 $\theta: R \to S$ 是单的, 则 $\operatorname{Ker}\theta = \{0_R\}$, 有环同构 $R \simeq \operatorname{Im}\theta$, 可将 R "等同于" S 的子环. 单的环同态又称为环嵌入.

(2) 设 $\theta: R \to S$ 是满的, 则有环同构 $R/\operatorname{Ker}\theta \simeq S$, 可将 S "等同于" R 的商环.

定义 2.2.22 由例 2.2.15 知特征同态 $\mathbb{Z} \to R$ 的核为 $n\mathbb{Z}$, 其中 $n = 0$ 或 $n \geqslant 2$. 记 $n = \mathrm{char}(R)$, 称为环 R 的特征.

注记 2.2.23 由定理 2.2.20,

- ◇ 若 $\mathrm{char}(R) = 0$, 则有环嵌入 $\mathbb{Z} \hookrightarrow R$.
- ◇ 若 $\mathrm{char}(R) = n \geqslant 2$, 则有环嵌入 $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \hookrightarrow R$.

推论 2.2.24 整环的特征为 0 或素数 p.

证明 设整环 R 的特征为 n, 则 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 同构于 R 的子环, 从而也是整环, 再利用命题 2.1.24 即可. □

注记 2.2.25 特别地, 当 K 为域时, 若 $\mathrm{char}(K) = 0$, 则 $\mathbb{Z} \hookrightarrow K$; 若 $\mathrm{char}(K) =$ 素数 p, 则 $\mathbb{F}_p \hookrightarrow K$ 为子域. 对于特征 0 域 K 及其特征同态 ϕ, 我们进一步断言, 可将 ϕ 延拓为单同态

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}: \mathbb{Q} &\hookrightarrow K \\ \frac{n}{m} &\mapsto \phi(n) \cdot \phi(m)^{-1}, \end{aligned}$$

其中 $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. 由 ϕ 是环同态可验证 $\widetilde{\phi}$ 是良定的.

练习 2.2.26 验证注记 2.2.25 中的映射 $\widetilde{\phi}$ 是单的环同态.

例 2.2.27 考虑环 R 的两个理想 $I \subset J$, 有典范同态

$$R/I \twoheadrightarrow R/J, \quad a+I \mapsto a+J.$$

其良定性可由 $I \subset J$ 得到, 亦可借助命题 2.2.19, 由 $I \subset J = \mathrm{Ker}(\mathrm{can}_J)$ 得到如下交换图表:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, two heads, "\mathrm{can}_J"] \arrow[dr, "\mathrm{can}_I"'] & & R/J \\ & R/I \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\text{环同态}"'] & \end{tikzcd}$$

- 此典范同态的核为 $\{a+I : a+J = 0_{R/J}\} = \{a+I : a \in J\} \lhd R/I$, 记为 J/I.
- 由定理 2.2.20, 此典范同态诱导环同构

$$(R/I)/(J/I) \xrightarrow{\sim} R/J, \quad (a+I)+J/I \mapsto a+J.$$

- **(对应定理)** 固定 $I \lhd R$, 则存在双射

$$\begin{aligned} \{J \lhd R : J \supset I\} &\xleftrightarrow{1:1} \{R/I \text{ 的理想}\} \\ J &\longmapsto J/I \\ \{a \in R : a+I \in \bar{J}\} &\xleftarrow{\ \psi\ } \bar{J}. \end{aligned}$$

练习 2.2.28 对例 2.2.27 中的映射 ψ, 验证以下断言:

(1) $\psi(\bar{J}) \in \{J \lhd R : J \supset I\}, \forall \bar{J} \lhd R/I$.

(2) $\psi(\bar{J})/I = \bar{J}, \forall \bar{J} \lhd R/I$.

(3) $\psi(J/I) = J$.

例 2.2.29 ($\mathbb{Z}_n$ 的理想) 由例 2.2.27 对应定理, $\{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ 的理想}\} \xleftrightarrow{1:1} \{J \lhd \mathbb{Z} : J \supset n\mathbb{Z}\}$. 再结合例 2.2.15, 有 $\{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ 的理想}\} \xleftrightarrow{1:1} \{d\mathbb{Z} : d \geqslant 1, d \mid n\}$. 换言之, 存在双射

$$\{d : d \geqslant 1, d \mid n\} \xrightarrow{\sim} \{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ 的理想}\}, \quad d \mapsto d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

特别地, 当 p 为素数时, 域 $\mathbb{F}_p$ 仅有平凡理想, 这回应了引理 2.2.14.

练习 2.2.30 (例 2.2.27 对应定理的子环版本) 固定 $I \lhd R$, 则存在双射

$$\{S \subset R \text{ 子环} : S \supset I\} \xrightarrow{\sim} \{R/I \text{ 的子环}\}, \quad S \mapsto S/I.$$

练习 2.2.31 设 R 为环, $S \subset R$ 为子环, $I \lhd R$ 为理想. 则

(1) $S + I = \{a + x : a \in S, x \in I\}$ 为子环.

(2) $S \cap I$ 为 S 的理想.

(3) 存在环同构

$$S/(S \cap I) \xrightarrow{\sim} (S+I)/I, \quad a + (S \cap I) \mapsto a + I.$$

提示 考虑满射 $S \twoheadrightarrow (S+I)/I$.

练习 2.2.32 证明：有限环的特征必然为正数.

练习 2.2.33 设 D 为整环, m 和 n 为互素的正整数, $a, b \in D$. 如果 $a^m = b^m, a^n = b^n$, 求证 $a = b$.

练习 2.2.34 对任意 $n \geqslant 0$, 记 $R_n = \{a + b\sqrt{-1} : a \in \mathbb{Z}, b \in n\mathbb{Z}\}$.

(1) R_n 为 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ 的子环.

(2) 对任意 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ 的子环 S, 存在唯一 $n \geqslant 0$ 使得 $S = R_n$.

(3) 若 $n \neq m$, 则 $R_n \not\simeq R_m$.

这样就分类了 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ 的子环.

证明 (3) 若存在环同态 $\theta : R_n \to R_m$, 则 $\theta|_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$. 由 $\theta(n\sqrt{-1})^2 = \theta(-n^2) = -n^2$ 得 $\theta(n\sqrt{-1}) \in \mathrm{Root}_{\mathbb{C}}(x^2+n^2) = \{\pm n\sqrt{-1}\}$, 进而 $R_n \subset R_m$. 故若 $R_n \simeq R_m$, 则 $R_n = R_m$. □

练习 2.2.35 对全体素数的子集 S, 记 $\mathbb{Z}_S = \left\{\frac{m}{n} : (m,n) = 1, n \text{ 的素因子 } \in S\right\} \cup \{0\}$.

(1) $\mathbb{Z}_S$ 为 $\mathbb{Q}$ 的子环.

(2) 对任意 $\mathbb{Q}$ 的子环 R, 存在唯一素数集合 S 使得 $\mathbb{Z}_S = R$.

(3) 若 $S \neq S'$ 为全体素数的两个子集, 则 $\mathbb{Z}_S \not\simeq \mathbb{Z}_{S'}$.

这样就分类了 $\mathbb{Q}$ 的子环.

证明 (3) 设存在环同态 $\theta : \mathbb{Z}_S \to \mathbb{Z}_{S'}$. 对任意 $p \in S$, 有 $\frac{1}{p} \in \mathbb{Z}_S$. 由于 $1 = \theta(1) = \theta(p)\cdot\theta\left(\frac{1}{p}\right) = p\cdot\theta\left(\frac{1}{p}\right)$, 而 $x = \frac{1}{p}$ 是方程 $px = 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的唯一解, 因此 $\theta\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}$. 这说明 $p \in S'$, 因此 $S \subset S'$. 故若 $\mathbb{Z}_S \simeq \mathbb{Z}_{S'}$, 则 $S = S'$. □

2.3 分式域与商域

设 R 为整环, 记 $R^\times \coloneqq R \setminus \{0_R\}$. 考虑 $R \times R^\times$ 上的关系

$$(a, x) \simeq (b, y) \iff ay = bx.$$

练习 2.3.1 证明如上关系 $\simeq$ 是 R 上的等价关系. 提示 传递性需要用到整环的性质.

相应的等价类记为

$$\frac{a}{x} \coloneqq \{(b, y) \in R \times R^\times : (b, y) \simeq (a, x)\},$$

称为分式. 分式的全体记为 $\mathrm{Frac}(R) = R \times R^\times / \simeq$. 在 $\mathrm{Frac}(R)$ 上自然定义加法和乘法

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{ay + bx}{xy}, \quad \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y} = \frac{ab}{xy}.$$

注意定义的合理性需要整环的性质：$x, y \neq 0_R \implies xy \neq 0_R$.

命题 2.3.2 $\mathrm{Frac}(R)$ 是域, 称为 R 的分式域.

考虑典范同态 $\mathrm{can}_R : R \hookrightarrow \mathrm{Frac}(R), r \mapsto \frac{r}{1_R}$, 它是单的, 因而可将 R 视作域 $\mathrm{Frac}(R)$ 的子环.

命题 2.3.3 can_R 是同构当且仅当 R 是域.

定理 2.3.4 (典范同态的泛性质) 设 R 为整环, K 为域, $\phi : R \hookrightarrow K$ 为环的单同态. 则存在唯一的域嵌入 $\widetilde{\phi} : \mathrm{Frac}(R) \hookrightarrow K$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, hook, "\phi"] \arrow[dr, "\mathrm{can}_R"'] & & K \\
& \mathrm{Frac}(R) \arrow[ur, hook, dashed, "\exists!\,\widetilde{\phi}\text{域嵌入}"'] &
\end{tikzcd}$$

进一步, $\widetilde{\phi}$ 是同构当且仅当任意 $w \in K$ 均可表为 $w = \phi(a)\phi(x)^{-1}$, 其中 $a \in R, x \in R^{\times}$.

证明 (1) 先证明 $\widetilde{\phi}$ 的至多唯一性. 对任意 $\frac{a}{x} \in \mathrm{Frac}(R)$ (其中 $a \in R, x \in R^{\times}$),

$$\widetilde{\phi}\big(\tfrac{a}{x}\big) = \widetilde{\phi}\left(\frac{a}{1_R} \cdot \left(\frac{x}{1_R}\right)^{-1}\right) = \widetilde{\phi}\left(\frac{a}{1_R}\right)\phi\left(\frac{x}{1_R}\right)^{-1} \xlongequal{\widetilde{\phi}\circ\mathrm{can}_R=\phi} \phi(a)\phi(x)^{-1}.$$

(2) 再验证如上 $\widetilde{\phi}\big(\frac{a}{x}\big) = \phi(a)\phi(x)^{-1}$ 构造的良定性:

- ⋄ 因为 ϕ 为单同态, 所以 $x \neq 0_R \implies \phi(x) \neq 0_K$, $\phi(x)$ 可逆.
- ⋄ $\widetilde{\phi}$ 不依赖于代表元的选取.

(3) 易验证 $\widetilde{\phi}$ 是域同态, 再由练习 2.3.6 知 $\widetilde{\phi}$ 是域嵌入.

(4) $\widetilde{\phi}$ 是同构 $\iff$ $\widetilde{\phi}$ 是满射, 再由 (1) 中 $\widetilde{\phi}$ 的构造即得定理最后的断言. □

注记 2.3.5 (1) 可认为 $\widetilde{\phi}$ 延拓了 ϕ.

(2) 分式域 $\mathrm{Frac}(R)$ 是包含 R 的最小域.

练习 2.3.6 设 $\theta : K \to L$ 为域之间的同态, 则 θ 是单同态.

例 2.3.7 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ 诱导了域同构 $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Q}$.

练习 2.3.8 考虑练习 2.2.35 中的 $\mathbb{Z}_S$, 证明 $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_S) \simeq \mathbb{Q}$.

证明 由定理 2.3.4, 存在唯一的域嵌入 $\theta : \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_S) \hookrightarrow \mathbb{Q}$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_S \arrow[rr, hook, "\mathrm{inc}"] \arrow[dr, "\mathrm{can}_{\mathbb{Z}_S}"'] & & \mathbb{Q} \\
& \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_S) \arrow[ur, hook, dashed, "\exists!\,\theta\text{域嵌入}"'] &
\end{tikzcd}$$

由练习 2.1.31, $\mathbb{Q}$ 没有真子域, 因此 $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_S) \simeq \mathbb{Q}$. □

练习 2.3.9 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \subset \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ 诱导了域同构 $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$. 提示 利用注记 2.3.5 (2).

阅读提示

一般来说, 很难确定等价关系 $\simeq$ 的完全代表元系, 因而集合 $\mathrm{Frac}(R)$ 难以捉摸. 但当整环 R 具有某些性质 (例如是唯一分解整环) 时, 我们对 $\mathrm{Frac}(R)$ 能作进一步了解 (例如可定义既约分式). 例如, 由于有理数具有既约表达式, 我们对集合 $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ 的大小是有所了解的.

例 2.3.10 设 F 为域. 由注记 2.2.25,

- $\diamond$ 若 $\mathrm{char}(F)=0$, 则 $\mathbb{Z}\hookrightarrow F$. 根据定理 2.3.4, 由 $\mathrm{can}_{\mathbb{Z}}$ 的泛性质, 存在唯一的域嵌入

$$\begin{aligned}\theta:\mathbb{Q}&\hookrightarrow F\\ \frac{n}{m}&\mapsto (n1_F)(m1_F)^{-1}.\end{aligned}$$

因此 $\mathbb{Q}$ 可视为 F 的子域, F 自然成为 $\mathbb{Q}$-线性空间, 其上的数乘运算 . 定义为

$$\lambda.\,v=\theta(\lambda)v,\quad \forall\lambda\in\mathbb{Q},v\in F.$$

- $\diamond$ 若 $\mathrm{char}(F)=p>0$, 则存在唯一的域嵌入

$$\begin{aligned}\theta:\mathbb{F}_p&\hookrightarrow F\\ \overline{n}&\mapsto n1_F.\end{aligned}$$

因此 F 自然成为 $\mathbb{F}_p$-线性空间, 其上的数乘运算 . 定义为

$$\lambda.\,v=\theta(\lambda)v,\quad \forall\lambda\in\mathbb{F}_p,v\in F.$$

定义 2.3.11 设 R 为环. 真理想 $\mathfrak{p}\subsetneq\!\!\!\!\lhd\, R$ 称为素理想, 若 $ab\in\mathfrak{p}$ 蕴含着 $a\in\mathfrak{p}$ 或 $b\in\mathfrak{p}$.

注记 2.3.12 (1) $\{0_R\}$ 为素理想 $\iff$ R 为整环.

(2) 设 $\mathfrak{p}\ntrianglelefteq R$, 则 $\mathfrak{p}$ 为素理想 $\iff$ $R/\mathfrak{p}$ 是整环.

例 2.3.13 设 $p\geqslant 1$, 则 $p\mathbb{Z}\lhd\mathbb{Z}$ 为素理想 $\iff$ p 为素数.

定义 2.3.14 记环 R 中素理想构成的集合为 $\mathrm{Spec}(R)$, 称为 R 的素谱.

例 2.3.15 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})=\{(0)\}\sqcup\{(p):p\text{ 为素数}\}$.

注记 2.3.16 参阅 Zariski topology 与 Spectrum of a ring 词条, 以了解 $\mathrm{Spec}(R)$ 如何在 Zariski 拓扑下成为一个拓扑空间. 例子: $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

定义 2.3.17 设 R 为环. 真理想 $\mathfrak{m}\ntrianglelefteq R$ 称为极大理想, 若 $\mathfrak{m}\subset I\lhd R$ 蕴含 $I=\mathfrak{m}$ 或 $I=R$.

定义–命题 2.3.18 真理想 $\mathfrak{m}\ntrianglelefteq R$ 是极大理想当且仅当 $R/\mathfrak{m}$ 是域. 此时, 称域 $R/\mathfrak{m}$ 为商域. 特别地, 极大理想是素理想.

证明 由例 2.2.27 对应定理, 存在双射

$$\{R/\mathfrak{m}\text{ 的理想}\}\xleftrightarrow{1:1}\{I\lhd R:I\supset\mathfrak{m}\}.$$

因此 $\mathfrak{m}\ntrianglelefteq R$ 为极大理想 $\iff$ $\{I\lhd R:I\supset\mathfrak{m}\}=\{\mathfrak{m},R\}$ $\iff$ $\{R/\mathfrak{m}\text{ 的理想}\}=\{\{0_{\mathfrak{m}}\},R/\mathfrak{m}\}$ $\xLeftrightarrow{\text{引理 2.2.14}}$ $R/\mathfrak{m}$ 是域. 由注记 2.3.12, 极大理想是素理想. $\square$

上面的证明堪称简洁, 而下面对 $(\Rightarrow)$ 的另证则给出求 $R/\mathfrak{m}$ 中非零元的逆的具体方法:

证明 (⇒) 设 $\bar{0} \neq \bar{a} \in R/\mathfrak{m}$, 其中 $a \in R$. 则 $a \notin \mathfrak{m}$, 进而两理想之和 $Ra + \mathfrak{m} \supsetneq \mathfrak{m}$. 由 $\mathfrak{m}$ 是极大理想知 $Ra + \mathfrak{m} = R$. 因此有 "Bézout 等式"

$$1_R = ba + \omega, \quad b \in R, \omega \in \mathfrak{m}.$$

在 $R/\mathfrak{m}$ 中, 上式变为

$$1_{R/\mathfrak{m}} = \bar{b} \cdot \bar{a}.$$

故 $\bar{a}$ 可逆, 其逆为 $\bar{b}$. □

注记 2.3.19 考虑零理想 $\{0_R\} \trianglelefteq R$, 则 R 仅有平凡理想 $\iff$ $\{0_R\}$ 是 R 的极大理想 $\iff$ $R/\{0_R\}$ 是域 $\iff$ R 是域. 这回应了引理 2.2.14.

定义 2.3.20 记环 R 中极大理想构成的集合为 $\operatorname{MaxSpec}(R)$, 称为 R 的极大理想谱.

注记 2.3.21 $\varnothing \neq \operatorname{MaxSpec}(R) \subset \operatorname{Spec}(R)$.

例 2.3.22 $\operatorname{MaxSpec}(\mathbb{Z}) = \{(p) : p \text{ 为素数}\}$.

注记 2.3.23 Hilbert's Nullstellensatz 联系代数与几何:

$$\operatorname{MaxSpec}(\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathbb{C}^n.$$

定义 2.3.24 设 R 为整环, $a \neq 0_R$. a 在 R 中整除 b (记为 $a \mid b$) $\iff$ $b \in (a)$.

定义 2.3.25 设 R 为整环. 非零元 $a \in R$ 称为素元, 若 (a) 为素理想.

注记 2.3.26 (1) 设 a 非零非单位, 则 a 为素元 $\iff$ $a \mid xy$ 蕴含 $a \mid x$ 或 $a \mid y$.

(2) 若 a 为素元, 则 $(a) \neq R$, 因此 $a \notin U(R)$.

(3) 域上无素元.

定义 2.3.27 设 R 为整环. 非零元 $a \in R$ 称为不可约元, 若 $a \notin U(R)$, 且 $a = bc$ 蕴含 $b \in U(R)$ 或 $c \in U(R)$.

注记 2.3.28 任意 $u \in U(R)$ 给出 a 的平凡分解 $a = u \cdot (u^{-1}a) = (u^{-1}a) \cdot u$, 因此不可约元可理解为 "只有平凡分解的元素".

例 2.3.29 在 $\mathbb{Z}$ 中, 素元 = 不可约元 = $\pm p$, p 为素数.

命题 2.3.30 素元总不可约.

证明 设 $a \in R$ 是素元, 则 $a \notin U(R)$. 设 $a = bc$, 则 $a \mid bc$, 进而 $a \mid b$ 或 $a \mid c$. 不妨设 $a \mid b$, 则存在 $c' \in R$ 使得 $b = ac'$. 于是 $a = bc = ac'c$, 即 $a(1_R - c'c) = 0_R$. 因为 R 是整环, $a \neq 0_R$, 所以 $c'c = 1_R, c \in U(R)$. □

例 2.3.31 令 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] := \{m + n\sqrt{-3} : m, n \in \mathbb{Z}\}$, 则 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 是 $\mathbb{C}$ 的子环, 进而是整环. 断言: 在 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 中, 2 不可约, 但非素.

证明 (**2 不可约**) 设 $2 = (m + n\sqrt{-3})(m' + n'\sqrt{-3})$, 其中 $m, n, m', n' \in \mathbb{Z}$. 两边取模再平方即得

$$4 = (m^2 + 3n^2)\left((m')^2 + 3(n')^2\right).$$

由于 $4 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 只有 $4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$ 两种分解, 而 m^2+3n^2 不可能为 2, 所以 $m^2+3n^2 = 1$ 或 4. 不妨设 $m^2+3n^2=1$, 则 $m=\pm 1, n=0, m+n\sqrt{-3}=\pm 1$ 可逆. 故 2 在 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 中不可约.

(2 非素) 注意到 $2 \mid 4 = (1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$, 但 $2 \nmid (1+\sqrt{-3}), 2 \nmid (1-\sqrt{-3})$. □

练习 2.3.32 令 $\omega := \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, 定义 Eisenstein 整数环 $\mathbb{Z}[\omega] := \{m+n\omega : m, n \in \mathbb{Z}\}$.

(1) 验证 $\mathbb{Z}[\omega]$ 是 $\mathbb{C}$ 的子环, 进而是整环.

(2) 证明 2 是 $\mathbb{Z}[\omega]$ 中的素元.

证明 (2) 定义范数映射

$$\begin{aligned} N : \mathbb{Z}[\omega] &\to \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \\ a+b\omega &\mapsto a^2-ab+b^2. \end{aligned}$$

由于 $a^2-ab+b^2 = \dfrac{1}{4}[(2a-b)^2+3b^2]$, $N(x)=0 \iff x=0$. 容易验证, $N(a+b\omega)$ 为偶数 $\iff a, b$ 均为偶数. 设 $2 \mid xy$, 其中 $x, y \in \mathbb{Z}[\omega]$. 则 $4 \mid N(x)N(y)$, 进而 $N(x), N(y)$ 至少有一个为偶数, 因此 $2 \mid x$ 或 $2 \mid y$. 故 2 是 $\mathbb{Z}[\omega]$ 中的素元. □

注记 2.3.33 从例 2.3.31 和练习 2.3.32 看到, 2 在 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 中非素, 但在 $\mathbb{Z}[\omega]$ 中是素元.

练习 2.3.34 证明: 含幺交换有限环的素理想必是极大理想. 提示 利用练习 2.1.26.

练习 2.3.35 设 $f : R \to S$ 是环的满同态, $K = \operatorname{Ker} f$. 求证:

(1) 若 P 是 R 的素理想并且 $P \supset K$, 则 $f(P)$ 也是 S 的素理想.

(2) 若 Q 是 S 的素理想, 则 $f^{-1}(Q) = \{a \in R : f(a) \in Q\}$ 也是 R 的素理想.

(3) S 中素理想和 R 中包含 K 的素理想是一一对应的. 将 "素理想" 换成 "极大理想" 则此论断也成立.

2.4 一元多项式环

定义 2.4.1 设 x 为字母 (形式符号). 环 R 上关于 x 的 (形式) 多项式

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

系数 $a_i \in R$, 其中的 $a_i x^i$ 为单项式. 约定 $x^0 := 1_R$, 则可记 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. 若 $a_n \neq 0_R$, 则称 $a_n x^n$ 为首项, a_n 为首项系数, 定义次数 $\deg(f) = n$. 称 a_0 为常数项.

注记 2.4.2 零多项式 0_R 不定义其次数. 其他常值多项式 a 的次数为 0.

约定 2.4.3 $0_R x^i$ 可以略去, $1_R x^i$ 简记为 x^i.

定义 2.4.4 多项式 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ 称为首一的, 若 $a_n = 1_R$.

定义 2.4.5 称两多项式相等, 若它们对应系数相等.

命题 2.4.6 记 R 上多项式全体为 $R[x]$, 则 $R[x]$ 自然成为环, 称为 R 上的一元多项式环.

◇ 加法: 对应系数相加.

◇ 乘法: 若 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i, g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$, 定义 $f(x)g(x)=\sum_{l=0}^{m+n}c_lx^l$, 其中 $c_l=\sum_{i=0}^{l}a_ib_{l-i}$ (若下标超出范围则取为 0).

练习 2.4.7 验证多项式环中的乘法运算满足结合律.

注记 2.4.8 有典范环嵌入 $R\hookrightarrow R[x], a\mapsto a$ 常值多项式.

命题 2.4.9 提示 考虑首项系数. 若 R 为整环, 则 $R[x]$ 亦为整环. 特别地, 若 k 为域, 则 $k[x]$ 为整环.

性质 2.4.10 设 R 是整环, $f(x),g(x)\neq 0_R$, 则 $\deg(f(x)g(x))=\deg(f(x))+\deg(g(x))$.

推论 2.4.11 $R[x]$ 绝不是域, 因为 $U(R[x])\simeq U(R)$.

练习 2.4.12 ($R[x]$ 的等价定义) 考虑

$$\overline{R}\coloneqq\{\underline{a}=(a_0,a_1,\cdots):a_i\in R,\ 当\ i\ 充分大时\ a_i=0_R\}.$$

定义加法和乘法如下:

$$\begin{aligned}\underline{a}+\underline{b}&=(a_0+b_0,a_1+b_1,\cdots),\\ \underline{a}\cdot\underline{b}&=(c_0,c_1,\cdots),\end{aligned}$$

其中 $c_0=\sum_{i=0}^{l}a_ib_{l-i}$. 证明:

(1) $\overline{R}$ 是环.

(2) 存在环同构

$$R[x]\xrightarrow{\sim}\overline{R},\quad f(x)=\sum_{i\geqslant 0}a_ix^i\mapsto\underline{a}=(a_0,a_1,\cdots).$$

命题 2.4.13 (典范环嵌入的泛性质) 设 R 为环. 对于任给的环同态 $\psi:R\to S$ 以及 $s\in S$, 唯一存在环同态

$$\widetilde{\psi}:R[x]\to S$$

使得 $\widetilde{\psi}\big|_R=\psi$ 且 $\widetilde{\psi}(x)=s$.

证明 (1) 先证明 $\widetilde{\psi}$ 的至多唯一性:

$$\widetilde{\psi}(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)=\psi(a_n)s^n+\cdots+\psi(a_1)s+\psi(a_0).$$

(2) 再验证如上 $\widetilde{\psi}$ 是环同态 (留作练习). □

例 2.4.14 考虑 Id_R 以及 $a\in R$, 则 a 处的赋值同态

$$\mathrm{ev}_a:R[x]\to R$$

使得 $f(x)\mapsto f(a)$, 称为多项式 $f(x)$ 在 a 处的取值.

练习 2.4.15 对任意集合 X, $\mathrm{Map}(X,R)$ 为环 (加法、乘法由 R 中运算诱导).

例 2.4.16 固定 $f(x) \in R[x]$, 则有多项式函数

$$f : R \to R, \quad a \mapsto f(a),$$

即 $f \in \mathrm{Map}(R,R)$. 定义函数环 $\mathrm{Map}(R,R)$ 以及赋值同态

$$\mathrm{ev} : R[x] \to \mathrm{Map}(R,R), \quad f(x) \mapsto f.$$

该映射一般不是单射.

例 2.4.17 固定 $a \in R$, 则有投影同态

$$p_a : \mathrm{Map}(R,R) \to R, \quad \theta \mapsto \theta(a).$$

并且 $\mathrm{ev}_a = p_a \circ \mathrm{ev}$, 其中 ev_a 来自例 2.4.14, ev 来自例 2.4.16.

设 k 为域, 则 k 中非零元均可逆, 进而可对多项式作首一化: $f(x) = a \cdot \bar{f}(x)$, 其中 a 为 f 的首项系数, $\bar{f}(x)$ 为首一多项式. 由于 $a_n \in U(k[x])$, $f(x)$ 与 $\bar{f}(x)$ 本质一样.

定理 2.4.18 ($k[x]$ 中的带余除法) 给定 $f(x) \in k[x], 0_k \neq h(x) \in k[x]$, 则存在 $q(x), r(x) \in k[x]$, 使得

$$f(x) = q(x) \cdot h(x) + r(x),$$

且 $r(x) = 0$ 或 $\deg(r) < \deg(h)$. 这样的 $q(x)$ 与 $r(x)$ 是唯一的, 分别称为商式与余式.

定理 2.4.19 (余数定理) 给定多项式 $f(x)$ 以及 $a \in k$, 则唯一存在多项式 $q(x) \in k[x]$ 使得

$$f(x) = q(x) \cdot (x-a) + f(a).$$

特别地, $(x-a) \mid f(x)$ 当且仅当 $f(a) = 0_k$.

注记 2.4.20 解集 $\mathrm{Root}_k(f) \coloneqq \{a \in k : f(a) = 0_k\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{a \in k : (x-a) \mid f(x)\}$.

定义 2.4.21 整环 R 称为主理想整环 (PID), 若其任何理想均为主理想.

注记 2.4.22 按定义, 域为 PID, 但我们仅考虑非域的 PID.

命题 2.4.23 $\mathbb{Z}$ 与 $k[x]$ (k 是域) 均为 PID. 提示 利用带余除法, 数的绝对值 $\leftrightsquigarrow$ 多项式的次数.

定义 2.4.24 设 R 为整环, 非零元 a, b 的最大公因子 $d = \gcd(a,b)$ 满足:

- ◇ $d \mid a$ 且 $d \mid b$.
- ◇ 若 $d' \mid a$ 且 $d' \mid b$, 则 $d' \mid d$.

注记 2.4.25 (1) 最大公因子不一定存在.

(2) 若 $\gcd(a,b)$ 存在, 则它在相伴意义下唯一, 即若 d 和 e 都是 a, b 的最大公因子, 则存在 $u \in U(R)$, 使得 $e = ud$ (这等价于 $(e) = (d)$).

练习 2.4.26 在整环 R 中, $d = \gcd(a,b) \iff (d) \supset (a) + (b)$ 是包含 $(a) + (b)$ 的最小主理想.

命题 2.4.27 若 R 是 PID, 则对任意非零元 $a, b \in R$, $\gcd(a,b)$ 存在.

证明 由于 R 是 PID, R 中任何理想都有生成元. 特别地, 存在 $d\in R$ 使得 $(a)+(b)=(d)$. 由练习 2.4.26 的 $(\Leftarrow)$ 即知 $d=\gcd(a,b)$. □

推论 2.4.28 若 R 是 PID, 则 R 上存在 Bézout 等式：对任意非零元 $a,b\in R$, 存在 $u,v\in R$, 使得

$$\gcd(a,b)=u\cdot a+v\cdot b.$$

例 2.4.29 (最大公因子不一定存在) 在 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 中, 4 与 $(1-\sqrt{-3})^2$ 无最大公因子.

证明 定义范数映射

$$\begin{aligned} N:\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]&\to\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\\ m+n\sqrt{-3}&\mapsto m^2+3n^2.\end{aligned}$$

假设 $d=\gcd_{\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]}\left(4,(1-\sqrt{-3})^2\right)$ 存在, 则存在 $a,b\in\mathbb{Z}$, 使得

$$d\cdot\left(a+b\sqrt{-3}\right)=4,$$

从而

$$N(d)\cdot\left(a^2+3b^2\right)=16.$$

观察到 $1\pm\sqrt{-3}$ 均是 4 与 $(1-\sqrt{-3})^2$ 的公因子, $N(1+\sqrt{-3})=N(1-\sqrt{-3})=4$, 因此 $4\mid N(d)$. 又 $U(\mathbb{Z}[\sqrt{-3}])=\{1,-1\}$, $1\pm\sqrt{-3}$ 非相伴元, $N(d)>4$. 而显然 $N(d)\neq 8$, 故 $N(d)=16$, 这意味着 $a=\pm1,b=0,d=\pm4$, 但 $d=\pm4$ 不是 $(1-\sqrt{-3})^2$ 的因子. □

命题 2.4.30 若 R 是 PID, 则 R 中素元 $=$ 不可约元.

证明 由命题 2.3.30, 只需证 R 中不可约元是素元. 设 $a\in R$ 不可约, $a\mid bc$. 假设 $a\nmid b$, 下证 $a\mid c$. 由 a 不可约可知 $\gcd(a,b)$ 相伴于 1_R, 由 Bézout 等式, 存在 $u,v\in R$ 使得

$$1_R=u\cdot a+v\cdot b.$$

两边同乘 c 得

$$c=(uc)\cdot a+v\cdot(bc)\in(a).$$ □

命题 2.4.31 设 R 是非域的 PID, $\{0_R\}\neq\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(R)$, 则 $\mathfrak{p}\in\operatorname{MaxSpec}(R)$. 故 R 的任何非零素理想均极大, $\operatorname{Spec}(R)=\{0_R\}\sqcup\operatorname{MaxSpec}(R)$.

证明 由于 R 是 PID, 存在素元 $a\in R$ 使得 $\mathfrak{p}=(a)$. 假设 $\mathfrak{p}$ 不是极大理想, 则存在 $I\trianglelefteq R$, 使得

$$\mathfrak{p}\subsetneq I\subsetneq R.$$

设 $I=(b)$, 则由 $(b)\supset(a)$ 知 $b\mid a$. 由 a 是素元, $b\in U(R)$ 或 b 与 a 相伴. 若 $b\in U(R)$, 则 $(b)=R$, 矛盾; 若 b 与 a 相伴, 则 $(b)=(a)$, 也矛盾. 故 $\mathfrak{p}$ 是极大理想. □

推论 2.4.32 设 R 是非域的 PID, $\{0_R\}\neq\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(R)$, 则 $R/\mathfrak{p}$ 是域.

在 $k[x]$ 中可以约定仅考虑首一多项式. 例如：

- ◇ 多项式 $f(x),g(x)\in k[x]$ 的最大公因式是指首一多项式 $h(x)$ 满足：$h(x)\mid f(x),h(x)\mid g(x)$, 且若 $a(x)\mid f(x),a(x)\mid g(x)$, 总有 $a(x)\mid h(x)$.

- $k[x]$ 中不可约元称为域 k 上的不可约多项式, 故

$$\mathrm{MaxSpec}(k[x]) \xleftrightarrow{1:1} \{k \text{ 上首一不可约多项式}\}.$$

特别地, $k \hookrightarrow \mathrm{MaxSpec}(k[x]), \lambda \mapsto x - \lambda$.

练习 2.4.33 设 $f(x)$ 是域 k 上的不可约非零多项式, $\deg(f(x)) \leqslant 3$, 则 $f(x)$ 在 k 上不可约 $\iff$ $\mathrm{Root}_k(f) = \varnothing$.

命题 2.4.34 $|\mathrm{Root}_k(f)| \leqslant \deg(f(x))$. 提示 利用定理 2.4.19 归纳可证, 若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in k$ 是 $f(x)$ 不同的零点, 则 $(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_m) \mid f(x)$.

域扩张 设有域的包含关系 $k \subset K$, 则 $f(x) \in k[x]$ 可视为 $K[x]$ 中的元素, 且

- $\mathrm{Root}_k(f) \subset \mathrm{Root}_K(f)$.
- $f(x) \in k[x]$ 不可约 $\not\Leftarrow$ $f(x) \in K[x]$ 不可约.
- 设 $f(x), g(x) \in k[x]$. 总有 $\gcd_{k[x]}(f(x), g(x)) = \gcd_{K[x]}(f(x), g(x))$.

上面最后一条断言可由辗转相除法不随域扩张而改变直接得到, 也可如下证明:

证明 记 $d_1(x) = \gcd_{k[x]}(f(x), g(x)), d_2(x) = \gcd_{K[x]}(f(x), g(x))$, 则 $d_1(x) \mid d_2(x)$. 由 $k[x]$ 上的 Bézout 等式, 存在 $u(x), v(x) \in k[x]$ 使得

$$d_1(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x),$$

在 $K[x]$ 中, $d_2(x) \mid f(x), d_2(x) \mid g(x)$, 由上式即得 $d_2(x) \mid d_1(x)$. 又 $d_1(x), d_2(x)$ 均为首一多项式, 故 $d_1(x) = d_2(x)$. □

通常情况并不如上文中域的包含关系这么理想. 考虑域同态 $\theta : k \hookrightarrow K$ (由练习 2.3.6, 域同态一定是单的, 因此 $k \simeq \mathrm{Im}\,\theta$), 则自然地有环嵌入 (仍用 θ 标识)

$$\begin{gathered}\theta : k[x] \hookrightarrow K[x] \\ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \theta(f(x)) = \sum_{i=0}^{n} \theta(a_i) x^i.\end{gathered}$$

并且

- $\theta(\mathrm{Root}_k(f)) \subset \mathrm{Root}_K(\theta(f))$.
- $f(x) \in k[x]$ 不可约 $\not\Leftarrow$ $\theta(f(x)) \in K[x]$ 不可约.
- 设 $f(x), g(x) \in k[x]$. 总有 $\theta\Big(\gcd_{k[x]}(f(x), g(x))\Big) = \gcd_{K[x]}(\theta(f(x)), \theta(g(x)))$.

练习 2.4.35 证明以上第 1 条和第 3 条断言.

Kronecker 添根构造 设 k 为域, $f(x) \in k[x]$ 为首一不可约多项式. 考虑典范同态

$$\begin{aligned}\theta: \qquad & k \xhookrightarrow{\text{can}} k[x] \xrightarrow{\text{can}} k[x]/(f(x)) = K \\ & \lambda \longmapsto \lambda \longmapsto \overline{\lambda} = \lambda + (f(x)).\end{aligned}$$

练习 2.4.36 设 $a \in k$, 则存在域同构

$$k \xrightarrow{\sim} k[x]/(x-a).$$

$\boxed{\text{提示}}$ 用带余除法.

注记 2.4.37 当 $f(x)$ 为一次首一多项式时, 由 $k[x]/(f(x))$ 得不到新的域. 因此以下设 $\deg(f(x)) = n \geqslant 2$. 此时 $\mathrm{Root}_k(f) = \varnothing$.

记 $u = x + (f(x)) \in K$. 对任意 $\overline{g(x)} \in K$, 由 $k[x]$ 上的带余除法, 有

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x),$$

其中 $r(x) = 0$ 或 $\deg(r(x)) < n$. 故 $\overline{g(x)} = \overline{r(x)}$, 进而有双射

$$\begin{aligned} K & \xleftrightarrow{1:1} \{r(x) \in k[x] : r(x) = 0 \text{ 或 } \deg(r(x)) < n\} \\ \overline{r(x)} & \longleftarrow\!\shortmid\; r(x) \\ \theta(c_{n-1})u^{n-1} + \cdots + \theta(c_1)u + \theta(c_0) & \longleftarrow\!\shortmid\; c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0. \end{aligned}$$

例 2.4.38 (四元域) 记 $\mathbb{F}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$. 考虑不可约多项式 $x^2 + x + \overline{1} \in \mathbb{F}_2[x]$, 有双射

$$\begin{aligned}\{a + bx : a, b \in \mathbb{F}_2\} & \xleftrightarrow{1:1} \mathbb{F}_4 := \mathbb{F}_2[x]/\big(x^2 + x + \overline{1}\big) \\ a + bx & \longmapsto \theta(a) + \theta(b)u.\end{aligned}$$

因此 $\mathbb{F}_4 = \big\{\theta(\overline{0}), \theta(\overline{1}), u, u + \theta(\overline{1})\big\}$.

在以上尝试中, 我们自然希望将 k 等同于 K 的子域, 以便摆脱繁琐的 θ.

练习 2.4.39 设 k, L 为域. 考虑域同态 $\theta : k \hookrightarrow L$ (由练习 2.3.6, 域同态一定是单的), 则 L 自然成为 k-线性空间. 其上的加法即域 L 上加法, 而数乘运算定义为:

$$\lambda.\, a := \theta(\lambda) \cdot a, \quad \forall \lambda \in k, a \in L.$$

注记 2.4.40 L 作为 k-线性空间与域同态 θ 有关.

有了练习 2.4.39, 我们可以将 K 视为 k-线性空间, 于是

$$\theta(c_{n-1})u^{n-1} + \cdots + \theta(c_1)u + \theta(c_0) = c_{n-1}.\, u^{n-1} + \cdots + c_1.\, u + c_0.\, 1_k,$$

上式右边是 k-线性组合, $\{1_k, u, \cdots, u^{n-1}\}$ 是 K 的 k-线性基, $\dim_k K = n = \deg(f)$.

约定 2.4.41 由于 $\theta(\lambda) = \lambda.\, 1_k$, 下面仍记 $\theta(\lambda) = \lambda + (f(x))$ 为 λ. 例如, 在这种约定下, 练习 2.4.39 中 $\mathbb{F}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, u, u + \overline{1}\}$.

练习 2.4.42 $\mathbb{F}_4$ 的加法表与乘法表.

解答 见表 2.1.

表 2.1: $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[x]/\big(x^2+x+\overline{1}\big)$ 的加法表与乘法表

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	u	$u+\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	u	$u+\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$u+\overline{1}$	u
u	u	$u+\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$u+\overline{1}$	$u+\overline{1}$	u	$\overline{1}$	$\overline{0}$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	u	$u+\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	u	$u+\overline{1}$
u	$\overline{0}$	u	$u+\overline{1}$	$\overline{1}$
$u+\overline{1}$	$\overline{0}$	$u+\overline{1}$	$\overline{1}$	u

练习 2.4.43 (1) 不存在 $\mathbb{F}_4 \to \mathbb{Z}_4$ 的同态.

(2) 存在唯一的 $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{F}_4$ 的同态.

在约定 2.4.41 下, 可将 $k[x]$ 中多项式 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ **等同于** $K[x]$ 中多项式 $x^n + \theta(a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + \theta(a_1)x + \theta(a_0)$. 有如下重要观察:

命题 2.4.44 $u \in \mathrm{Root}_K(f)$, 即 $f(u) = u^n + \theta(a_{n-1})u^{n-1} + \cdots + \theta(a_1)u + \theta(a_0) = 0_K$.

例 2.4.45 考虑不可约多项式 $x^2+1 \in \mathbb{R}[x]$ 以及域嵌入

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}[x]/\big(x^2+1\big) = K \\ a &\mapsto \theta(a) = a + \big(x^2+1\big) \ (\text{仍记为 } a). \end{aligned}$$

记 $u = x + \big(x^2+1\big) \in K$, 则 K 作为 $\mathbb{R}$-线性空间有 $\mathbb{R}$-基 $\{1, u\}$, K 中元素为 $a + bu$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$. 有同构

$$K \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}, \quad a + bu \mapsto a + b\sqrt{-1}.$$

但 K 未必就是 $\mathbb{C}$, 因为另有同构

$$K \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}, \quad a + bu \mapsto a - b\sqrt{-1}.$$

又 $u \in \mathrm{Root}_K\big(x^2+1\big)$, 由定理 2.4.19 可得 x^2+1 在 $K[x]$ 中的分解 (运用 Vieta 定理):

$$x^2 + 1 = (x-u)(x+u).$$

例 2.4.46 由于 $u \in \mathrm{Root}_{\mathbb{F}_4}\big(x^2+x+\overline{1}\big)$, $\mathbb{F}_2$ 上不可约多项式 $x^2+x+\overline{1}$ 在 $\mathbb{F}_4$ 上有分解 (运用 Vieta 定理及表 2.1)

$$x^2 + x + \overline{1} = (x+u)\big(x+u+\overline{1}\big).$$

定理 2.4.47 (θ 的泛性质) 考虑 $K = k[x]/(f(x))$, $u = x + (f(x))$, 域同态 $\delta : k \to F$, 以及 $\alpha \in \mathrm{Root}_F(\delta(f))$. 则唯一存在域同态 $\delta' : K \to F$ 使得 $\delta = \delta' \circ \theta$ 且 $\delta'(u) = \alpha$.

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[rr, hook, "\theta"] \arrow[dr, "\delta"'] & & K \arrow[dl, dashed, "\exists!\,\delta'\text{域同态}"] & \ni & u \arrow[dddlll, mapsto, bend left] \\
& F & & & \\
& \cup & & & \\
& \alpha & & &
\end{tikzcd}$$

证明　(1) 先证明 δ' 的至多唯一性: $\{1_k, u, \cdots, u^{n-1}\}$ 是 K 的 k-线性基, 且

$$\delta'\big(\theta(c_{n-1})u^{n-1} + \cdots + \theta(c_1)u + \theta(c_0)\big) = \delta(c_{n-1})\alpha^{n-1} + \cdots + \delta(c_1)\alpha + \delta(c_0).$$

(2) 再给出 δ' 的构造. 由命题 2.4.13, 唯一存在环同态 $\widetilde{\delta} : k[x] \to F$, 使得 $\widetilde{\delta}\big|_k = \delta$ 且 $\widetilde{\delta}(x) = \alpha$, 进而 $\widetilde{\delta}(f(x)) = \delta(f)(\alpha) = 0_F$. 于是 $(f(x)) \subset \operatorname{Ker}\widetilde{\delta}$. 由命题 2.2.19, $\widetilde{\delta}$ 诱导环同态

$$\begin{aligned} \delta' : K = k[x]/(f(x)) &\to F \\ \overline{g(x)} &\mapsto \widetilde{\delta}(g(x)). \end{aligned}$$

δ' 使得 $\delta = \delta' \circ \theta$ 且 $\delta'(u) = \widetilde{\delta}(x) = \alpha$. □

注记 2.4.48　等式 $\delta = \delta' \circ \theta$ 意味着 δ' 延拓 δ.

练习 2.4.49 (九元域)　记 $\mathbb{F}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$. 考虑不可约多项式 $x^2 + \overline{1} \in \mathbb{F}_3[x]$, 以及域同态

$$\mathbb{F}_3 \hookrightarrow \mathbb{F}_3[x]/\big(x^2 + \overline{1}\big) =: \mathbb{F}_9.$$

记 $v = x + \big(x^2 + \overline{1}\big) \in \mathbb{F}_9$.

(1) $\mathbb{F}_9$ 的加法表与乘法表.

(2) 在 $\mathbb{F}_9[x]$ 中分解 $x^2 + \overline{1}$.

解答　(2) $x^2 + \overline{1} = (x - u)\big(x - \overline{2}u\big)$. □

练习 2.4.50　记 $K = \mathbb{R}[x]/\big(x^2 + 2\big)$, $v = x + \big(x^2 + 2\big) \in K$. 证明 $K \simeq \mathbb{C}$.

练习 2.4.51　如果 D 为整环但不是域, 求证 $D[x]$ 不是 PID.

例 2.4.52　在 $\mathbb{F}_9$ 中求 $\big(\overline{2}u + \overline{1}\big)^{-1}$.

解答　由于 $\gcd_{\mathbb{F}_3[x]}\big(\overline{2}x + \overline{1}, x^2 + \overline{1}\big) = \overline{1}$, 通过带余除法可得 Bézout 等式:

$$x^2 + \overline{1} = \big(\overline{2}x + \overline{2}\big)\big(\overline{2}x + \overline{1}\big) + \overline{2}.$$

因此在 $\mathbb{F}_9$ 中

$$\overline{0} = \big(\overline{2}u + \overline{2}\big)\big(\overline{2}u + \overline{1}\big) + \overline{2} \iff \overline{1} = \big(\overline{2}u + \overline{2}\big)\big(\overline{2}u + \overline{1}\big),$$

即 $\big(\overline{2}u + \overline{1}\big)^{-1} = \overline{2}u + \overline{2}$. □

2.5 Euclid 整环

定义 2.5.1 整环 R 称为 Euclid 整环 (ED), 若存在 Euclid 函数

$$\phi : R^{\times} = R \setminus \{0_R\} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0},$$

使得任给 $a, b \in R^{\times}$, 存在 $q, r \in R$ 满足

$$a = qb + r,$$

其中 $r = 0_R$ 或 $\phi(r) < \phi(b)$.

例 2.5.2 整数环 $\mathbb{Z}$ 是 ED. 此时 Euclid 函数 $\phi = |\cdot|$, 而表达式不唯一, 如

$$33 = 3 \cdot 9 + 6 = 4 \cdot 9 - 3.$$

第二个表达式更好, 因为 $\phi(-3) = |-3|$ 更小.

例 2.5.3 域上的一元多项式环 $k[x]$ 是 ED. 此时 Euclid 函数 $\phi = \deg(\cdot)$.

定理 2.5.4 ED 是 PID.

证明 设 R 是 ED. 对任意非零理想 $I \lhd R$, 取非零元 $b \in I$ 使 $\phi(b)$ 最小. 断言: $I = (b)$. 对任意 $a \in I$, 由 R 是 ED 有

$$a = qb + r,$$

其中 $r = 0_R$ 或 $\phi(r) < \phi(b)$. 由于 $r = a - qb \in I$, 由 b 的最小性知 $r = 0_R$. 故 $b \mid a$. $\square$

命题 2.5.5 $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-1}\right]$ 是 ED, 从而是 PID.

证明 范数映射

$$\begin{aligned} N : \mathbb{Q}\left(\sqrt{-1}\right)^{\times} &\to \mathbb{Q}_{+} \\ z &\mapsto z \cdot \overline{z} \end{aligned}$$

是积性函数 (因复共轭 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$):

$$N(z \cdot w) = N(z) \cdot N(w), \quad \forall z, w \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{-1}\right)^{\times}.$$

N 限制在 $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-1}\right]^{\times} \subset \mathbb{Q}\left(\sqrt{-1}\right)^{\times}$ 为 Euclid 函数. 对任意 $x, y \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{-1}\right]^{\times}$, 记

$$\frac{x}{y} = \frac{x \cdot \overline{y}}{N(y)} = \alpha + \beta\sqrt{-1} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{-1}\right)^{\times}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Q}.$$

取 $m, n \in \mathbb{Z}$ 使得

$$|\alpha - m| \leqslant \frac{1}{2}, \quad |\beta - m| \leqslant \frac{1}{2}.$$

则由

$$\frac{x}{y} = \left(m + n\sqrt{-1}\right) + \left[(\alpha - m) + (\beta - n)\sqrt{-1}\right]$$

可得

$$x = qy + r,$$

其中 $q=m+n\sqrt{-1}, r=\big[(\alpha-m)+(\beta-n)\sqrt{-1}\big]\cdot y\in\mathbb{Z}\big[\sqrt{-1}\big]$. 若 $r\neq 0$, 则

$$N(r)=\big[(\alpha-m)^2+(\beta-n)^2\big]\cdot N(y)\leqslant\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)N(y)<N(y).$$

故 $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-1}\big]$ 是 ED. □

练习 2.5.6 利用范数映射证明例 2.1.19 (4).

练习 2.5.7 记 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. 在 $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-1}\big]$ 上计算 $\gcd(4+7\mathrm{i},3+4\mathrm{i})$.

解答 由辗转相除法:

- ◇ $\dfrac{4+7\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}=\dfrac{8}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}=2+\left(-\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}\right)\implies 4+7\mathrm{i}=2\cdot(3+4\mathrm{i})-(2+\mathrm{i})$.
- ◇ $\dfrac{3+4\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}\implies\gcd(4+7\mathrm{i},3+4\mathrm{i})=\gcd(3+4\mathrm{i},2+\mathrm{i})=2+\mathrm{i}$. □

命题 2.5.8 $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-2}\big]$ 是 ED, 从而是 PID. 提示 $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2<1$.

练习 2.5.9 利用范数映射证明 $U\big(\mathbb{Z}\big[\sqrt{-2}\big]\big)=\{\pm1\}$.

命题 2.5.10 由例 2.3.31 与命题 2.4.30 知, $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-3}\big]$ 不是 PID, 因此也不是 ED.

注记 2.5.11 由于 $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 3=1$, 命题 2.5.5 的证明方法在此处失效.

命题 2.5.12 Eisenstein 整数环 $\mathbb{Z}[\omega]$ 是 ED, 从而是 PID.

证明 ω 满足方程 $\omega^2+\omega+1=0$. 范数映射

$$\begin{aligned}N:\mathbb{Q}(\omega)^\times&\to\mathbb{Q}_+\\ a+b\omega&\mapsto a^2-ab+b^2\end{aligned}$$

限制在 $\mathbb{Z}[\omega]^\times\subset\mathbb{Q}(\omega)^\times$ 为 Euclid 函数. 对任意 $x,y\in\mathbb{Z}[\omega]^\times$, 记

$$\frac{x}{y}=\frac{x\cdot\overline{y}}{N(y)}=\alpha+\beta\omega\in\mathbb{Q}(\omega)^\times,\quad\alpha,\beta\in\mathbb{Q}.$$

取 $m,n\in\mathbb{Z}$ 使得

$$|\alpha-m|\leqslant\frac{1}{2},\quad|\beta-m|\leqslant\frac{1}{2}.$$

则由

$$\frac{x}{y}=(m+n\omega)+[(\alpha-m)+(\beta-n)\omega]$$

可得

$$x=qy+r,$$

其中 $q=m+n\omega, r=[(\alpha-m)+(\beta-n)\omega]\cdot y\in\mathbb{Z}[\omega]$. 若 $r\neq0$, 则

$$\begin{aligned}N(r)&=\big[(\alpha-m)^2+(\beta-n)^2-(\alpha-m)(\beta-n)\big]\cdot N(y)\\&\leqslant\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)N(y)<N(y).\end{aligned}$$

故 $\mathbb{Z}[\omega]$ 是 ED. □

练习 2.5.13 利用范数映射证明 $U(\mathbb{Z}[\omega]) = \{\pm 1, \pm\omega, \pm\omega^2\}$.

代数整数环 考虑 $\mathbb{Z} \subset R \subset F = \mathrm{Frac}(R)$ 使得 $\dim_{\mathbb{Q}} F < \infty$. 这里 $\mathbb{Z} \subset R$ 应理解为 $\mathrm{char}(R) = 0$ (参考注记 2.2.23).

定义 2.5.14 $\alpha \in F$ 称为代数整数, 若 α 满足首一的整系数方程:

$$\alpha^m + b_{m-1}\alpha^{m-1} + \cdots + b_1\alpha + b_0 = 0_F, \quad b_i \in \mathbb{Z}, m \geqslant 1.$$

记 F 中代数整数全体为 $\mathcal{O}_F$.

有如下重要事实 (可参阅 James S. Mline 的 A Primer of Commutative Algebra 中定理 6.5):

性质 2.5.15 $\mathcal{O}_F$ 是 F 的子环, 且 $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_F) \simeq F$.

命题 2.5.16 假设 $R \subset \mathcal{O}_F$. 若 R 是 PID (或更弱点, 为 UFD), 则 $R = \mathcal{O}_F$.

注记 2.5.17 为对以上 "若" 字之前的诸条件加深理解, 可参考以下实例:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z} & \subset & R & \subset & F = \mathrm{Frac}(R) \\
 & & \parallel & & \parallel \\
 & & \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] & & \mathbb{Q}(\sqrt{-3})
\end{array}$$

此时 $\dim_{\mathbb{Q}} F = 2$. 由 $(x-m)^2 + 3n^2$ 零化 $m + n\sqrt{-3} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 可知 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \subset \mathcal{O}_F$. 由于 ω 满足 $\omega^2+\omega+1 = 0$, $\omega \in \mathcal{O}_F \backslash \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ (也可由命题 2.5.24, $-3 \equiv 1 \pmod 4$), 因此 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})} = \mathbb{Z}[\omega] \supsetneq \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$), 由命题 2.5.16 即知 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 不是 PID. 而 Eisenstein 整数环 $\mathbb{Z}[\omega]$ 是 PID, 由命题 2.5.16, $\mathbb{Z}[\omega] = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}$.

练习 2.5.18 考虑映射

$$\begin{aligned}
\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) &\to \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\
a + b\sqrt{2} &\mapsto a - b\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

证明:

(1) $\sigma \in \mathrm{Aut}\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)$.

(2) $\mathrm{Aut}\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big) = \big\{\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}, \sigma\big\}$.

(3) σ 不能延拓为 $\mathbb{R}$ 的自同构, 即不存在 $\delta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R})$, 使得 $\delta|_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = \sigma$.

证明 (2) 设 $f \in \mathrm{Aut}\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)$, 则 $f|_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$. 对任意 $q = \dfrac{n}{m}, n, m \in \mathbb{Z}$, 由 q 是方程 $f(m) \cdot q = f(n)$ 的唯一解可知 $f(q) = q$, 故 $f|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$. 只需确定 $f(\sqrt{2})$ 即可确定 f. 由 $f(\sqrt{2})^2 = f(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = 2$ 可知 $f(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$.

- 若 $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, 则 $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$.
- 若 $f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, 则 $f = \sigma$.

(3) 若 $\delta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R})$, 则对任意 $x = y^2 \in \mathbb{R}_+$, $\delta(x) = \delta(y)^2 > 0$. □

命题 2.5.19 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ 是 ED, 从而是 PID.

证明 定义范数映射

$$\begin{aligned} N : \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)^{\times} &\to \mathbb{Q}_{+} \\ a+b\sqrt{2} &\mapsto \left|a^2-2b^2\right|. \end{aligned}$$

根据练习 2.5.18, 由 $N(x)=|x\cdot\sigma(x)|$ 可知 N 是积性函数:

$$N(x\cdot y)=N(x)\cdot N(y),\quad \forall x,y\in\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)^{\times}.$$

N 限制在 $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]^{\times}\subset\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)^{\times}$ 为 Euclid 函数. 对任意 $x,y\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]^{\times}$, 记

$$\frac{x}{y}=\frac{x\cdot\sigma(y)}{y\cdot\sigma(y)}=\alpha+\beta\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)^{\times},\quad \alpha,\beta\in\mathbb{Q}.$$

取 $m,n\in\mathbb{Z}$ 使得

$$|\alpha-m|\leqslant\frac{1}{2},\quad |\beta-m|\leqslant\frac{1}{2}.$$

则由

$$\frac{x}{y}=\left(m+n\sqrt{2}\right)+\left[(\alpha-m)+(\beta-n)\sqrt{2}\right]$$

可得

$$x=qy+r,$$

其中 $q=m+n\sqrt{2}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right], r=\left[(\alpha-m)+(\beta-n)\sqrt{2}\right]\cdot y$. 若 $r\neq 0$, 则

$$N(r)=\left|(\alpha-m)^2-2(\beta-n)^2\right|\cdot N(y)\leqslant\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2\right]N(y)<N(y).$$

故 $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ 是 ED. □

练习 2.5.20 $U\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\right)$ 为无限群.

证明 注意到 $1+\sqrt{2}\in U\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\right)$, 因此 $\left(1+\sqrt{2}\right)^n\in U\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\right), \forall n\geqslant 0$. □

注记 2.5.21 由 Dirichlet 单位定理可证 $U\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\right)=\left\{\pm\left(1+\sqrt{2}\right)^n : n\geqslant 0\right\}$.

命题 2.5.22 $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ 是 ED, 从而是 PID.

证明 可仿照命题 2.5.19 证明, 区别仅在最后的放缩:

$$\left|(\alpha-m)^2-3(\beta-n)^2\right|\leqslant\frac{3}{4}<1.$$ □

注记 2.5.23 Squarefree values of n for which the quadratic field $\mathbb{Q}\left(\sqrt{n}\right)$ is norm-Euclidean: -11, -7, -3, -2, -1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57, 73. 关于 norm-Euclidean fields 可参阅 `https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_domain#Norm-Euclidean_fields`.

命题 2.5.24 设 $d \in \mathbb{Z}$ 无平方因子, 则

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})} = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}], & \text{若 } d \equiv 2,3 \pmod 4, \\ \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right], & \text{若 } d \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

定理 2.5.25 设 $d \in \mathbb{Z}$ 无平方因子, 则存在基本单位 $u \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$, 满足 $u > 1$, 且 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ 中所有单位都可表为 $\pm u^m$, 其中 $m \in \mathbb{Z}$.

命题 2.5.26 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ 不是 ED.

证明 记 $\delta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 因为 $5 \equiv 1 \pmod 4$, 由命题 2.5.24, $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})} = \mathbb{Z}[\delta] \supsetneq \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. 由命题 2.5.16, $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ 不是 UFD, 进而不是 ED. □

2.6 Gauss 素数

定义 2.6.1 整环 R 中非零元 a, b 称为相伴的, 若存在 $u \in U(R)$ 使得 $a = bu$. 这等价于 $(a) = (b)$.

注记 2.6.2 相伴是等价关系.

例 2.6.3 由 $N(m + n\mathrm{i}) = m^2 + n^2 = 1 \iff m + n\mathrm{i} \in U(\mathbb{Z}[\mathrm{i}])$ 可知 $U(\mathbb{Z}[\mathrm{i}]) = \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}$. 因此在相伴关系下, $m + n\mathrm{i}, -m - n\mathrm{i}, -n + m\mathrm{i}, n - m\mathrm{i} \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ 应视为一体.

命题 2.6.4 设 R 为 PID, 则存在双射

$$\{a \in R : a \text{ 为素元}\}/\text{相伴关系} \leftrightarrow \operatorname{MaxSpec}(R), \quad a \mapsto (a).$$

回顾命题 2.4.31, 此时 $\operatorname{Spec}(R) = \{0\} \sqcup \operatorname{MaxSpec}(R)$.

定义 2.6.5 Gauss 整数环 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ 中的素元称为 Gauss 素数.

注记 2.6.6 因为 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ 是 PID, $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ 中素元 = 不可约元.

例 2.6.7 $2 = (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}(1+\mathrm{i})^2$ 不是 Gauss 素数, 且相伴于 "平方数".

练习 2.6.8 $1 + \mathrm{i}$ 是 Gauss 素数.

练习 2.6.9 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(1+\mathrm{i}) \simeq \mathbb{F}_2$.

证明 由于 $N(1+\mathrm{i}) = 2$, 任意 $x \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ 作带余除法:

$$x = q(1+\mathrm{i}) + r,$$

其中 $r = 0$ 或 $N(r) = 1$. 因此只需考虑 $r = 0, \pm 1, \pm \mathrm{i}$. 由

$$1 - (-\mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i}, \quad \mathrm{i} - (-1) = 1 + \mathrm{i}, \quad 1 - (-1) = (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$$

知 $\pm 1, \pm \mathrm{i}$ 模 $(1+\mathrm{i})$ 同余, $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(1+\mathrm{i}) = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ 是二元域. 由例 2.1.10 知 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(1+\mathrm{i}) \simeq \mathbb{F}_2$. □

以下是一个更富技巧性的证明 (思路与定理 2.6.15 的证明相仿):

证明 定理 2.6.15 证明中给出了环同构

$$\varphi : \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$$

$$a+b\mathrm{i} \mapsto \overline{a+bx}.$$

由 $\varphi(1+\mathrm{i})=\overline{x+1}$ 可得

$$(1+\mathrm{i}) \xrightarrow{\varphi} (\overline{x+1}).$$

由练习 2.6.16 即得环同构

$$\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(1+\mathrm{i}) \simeq \big(\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)\big)/\big(\overline{x+1}\big).$$

由 $(x+1)(1-x)\equiv 1-x^2\equiv 2 \pmod{(x^2+1)}$ 可知 $(\overline{2})\subset(\overline{x+1})$. 记 $R=\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$, 由例 2.2.27, 存在环同构

$$\big(R/(\overline{2})\big)/\big((\overline{x+1})/(\overline{2})\big) \simeq R/(\overline{x+1}).$$

注意到

$$\big(R/(\overline{2})\big)/\big((\overline{x+1})/(\overline{2})\big) = \mathbb{F}_2[x]/(\overline{x+1}) \simeq \mathbb{F}_2,$$

于是

$$\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(1+\mathrm{i}) \simeq R/(\overline{x+1}) \simeq \mathbb{F}_2.$$

□

注记 2.6.10 (1) 由注记 2.3.12 (2), $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(1+\mathrm{i})$ 是域 $\implies$ $1+\mathrm{i}$ 是 Gauss 素数.

(2) $\{0,1\}$ 是模 $(1+\mathrm{i})$ 同余的完全代表元系也可如下证明:

- ◇ $(1+\mathrm{i}) \subsetneq \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \implies 1\notin(1+\mathrm{i}) \implies 0\not\equiv 1 \pmod{(1+\mathrm{i})}$.
- ◇ 注意到 $2=(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})\in(1+\mathrm{i})$, 因此对任意 $m+n\mathrm{i}\in\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$,

$$m+n\mathrm{i}\equiv m-n\equiv\begin{cases}0, & 若\ m-n\ 为偶数,\\ 1, & 若\ m-n\ 为奇数\end{cases} \pmod{(1+\mathrm{i})}.$$

(3) 更一般的结论见练习 2.6.26.

练习 2.6.11 记 $R=\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(2)$.

(1) 证明: R 有 4 个元素.

(2) R 是否同构于 $\mathbb{Z}_4$?

(3) R 是否同构于 $\mathbb{F}_2[x]/(x^2)$?

解答 (1) 易知 $\{0,1,\mathrm{i},1+\mathrm{i}\}$ 是 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ 模 (2) 的完全代表元系. 也可在定理 2.6.15 证明用到的环同构中令 $p=2$ 得到 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(2)\simeq\mathbb{F}_2[x]/(x^2+\overline{1})$.

(2) 不同构, 因为 $\mathrm{char}(R)=2\neq 4$.

(3) $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(2)\simeq\mathbb{F}_2[x]/(x^2+\overline{1}) = \mathbb{F}_2[x]\Big/\Big((x+\overline{1})^2\Big) \xrightarrow[x\mapsto x-\overline{1}]{\sim} \mathbb{F}_2[x]/(x^2)$. □

引理 2.6.12 设 $z\in\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. 若 $N(z)=p$ 为素数 (这样的 p 只能是 2 或 $4k+1$), 则 z 是 Gauss 素数.

提示 只需证 z 是不可约元.

引理 2.6.13 设奇素数 $p=4k+3$, 则 p 是 Gauss 素数.

证明 假设 p 在 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ 中有非平凡分解 $p=xy$, 则 $p^2=N(x)N(y)$. 由于 $N(x),N(y)>1$, $N(x)=N(y)=p$. 因此 p 是两个整数 (一个奇数与一个偶数) 的平方和, 但一个奇数与一个偶数的平方和为 $4k+1$ 型整数, 矛盾. 故 p 是不可约元, 即 p 是 Gauss 素数. □

例 2.6.14 ($4k+1$ 型素数不是 Gauss 素数)

$$5=(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}),\quad 13=(3+2\mathrm{i})(3-2\mathrm{i}),\quad 17=(4+\mathrm{i})(4-\mathrm{i}).$$

定理 2.6.15 (Fermat 二平方和定理) 设 p 为奇素数, 则 $p=4k+1$ 当且仅当 $p=a^2+b^2$. 此时, 这样的 $0<a<b$ 唯一.

证明 ($\Leftarrow$) 一个奇数与一个偶数的平方和为 $4k+1$ 型整数.

($\Rightarrow$) ① 由于 $4\mid(p-1)$, 由命题 4.2.8, 循环群 $\mathbb{F}_p^\times$ 中有四阶元, 因此方程 $x^2+\bar{1}=\bar{0}$ 在 $\mathbb{F}_p^\times$ 中有解, 即 $x^2+\bar{1}$ 在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中可约. 注意到存在**环同构**

$$\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(p)\simeq\mathbb{F}_p[x]/\big(x^2+\bar{1}\big),$$

由注记 2.3.12 (2), p 不是 Gauss 素数. 设 p 在 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ 中有非平凡分解 $p=xy$, 则 $p^2=N(x)N(y)$. 由于 $N(x),N(y)>1$, $N(x)=N(y)=p$. 故存在 $a,b\in\mathbb{N}$ 使得 $p=a^2+b^2$.

② 设 $p=a^2+b^2=c^2+d^2$, 其中 $0<a<b,0<c<d$. 由引理 2.6.12,

$$a+b\mathrm{i},\quad a-b\mathrm{i},\quad c+d\mathrm{i},\quad c-d\mathrm{i}$$

均为 Gauss 素数. 由 $p=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})$ 知 $(a+b\mathrm{i})\mid(c+d\mathrm{i})$ 或 $(a+b\mathrm{i})\mid(c-d\mathrm{i})$. 但 $c\pm d\mathrm{i}$ 也是 Gauss 素数, 因此 $a+b\mathrm{i}$ 与 $c+d\mathrm{i}$ 相伴或与 $c-d\mathrm{i}$ 相伴. 设 $a+b\mathrm{i}=u(c\pm d\mathrm{i})$, 容易验证, $u\neq -1,\pm\mathrm{i}$. 故 $a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}$. 这证明了 $a,b\in\mathbb{N}$ 的唯一性.

(环同构补证) 以下分三步给出 ($\Rightarrow$) 中环同构的证明:

① 对环同态 $\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, 由命题 2.4.13, 唯一存在环同态

$$\begin{aligned}\varphi:\mathbb{Z}[x]&\to\mathbb{Z}[\mathrm{i}]\\ f(x)&\mapsto f(\mathrm{i}).\end{aligned}$$

显然 φ 是满射, 且 $\operatorname{Ker}\varphi=\big(x^2+1\big)$. 由定理 2.2.20, 存在环同构

$$\overline{\varphi}:\mathbb{Z}[x]/\big(x^2+1\big)\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$$

② 观察到 ① 中环同构 $\overline{\varphi}$ 使得

$$\big(x^2+1,p\big)/\big(x^2+1\big)\xrightarrow{\overline{\varphi}}(p).$$

其中 $\big(x^2+1,p\big):=\big(x^2+1\big)+(p)$ 表示包含 x^2+1 和 p 的最小理想. 由例 2.2.27 与练习 2.6.16, 存在如下两个环同构:

$$\begin{tikzcd}
\big(\mathbb{Z}[x]/\big(x^2+1\big)\big)/\big(\big(x^2+1,p\big)/\big(x^2+1\big)\big) \arrow[r, "\sim", "\text{练习 2.6.16}"'] \arrow[d, "\text{例 2.2.27}"', "\wr"] & \mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(p) \\
\mathbb{Z}[x]/\big(x^2+1,p\big) &
\end{tikzcd}$$

③ 由模 p 约化

$$\mathbb{Z}[x] \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p[x], \quad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} x^i$$

及定理 2.2.20, 存在环同构

$$\psi : \mathbb{Z}[x]/(p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_p[x].$$

观察到

$$\big(x^2+1, p\big)/(p) \xrightarrow{\psi} \big(x^2+\overline{1}\big),$$

再次运用例 2.2.27 与练习 2.6.16 就得到如下两个环同构:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}[x]/(p))/\big((x^2+1,p)/(p)\big) \arrow[r, "\sim", "\text{练习 2.6.16}"'] \arrow[d, "\text{例 2.2.27}"', "\wr"] & \mathbb{F}_p[x]/\big(x^2+\overline{1}\big) \\
\mathbb{Z}[x]/\big(x^2+1,p\big) &
\end{tikzcd}$$

再结合 ② 中环同构就得到欲证的环同构:

$$\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_p[x]/\big(x^2+\overline{1}\big), \quad \overline{m+n\mathrm{i}} \mapsto \overline{\overline{m}+\overline{n}x}.$$

□

练习 2.6.16 设 $\theta : R \xrightarrow{\sim} S$ 为环同构, $I \lhd R$, $\theta(I) \lhd S$, 则 $R/I \simeq S/\theta(I)$.

定理 2.6.17 (Gauss 素数分类) 在相伴的意义下, Gauss 素数可分为以下三类:

- ◇ $1+\mathrm{i}$.
- ◇ $4k+3$ 型素数.
- ◇ $a \pm b\mathrm{i}$, 其中 $p = a^2+b^2$ 为 $4k+1$ 型素数, $0 < a < b$.

证明 由于这三类数都是 Gauss 素数且互不相伴, 只需验证任一 Gauss 素数 (在相伴的意义下) 均从属于其中一类. 设 $z \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ 是 Gauss 素数, 则

$$z \mid z \cdot \overline{z} = N(z) = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k},$$

其中 $p_1, \cdots, p_k \in \mathbb{N}$ 为素数, 注意到每个 p_i 必为以下三类数之一:

- ◇ $p_i = 2 = -\mathrm{i} \cdot (1+\mathrm{i})^2$.
- ◇ p_i 为 $4k+3$ 型素数.
- ◇ $p_i = a^2+b^2 = (a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})$ 为 $4k+1$ 型素数.

因此 $N(z) = z_1 \cdots z_s$, 其中每个 z_i 均为定理所述三类数之一. 由 $z \mid z_1 \cdots z_s$ 可知存在 $1 \leqslant j \leqslant s$ 使得 $z \mid z_j$. 又 z 与 z_j 均为 Gauss 素数, 故 z 与 z_j 相伴. □

注记 2.6.18 $4k+3$ 与 $4k+1$ 型素数均有无穷个. (直接证明或由 Dirichlet 定理: 设正整数 a, d 互素, 则 $a+nd$ 型素数有无穷个.)

命题 2.6.19 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ 中任一元素 z 有素分解

$$z \overset{\text{相伴}}{\sim} z_1 \cdots z_t,$$

其中 $z_1,\cdots,z_t$ 均为 Gauss 素数.

证明 由于 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ 是 PID, 这等价于证明有不可约分解. 设 $z\in\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, 若 z 是不可约元, 则已满足要求; 若 $z=xy$ 是非平凡分解, 则 $N(x),N(y)<N(z)$, 由递降法即得证. □

定理 2.6.20 (二平方和定理) 设 $n\geqslant 2$, 则 n 可写成二平方和当且仅当有标准分解

$$n=2^r p_1^{m_1}\cdots p_t^{m_t},$$

其中若 $p_i=4k+3$, 相应的 m_i 为偶数.

证明 ($\Leftarrow$) 注意到恒等式

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2$$

蕴含着: 若两个整数均可表示成两个整数的平方和, 则它们的积也是两个整数的平方和 (这本质上是 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ 中范数映射的积性). 由已知条件, 结合定理 2.6.15, 易知 n 可写成若干平方和的乘积, 进而可写成二平方和.

($\Rightarrow$) 设 $n=a^2+b^2, z=a+b\mathrm{i}\in\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. 由命题 2.6.19, z 在 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ 中有标准分解

$$z=u\cdot z_1\cdots z_t,$$

其中 $u\in\{\pm1,\pm\mathrm{i}\}$, $z_1,\cdots,z_t$ 均为 Gauss 素数. 于是

$$n=N(z)=N(z_1)\cdots N(z_t).$$

由定理 2.6.17 即知 n 有所给的标准分解. □

例 2.6.21 在 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ 中分解 $z=29-2\mathrm{i}$.

解答 $N(z)=5\cdot 13^2$. 由定理 2.6.17 知 z 的不可约因子只能在 $1\pm2\mathrm{i},2\pm3\mathrm{i}$ 之中. 通过试除即知 $z=-1\cdot(1+2\mathrm{i})\cdot(2+3\mathrm{i})^2$. □

练习 2.6.22 分别将 60 和 $81+8\mathrm{i}$ 在 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ 中分解成不可约元之积.

解答 $60=-1\cdot3\cdot(1+2\mathrm{i})\cdot(1-2\mathrm{i})\cdot(1+\mathrm{i})^4$, $81+8\mathrm{i}=-\mathrm{i}\cdot(2-7\mathrm{i})\cdot(1-2\mathrm{i})^3$. □

命题 2.6.23 任一环同态 $\theta:R\to S$ 诱导映射

$$\operatorname{Spec}(S)\to\operatorname{Spec}(R),\quad \mathfrak{q}\mapsto\theta^{-1}(\mathfrak{q}).$$

特别地, 若 R 是 S 的子环, 则有映射

$$\operatorname{Spec}(S)\to\operatorname{Spec}(R),\quad \mathfrak{q}\mapsto\mathfrak{q}\cap R.$$

注记 2.6.24 诱导映射的良定性见练习 2.3.35 (2), 它是 Zariski 拓扑下的连续映射. 此时还有整环间的嵌入映射

$$R/(\mathfrak{q}\cap R)\hookrightarrow S/\mathfrak{q}.$$

练习 2.6.25 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ 的素理想与 $\mathbb{Z}$ 的交集有以下三类情形:

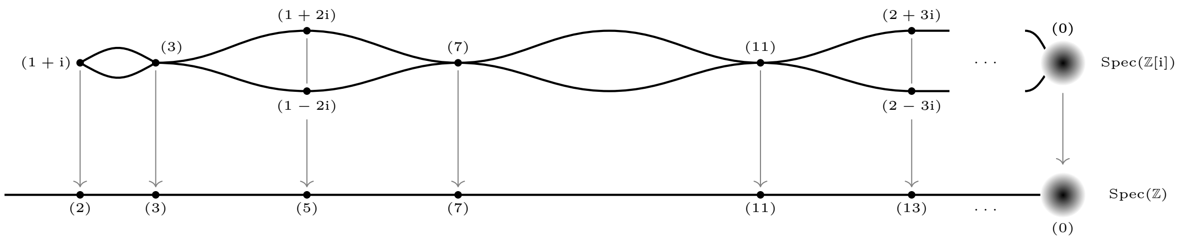
(1) $(1+\mathrm{i})\cap\mathbb{Z}=2\mathbb{Z}$.

(2) 若 p 为 $4k+3$ 型素数, 则 $(p)\cap\mathbb{Z}=p\mathbb{Z}$.

(3) 若 $p=a^2+b^2$ $(0<a<b)$ 为 $4k+1$ 型素数, 则 $(a+b\mathrm{i})\cap\mathbb{Z}=(a-b\mathrm{i})\cap\mathbb{Z}=p\mathbb{Z}$.

提示 RHS $\subset$ LHS 均显然, 再由命题 2.6.23 及 $p\mathbb{Z}\in\operatorname{MaxSpec}(\mathbb{Z})$ 可得 LHS = RHS.

由命题 2.6.23, 考虑 $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, 利用练习 2.6.25, 可得 $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\mathrm{i}])\to\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ 的图像:



◇ $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(1+\mathrm{i})\simeq\mathbb{F}_2$ (练习 2.6.9).

◇ 若 p 为 $4k+3$ 型素数, 定理 2.6.15 证明中给出环同构

$$\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(p)\simeq\mathbb{F}_p[x]/\big(x^2+\overline{1}\big),$$

注意到 $x^2+\overline{1}\in\mathbb{F}_p[x]$ 是不可约多项式, 上式两边均为 p^2 元域.

◇ 若 $p=a^2+b^2$ $(0<a<b)$ 为 $4k+1$ 型素数, 则 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(a+b\mathrm{i})\simeq\mathbb{F}_p$ (练习 2.6.26).

练习 2.6.26 设 $a,b\in\mathbb{Z}$. 若 $\gcd(a,b)=1$, 则 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(a+b\mathrm{i})\simeq\mathbb{Z}/\big(a^2+b^2\big)$.

证明 因为 $\gcd(a,b)=1$, 由 Bézout 等式, 存在 $u,v\in\mathbb{Z}$ 使得 $au+bv=1$, 从而

$$(a+b\mathrm{i})(v+u\mathrm{i})=(av-bu)+(au+bv)\mathrm{i}=av-bu+\mathrm{i}.$$

因此在 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(a+b\mathrm{i})$ 中 $\mathrm{i}\equiv bu-av \pmod{(a+b\mathrm{i})}$, 进而

$$c+d\mathrm{i}\equiv c+d(bu-av)\pmod{(a+b\mathrm{i})},\quad\forall c,d\in\mathbb{Z}.$$

而 $c+d(bu-av)\in\mathbb{Z}$, 这说明环同态

$$\begin{aligned}\theta:\mathbb{Z}&\to\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(a+b\mathrm{i})\\ m&\mapsto\overline{m}\end{aligned}$$

是满的. 再由

$$\begin{aligned}m\in\operatorname{Ker}\theta &\iff (a+b\mathrm{i})\mid m\iff\frac{m}{a+b\mathrm{i}}=\frac{m(a-b\mathrm{i})}{a^2+b^2}\in\mathbb{Z}[\mathrm{i}]\\ &\iff \big(a^2+b^2\big)\mid ma \text{ 且 } \big(a^2+b^2\big)\mid mb\iff\big(a^2+b^2\big)\mid\gcd(ma,mb)\\ &\iff\big(a^2+b^2\big)\mid m\cdot\gcd(a,b)\iff\big(a^2+b^2\big)\mid m\end{aligned}$$

得 $\operatorname{Ker}\theta=\big(a^2+b^2\big)\mathbb{Z}$. 故由定理 2.2.20,

$$\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(a+b\mathrm{i})=\operatorname{Im}\theta\simeq\mathbb{Z}/\operatorname{Ker}\theta=\mathbb{Z}/\big(a^2+b^2\big)\mathbb{Z}.$$

□

2.7 唯一分解整环

定义 2.7.1 整环 R 称为唯一分解整环 (UFD), 若满足以下两条:

(1) **(存在不可约分解)** 每个非零非单位元素 $a \in R$ 均可写成

$$a = c_1 c_2 \cdots c_r,$$

其中 c_i 均为不可约元.

(2) **(分解的唯一性)** 若 $a = c_1 c_2 \cdots c_r = c_1' c_2' \cdots c_s'$ 是 a 的任意两个上述不可约分解, 则 $r = s$, 且存在置换 $\sigma \in S_r$, 使得 c_i 与 $c'_{\sigma(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ 相伴.

注记 2.7.2 由推论 2.7.23, 条件 (2) 可替换成 "R 中素元 $=$ 不可约元".

命题 2.7.3 若 R 是 UFD, 则 R 中素元 $=$ 不可约元. 故 UFD 中任一元素有素分解.

命题 2.7.4 若 R 是 UFD, 则 R 中任一非零非单位元素 a 有标准分解

$$a = up_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r},$$

其中 $u \in U(R)$, $p_1, \cdots, p_r$ 为素元且互不相伴, $n_i \geqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. 进而 a 的因子总形如

$$vp_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r},$$

其中 $v \in U(R)$, $0 \leqslant m_i \leqslant n_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. 在相伴的意义下, a 恰有 $\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(1+n_i)$ 个因子.

命题 2.7.5 若 R 是 UFD, 则对任意非零元 $a, b \in R$, $\gcd(a, b)$ 和 $\operatorname{lcm}(a, b)$ 均存在. 若 a, b 有标准分解

$$a = up_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}, \quad b = vp_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r},$$

其中 $u, v \in U(R)$, $n_i, m_j \geqslant 0$, 则

$$\gcd(a, b) \text{ 相伴于 } \prod_{i=1}^{r} p_i^{\min\{n_i, m_i\}}, \quad \operatorname{lcm}(a, b) \text{ 相伴于 } \prod_{i=1}^{r} p_i^{\max\{n_i, m_i\}}.$$

引理 2.7.6 设 R 为 UFD, a, b 为 R 中非零元.

(1) $\gcd\left(\dfrac{a}{\gcd(a,b)}, \dfrac{b}{\gcd(a,b)}\right)$ 相伴于 1.

(2) 若 $\gcd(a, b)$ 相伴于 1 (即 a, b 互素) 且 $a \mid bc$, 则 $a \mid c$.

命题 2.7.7 若 R 为 UFD, 则 $\operatorname{Frac}(R)$ 中任一元素 $\dfrac{a}{b}$ 有既约表达 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$, 其中 $\gcd(a', b')$ 相伴于 1.

现在可以证明命题 2.5.16.

命题 2.5.16 UFD 是整闭环.

证明 设 R 为 UFD. 任取 $\dfrac{a}{b}\in\mathrm{Frac}(R)\setminus R$, 由命题 2.7.7, 可设 $\dfrac{a}{b}$ 为既约形式, 则存在 R 中素元 p 使得 $p\mid b$ 但 $p\nmid a$. 若 $\dfrac{a}{b}\in\mathcal{O}_{\mathrm{Frac}(R)}$, 设

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n+c_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+\cdots+c_0=0,\quad c_i\in R.$$

两边同乘 b^n 得到

$$a^n+c_{n-1}a^{n-1}b+\cdots+c_0b^n=0.$$

由 $p\mid b$ 即知 $p\mid a^n$, 但这与 R 为 UFD 且 $p\nmid a$ 矛盾. 故 $R=\mathcal{O}_{\mathrm{Frac}(R)}$. □

练习 2.7.8 设 R 为 UFD, 且在 $\mathrm{Frac}(R)$ 中有 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, 其中 $\gcd(a,b)$ 与 $\gcd(c,d)$ 均相伴于 1, 则 a 与 c 相伴, b 与 d 相伴.

定义 2.7.9 整环 R 称为 Bézout 整环, 若 R 中任意两个主理想之和仍为主理想.

注记 2.7.10 (1) Bézout 整环中 Bézout 等式成立.

(2) PID 是 Bézout 整环.

定理 2.7.11 R 是 PID 当且仅当 R 是 UFD 且是 Bézout 整环.

例 2.7.12 (一般 UFD 无 Bézout 等式) 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中 $\gcd(2,x)=1$, 但不存在 $f(x),g(x)\in\mathbb{Z}[x]$, 使得 $2f(x)+xg(x)=1$.

定义 2.7.13 设 $X\subset R$. 称包含 X 的最小理想为 X 生成的理想, 记为

$$(X)=RX=\left\{\text{有限和}\sum_i a_i\cdot x_i,\ \text{其中}\ a_i\in R,x_i\in X\right\}.$$

定义 2.7.14 $I\lhd R$ 称为有限生成理想, 若存在有限集 X, 使得 $I=(X)$, X 称为生成元集.

定义 2.7.15 环 R 称为 Noether 环, 若任何理想均有限生成.

例 2.7.16 PID 是 Noether 环.

定理 2.7.17 (Hilbert 基定理) 设 R 为 Noether 环, 则 $R[x_1,\cdots,x_n]$ 及其商环均为 Noether 环.

提示 由于 $R[x_1,\cdots,x_{n+1}]\simeq R[x_1,\cdots,x_n][x_{n+1}]$, 断言的第一类化约为证明 “$R$ 为 Noether 环 $\Longrightarrow$ $R[x]$ 为 Noether 环”; 再由例 2.2.27 对应定理, 其商环的任何理想均有限生成.

下面的定理说明定义 2.7.1 中条件 (1) 对绝大多数环均成立.

定理 2.7.18 设 R 为 Noether 整环, 则 R 中每个非零非单位元素均有不可约分解.

证明 用反证法, 假设 $a\in R$ 无不可约分解. 特别地, a 可约. 设有非平凡分解 $a=a_1\cdot a_2$, 则 a_1 与 a_2 至少有一个无不可约分解. 不妨设 a_1 无不可约分解, 特别地, a_1 可约. 设有非平凡分解 $a_1=a_{11}\cdot a_{12}$, 并不妨设 a_{11} 无不可约分解, $a_{11}=a_{111}\cdot a_{112}$, a_{111} 无不可约分解. 由此递推可得 R 中理想的无限严格升链:

$$(a_1)\subsetneq(a_{11})\subsetneq(a_{111})\subsetneq\cdots,$$

由练习 2.7.19 得矛盾. 故假设不成立. □

练习 2.7.19 设 R 为 Noether 环, 则 R 中不存在理想的无限严格升链:

$$I_1\subsetneq I_2\subsetneq I_3\subsetneq\cdots,\quad I_i\lhd R.$$

证明 用反证法, 假设存在如上严格升链. 令 $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, 则 $I \lhd R$. 由 R 是 Noether 环知 I 是有限生成的, 设 $\{a_1, \cdots, a_m\}$ 为其生成元集. 由 I 的定义, 存在映射

$$\sigma : \{1, \cdots, m\} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 1},$$

使得 $a_i \in I_{\sigma(i)}$. 令 $M = \max\{\sigma(1), \cdots, \sigma(m)\}$, 则由升链可得 $a_1, \cdots, a_m \in I_M$, $I_M \subset I \subset I_M$. 故 $I_M = I$, 矛盾. □

注记 2.7.20 事实上, 这一性质可用作 Noether 环的等价定义.

命题 2.7.21 设 R 为整环. 若 $a \in R$ 有素分解, 则 a 的不可约分解唯一 (在定义 2.7.1 (2) 意义下).

提示〉利用素元与整环性质逐一消去.

注记 2.7.22 由此可知素分解强于不可约分解.

推论 2.7.23 设整环 R 中每个非零非单位元素均有不可约分解 (如 Noether 整环), 则 R 是 UFD 当且仅当 R 中素元 = 不可约元.

例 2.7.24 PID 是 UFD.

定理 2.7.25 (Gauss 定理) 设 R 为 UFD, 则 $R[x]$ 亦为 UFD.

例 2.7.26 $\mathbb{Z}[x]$ 为 UFD, 但不是 PID. 因为 $(x) \subsetneq (2, x) \subsetneq \mathbb{Z}[x]$, 说明非零素理想 (x) 不是极大理想.

例 2.7.27 $\mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ 和 $k[x_1, \cdots, x_n]$ (k 为域) 均为 UFD.

为了证明定理 2.7.25, 需要一些准备工作.

定义 2.7.28 设 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$ 且 $f(x) \neq 0$. 定义 $f(x)$ 的容度为 $c(f) = \gcd(a_0, a_1, \cdots, a_n)$. 称 $f(x)$ 为本原的, 若 $c(f)$ 相伴于 1.

定义 2.7.29 设 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$ 且 $f(x) \neq 0$, 则可将 $f(x)$ 本原化: $f(x) = c(f) \cdot f_0(x)$, 其中 $f_0(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{c(f)} \cdot x^i$ 是本原多项式.

引理 2.7.30 (Gauss 引理) 设 $f(x), g(x) \in R[x]$, 则 $c(f \cdot g)$ 相伴于 $c(f) \cdot c(g)$. 特别地, 本原多项式的乘积仍是本原的.

证明 通过本原化, 只需证本原多项式的乘积仍是本原的. 设存在两个本原多项式

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$$

使得 $f(x)g(x)$ 不是本原的, 则存在素元 p 使得 $f(x)g(x)$ 中所有系数. 由于 $f(x)$ 本原, p 不能整除所有 a_i, 设 r 是最小下标使 $p \nmid a_r$. 类似地, 设 s 是最小下标使 $p \nmid b_s$. 考虑 $f(x)g(x)$ 中 x^{r+s} 的系数

$$a_0 b_{r+s} + \cdots + a_{r-1} b_{s+1} + a_r b_s + a_{r+1} b_{s-1} + \cdots + a_{r+s} b_0,$$

该和式中只有 $a_r b_s$ 一项不被 p 整除, 因此 x^{r+s} 系数不被 p 整除, 这与假设矛盾. □

以下用模 p 约化手法给出另证:

证明 用反证法, 同前面证明的假设. 考虑模 p 约化

$$\begin{aligned}\pi: R[x] &\to (R/pR)[x]\\ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i &\mapsto \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} x^i.\end{aligned}$$

显然 π 是环同态且 $\operatorname{Ker}\pi = p(R[x])$. 由 $(R/pR)[x]$ 是整环且 $\pi(f(x)g(x)) = \overline{0}$, $f(x) \in \operatorname{Ker}\pi$ 或 $g(x) \in \operatorname{Ker}\pi$, 即 $p \mid f(x)$ 或 $p \mid g(x)$, 矛盾. □

注记 2.7.31 Gauss 引理一个常用的特例如下: 记 $K = \operatorname{Frac}(R)$, 设 $f(x), g(x) \in K[x]$ 是首一多项式, 则 $f(x)g(x) \in R[x] \implies f(x), g(x) \in R[x]$.

现在可以给出定理 2.7.25 的证明:

证明 记 $K = \operatorname{Frac}(R)$. 将 $R[x]$ 中非零多项式 $f(x)$ 本原化:

$$f(x) = c(f) \cdot f_0(x) = c_1 c_2 \cdots c_r \cdot f_0(x),$$

其中 $c_i \in R$ 为素元. 下面给出 $f(x) \in R[x]$ 的不可约分解.

(1) 由练习 2.7.32, 若 c 为 R 中素元, 则 c 作为常值多项式亦为 $R[x]$ 中素元. 此断言亦可如下证明. 设 $c \mid g(x)h(x)$, 作本原化: $g(x) = c(g) \cdot g_0(x), h(x) = c(f) \cdot h_0(x)$. 由引理 2.7.30, $g_0(x)h_0(x)$ 为本原多项式, 因此 $c \mid c(g)c(h)$. 而 c 为 R 中素元, 不妨设 $c \mid c(g)$, 则 $c \mid c(g) \cdot g_0(x) = g(x)$. 故 c 亦为 $R[x]$ 中素元.

(2) 将 $f_0(x)$ 在 $K[x]$ 上作不可约分解:

$$f_0(x) = f_1(x) \cdots f_s(x),$$

其中 $f_i(x) \in K[x]$ 不可约. 对每个 $f_i(x)$, 可先通分为 $f_i(x) = \dfrac{1}{a} \cdot \widetilde{f_i}(x)$, 其中 $\dfrac{1}{a} \in K$, $\widetilde{f_i}(x) \in R[x]$; 再将 $\widetilde{f_i}(x)$ 本原化: $\widetilde{f_i}(x) = c\left(\widetilde{f_i}\right) \cdot \bar{f_i}(x)$. 于是

$$f_i(x) = \frac{c(f_i)}{a} \cdot \bar{f_i}(x).$$

由于 $\dfrac{c(f_i)}{a} \in K \setminus \{0_K\}$, $f_i(x)$ 与 $\bar{f_i}(x)$ 在 $K[x]$ 中相伴, $\bar{f_i}(x) \in K[x]$ 不可约. 故

$$f_0(x) = \frac{b}{a} \cdot \bar{f_1}(x) \cdots \bar{f_s}(x),$$

其中 $\dfrac{b}{a} \in K$, $\bar{f_i}(x) \in K[x]$ 不可约. 此时

$$a \cdot f_0(x) = b \cdot \bar{f_1}(x) \cdots \bar{f_s}(x).$$

由引理 2.7.30, $\bar{f_1}(x) \cdots \bar{f_s}(x)$ 为本原多项式, 上式两边取容度即得 a 与 b 在 R 中相伴. 因此 $u = \dfrac{b}{a} \in U(R)$,

$$f_0(x) = u \cdot \bar{f_1}(x) \cdots \bar{f_s}(x),$$

其中 $\bar{f_i}(x) \in K[x]$ 不可约 (在 $K[x]$ 中等价于素), 在 $R[x]$ 中本原.

(3) 由练习 2.7.33 可得 $\bar{f}_i(x)$ 是 $R[x]$ 中不可约元. 亦可如下证明 $\bar{f}_i(x)$ 是 $R[x]$ 中素元. 设在 $R[x]$ 中有 $\bar{f}_i(x) \mid g(x)h(x)$, 由 $\bar{f}_i(x)$ 是 $K[x]$ 中素元, 可不妨设在 $K[x]$ 中有 $\bar{f}_i(x) \mid g(x)$, $g(x) = \bar{f}_i(x) \cdot d(x)$. 设

$$d(x) = \frac{b'}{a'} \cdot \overline{d}(x),$$

其中 $a', b' \in R$, $\overline{d}(x) \in R[x]$ 本原. 此时

$$a' \cdot g(x) = b' \cdot \bar{f}_i(x) \cdot \overline{d}(x).$$

由引理 2.7.30, $\bar{f}_i(x) \cdot \overline{d}(x)$ 本原, 两边取容度即得 $a' \cdot c(g)$ 相伴于 b'. 故 $d(x)$ 在 $R[x]$ 中相伴于 $c(g) \cdot \overline{d}(x)$, 进而在 $R[x]$ 中 $\bar{f}_i(x) \mid g(x)$. 这就说明 $\bar{f}_i(x)$ 是 $R[x]$ 中素元. □

练习 2.7.32 设 R 为 UFD, $c \in R$ 为素元, 则存在环同构

$$R[x]/(c) \simeq (R/Rc)[x].$$

此时, R/Rc 为整环 $\implies$ $(R/Rc)[x]$ 为整环 $\implies$ $R[x]/(c)$ 为整环 $\implies$ c 为 $R[x]$ 中素元.

练习 2.7.33 设 R 为 UFD, $K = \mathrm{Frac}(R)$. 若 $f(x)$ 是 $R[x]$ 中的本原多项式, 且在 $K[x]$ 中不可约, 则存在环单同态

$$R[x]/(f(x)R[x]) \hookrightarrow K[x]/(f(x)K[x]).$$

此时, 由 $K[x]/(f(x)K[x])$ 是域可得 $R[x]/(f(x)R[x])$ 是整环, 从而 $f(x) \in R[x]$ 不可约.

从定理 2.7.25 证明的 (3) 和练习 2.7.33 可提取出以下重要命题:

命题 2.7.34 设 R 为 UFD, $K = \mathrm{Frac}(R)$. 若 $f(x) \in R[x]$ 为本原多项式, 则 $f(x)$ 在 $R[x]$ 中不可约当且仅当 $f(x)$ 是 K 上的不可约多项式.

例 2.7.35 $f(x) = x^3 + 3x - 2$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

解答 因 $f(x)$ 是 $\mathbb{Z}[x]$ 中的本原多项式, 由命题 2.7.34, 只需证 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中不可约. 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中可约, 则它在 $\mathbb{Z}[x]$ 中有分解 $f(x) = (x - m)\big(x^2 + ax + b\big)$, 其中 $m, a, b \in \mathbb{Z}$. 于是 $f(m) = 0$ 且 $-mb = 2$. 依次代入 $m = \pm 1, \pm 2$ 知无解. □

例 2.7.36 设 k 为域, 则 $y^3 - x^2 \in k[x, y]$ 不可约.

解答 因为 $k[x, y] \simeq k[x][y]$, 若 $y^3 - x^2$ 在 $k[x, y]$ 中可约, 则它在 $k[x][y]$ 中有分解 $y^3 - x^2 = [y - m(x)] \cdot \big[y^2 + a(x)y + b(x)\big]$, 其中 $m(x), a(x), b(x) \in k[x]$. 于是 $m(x)^3 - x^2 = 0$, 但这无解. □

注记 2.7.37 因为 $y^3 - x^2 \in k[x][y]$ 本原, 由命题 2.7.34, $y^3 - x^2 \in k(x)[y]$ 不可约, 其中 $k(x)$ 表示 $k[x]$ 的分式域.

练习 2.7.38 设 $A = k[x, y]/\big(y^3 - x^2\big)$. 由于 $k[x, y]$ 是 UFD, 由例 2.7.36 知 $y^3 - x^2$ 是 $k[x, y]$ 中素元, 因此 A 是整环. 视 $k[x, y]$ 为 k-线性空间, $\big(y^3 - x^2\big)$ 为 $k[x, y]$ 的线性子空间, 则 A 为商空间.

(1) 求 A 的一组 k-基.

(2) A 是否为 UFD?

(3) 考虑 $k[t]$ 的子环 $S = \big\{a_0 + a_2t^2 + a_3t^3 + \cdots : a_i \in k\big\}$. 证明: $S \simeq A$.

解答 (1) 对任意 $f(x,y)\in k[x,y]=k[x][y]$, 由于 y^3-x^2 是 $k[x][y]$ 中的首一多项式, 有带余除法

$$f(x,y)=g(x,y)\big(y^3-x^2\big)+h_1(y)x+h_0(y).$$

因此 $B=\{\overline{x^ny^m}:0\leqslant n\leqslant 1, m\geqslant 0\}$ 是 A 的生成元. 下证 B 是 A 的一组 k-基. 设 $\sum\limits_{n,m}a_{n,m}\overline{x^ny^m}=\overline{0}$, 则存在 $F(x,y)\in k[x,y]$, 使得

$$\sum_{n,m}a_{n,m}x^ny^m=\big(y^3-x^2\big)F(x,y).$$

在 $k[y][x]$ 中考虑上式: 若 $\mathrm{LHS}\neq 0$, 则 $\deg(\mathrm{LHS})\leqslant 1$; 若 $\mathrm{RHS}\neq 0$, 则 $\deg(\mathrm{RHS})\geqslant 2$. 因此 $\mathrm{LHS}=\mathrm{RHS}=0$, 即所有系数 $a_{n,m}=0$. 故 B 线性无关.

(2) 假设 A 为 UFD. 注意到 $\dfrac{\overline{x}}{\overline{y}}\in\mathrm{Frac}(A)$ 满足

$$\left(\frac{\overline{x}}{\overline{y}}\right)^2=\frac{\overline{x}^2}{\overline{y}^2}=\frac{\overline{y}^3}{\overline{y}^2}=\overline{y},$$

即 $\dfrac{\overline{x}}{\overline{y}}\in\mathcal{O}_{\mathrm{Frac}(A)}$. 由命题 2.5.16, UFD 是整闭环, 因此 $\dfrac{\overline{x}}{\overline{y}}\in A$. 设 $r(x,y)\in k[x,y]$ 使得 $\dfrac{\overline{x}}{\overline{y}}=\overline{r(x,y)}$, 则 $\overline{x}=\overline{y\cdot r(x,y)}$. 故存在 $q(x,y)\in k[x,y]$ 使得

$$x=y\cdot r(x,y)+\big(y^2-x^3\big)q(x,y).$$

考虑 $k[x][y]$ 在 0 处的赋值同态 ev_0, 它作用于上式便得到 $k[x]$ 中等式

$$x=-x^3\cdot q(x,0).$$

但这不可能成立. 故 A 不是 UFD.

(3) 考虑环同态

$$\theta:k[x,y]\to S$$

使得

$$\theta(x)=t^3,\quad \theta(y)=t^2.$$

下证 $\mathrm{Ker}\,\theta=\big(y^3-x^2\big)$. 显然 $\big(y^3-x^2\big)\subset\mathrm{Ker}\,\theta$, 故只需证 $\mathrm{Ker}\,\theta\subset\big(y^3-x^2\big)$. 设 $f(x,y)\in\mathrm{Ker}\,\theta$, 同 (1) 作带余除法

$$f(x,y)=g(x,y)\big(y^3-x^2\big)+h_1(y)x+h_0(y).$$

将 θ 作用于上式两端即得

$$0=h_1\big(t^2\big)\cdot t^3+h_0\big(t^2\big).$$

注意到: 若 $h_1\big(t^2\big)\cdot t^3\neq 0$, 则其次数为奇数; 若 $h_0\big(t^2\big)\neq 0$, 则其次数为偶数. 因此 $h_1\big(t^2\big)=h_0\big(t^2\big)=0$ 即 $h_1(y)=h_0(y)=0$. 故 $f(x,y)\in\big(y^3-x^2\big)$. 于是

$$\mathrm{Ker}\,\theta=\big(y^3-x^2\big).$$

又 θ 显然是满射, 由定理 2.2.20, 存在环同构

$$k[x,y]/\big(y^3-x^2\big)\simeq S. \qquad \square$$

注记 2.7.39 在 $S=k\big[t^2,t^3\big]$ 中, t^6 有两种分解:

$$t^6=t^2\cdot t^2\cdot t^2=t^3\cdot t^3.$$

由于 t^2 和 t^3 不相伴且均为 S 中不可约元, 这两种分解本质不同. 故 S 不是 UFD.

命题 2.7.40 (Eisenstein 判别法) 设 R 为 UFD, $K=\mathrm{Frac}(R)$, $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i\in R[x]$ 本原, $p\in R$ 为素元. 若 $p\mid a_{n-1},\cdots,p\mid a_1,p\mid a_0,p^2\nmid a_0$ (从而 $p\nmid a_n$), 则 $f(x)\in R[x]$ 不可约 (由命题 2.7.34, $f(x)\in K[x]$ 也不可约).

证明 设 $f(x)$ 在 $R[x]$ 中有非平凡分解 $f(x)=g(x)h(x)$, 其中

$$g(x)=b_rx^r+\cdots+b_1x+b_0,\quad h(x)=c_{n-r}x^{n-r}+\cdots+c_1x+c_0,$$

则 $r,n-r>0$. 由于 $p\mid b_0c_0$ 而 $p^2\nmid b_0c_0$, b_0 与 c_0 中恰有一个被 p 整除. 不妨设 $p\mid b_0$ 且 $p\nmid c_0$. 取最小下标 i_0 使得 $p\nmid b_{i_0}$, 则 $0<i_0\leqslant r<n$. 注意到

$$a_{i_0}=b_{i_0}c_0+b_{i_0-1}c_1+\cdots+b_0c_{i_0},$$

上式右端只有第一项 $b_{i_0}c_0$ 不被 p 整除, 因此 $p\nmid a_{i_0}$, 但 $0<i_0<n$, 矛盾. $\square$

以下用模 p 约化手法给出另证:

证明 设 $f(x)$ 在 $R[x]$ 中有非平凡分解 $f(x)=g(x)h(x)$., 其中

$$g(x)=b_rx^r+\cdots+b_1x+b_0,\quad h(x)=c_{n-r}x^{n-r}+\cdots+c_1x+c_0.$$

考虑模 p 约化

$$\begin{aligned}\pi:R[x]&\to(R/pR)[x]\\ \sum_{i=0}^{n}a_ix^i&\mapsto\sum_{i=0}^{n}\overline{a_i}x^i.\end{aligned}$$

显然 π 是环同态, 于是在 $(R/pR)[x]$ 中有

$$\overline{a_n}x^n=\pi(f(x))=\pi(g(x))\cdot\pi(h(x)).$$

由于 p 为素元, R/pR 为整环, 可取 $K'=\mathrm{Frac}(R/pR)$. 由于

$$R[x]\xrightarrow{\pi}(R/pR)[x]\xhookrightarrow{\mathrm{inc}}K'[x],$$

而 $K'[x]$ 为 UFD, 利用唯一分解性可知 $\pi(g(x))$ 与 $\pi(h(x))$ 均为单项式. 故 $\overline{b_0}=\overline{c_0}=\overline{0}$, 即 $p\mid b_0$ 且 $p\mid c_0$, 从而 $p^2\mid a_0$, 矛盾. $\square$

例 2.7.41 $x^n-2\in\mathbb{Q}[x]$ $(n\geqslant 1)$ 均不可约. 故 $\mathbb{Q}[x]$ 中存在任意次数的不可约多项式.

例 2.7.42 设 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 使得 $f\left(\sqrt[n]{2}\right) = 0$, 则 $(x^n - 2) \mid f(x)$. 特别地, $\deg(f(x)) \geqslant n$.

证明 用反证法, 假设 $(x^n - 2) \nmid f(x)$. 由 $x^n - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ 不可约, $\gcd_{\mathbb{Q}[x]}(x^n - 2, f(x)) = 1$. 由 Bézout 等式, 存在 $a(x), b(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 使得

$$a(x)(x^n - 2) + b(x)f(x) = 1.$$

将 $\sqrt[n]{2}$ 处的赋值同态作用于上式两端即得矛盾. □

例 2.7.43 视 $\mathbb{C}$ 为 $\mathbb{Q}$-线性空间, 则 $\left\{1, \sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{2^2}, \cdots, \sqrt[n]{2^{n-1}}\right\}$ 是 $\mathbb{Q}$-线性无关的.

练习 2.7.44 (1) $2x + 2$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 和 $\mathbb{Q}[x]$ 中是否为不可约元?

(2) $x^2 + 1$ 在 $\mathbb{R}[x]$ 和 $\mathbb{C}[x]$ 中是否为不可约元?

练习 2.7.45 设 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 为首一多项式, p 为素数. 考虑模 p 约化

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{Z}[x] &\to \mathbb{F}_p[x] \\ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i &\mapsto \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} x^i. \end{aligned}$$

(1) 证明: 如果对某个素数 p, $\pi(f(x))$ 在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中不可约, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中不可约.

(2) 如果 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 不是首一多项式, (1) 中的结论是否成立?

练习 2.7.46 设 R 为整环, $f(x) \in R[x]$, $c \in R$, $g(x) = f(x + c) \in R[x]$. 求证:

(1) $f(x)$ 在 $R[x]$ 中本原 $\iff$ $g(x)$ 在 $R[x]$ 中本原.

(2) $f(x)$ 在 $R[x]$ 中不可约 $\iff$ $g(x)$ 在 $R[x]$ 中不可约.

证明 由命题 2.4.13, 环嵌入 $R \xhookrightarrow{\text{inc}} R[x]$ 诱导环同态

$$\theta : R[x] \to R[x]$$

使得 $\theta|_R = \mathrm{Id}_R$ 且 $\theta(x) = x + c$. 显然 θ 可逆, 其逆映射为

$$\begin{aligned} \theta^{-1} : R[x] &\to R[x] \\ f(x) &\mapsto f(x - c). \end{aligned}$$

故 θ 是环同构. 显然 θ 保持多项式的本原性与不可约性. □

例 2.7.47 $u(x) = x^{p-1} + \cdots + x + 1 = \dfrac{x^p - 1}{x - 1} \in \mathbb{Z}[x]$ 不可约.

证明 由练习 2.7.46 (2), 等价于证明 $u(x + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ 不可约. 而

$$u(x + 1) = \frac{(x + 1)^p - 1}{x} = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i + 1} x^i,$$

由 Eisenstein 判别法, $u(x + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ 不可约. □

2.8 中国剩余定理

定义 2.8.1 设 $\{R_i : i \in I\}$ 为一族环. 其直积 $\prod\limits_{i\in I} R_i$ 中的加法和乘法运算定义为

$$(r_i)_{i\in I} + (s_i)_{i\in I} = (r_i + s_i)_{i\in I}, \quad (r_i)_{i\in I} \cdot (s_i)_{i\in I} = (r_i \cdot s_i)_{i\in I}.$$

注记 2.8.2 任两个环的直积 $R \times S$ 不是整环.

练习 2.8.3 投影同态

$$\begin{aligned} p : R \times S &\twoheadrightarrow S \\ (r, s) &\mapsto s \end{aligned}$$

诱导环同构

$$(R \times S)/(R \times \{0_S\}) \xrightarrow{\sim} S.$$

定理 2.8.4 (中国剩余定理) 设 R 为环, $I_1, \cdots, I_n$ 为 R 的理想, 且对每个 $i \neq j$ 皆有 $I_i + I_j = R$, 则环同态

$$\begin{aligned} \theta : R &\to \prod_{i=1}^{n} R/I_i \\ r &\mapsto (r + I_1, \cdots, r + I_n) \end{aligned}$$

诱导环同构

$$R/(I_1 \cap \cdots \cap I_n) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{n} R/I_i.$$

且 $I_1 \cap \cdots \cap I_n = I_1 \cdots I_n$.

证明 (1) $\operatorname{Ker}\theta = \{r \in R : r \in I_1, \cdots, r \in I_n\} = I_1 \cap \cdots \cap I_n$.

(2) 下证 θ 是满的, 即对任意 $a_1, \cdots, a_n \in R$, 同余方程组

$$\begin{cases} b \equiv a_1 \pmod{I_1} \\ b \equiv a_2 \pmod{I_2} \\ \quad \vdots \\ b \equiv a_n \pmod{I_n} \end{cases}$$

有解. 我们断言 $I_1 + I_2 \cdots I_n = R$. 由

$$\begin{aligned} R = RR = (I_1 + I_2)(I_1 + I_3) &= I_1(I_1 + I_2 + I_3) + I_2 I_3 \\ &\subset I_1 + I_2 I_3 \subset R \end{aligned}$$

知 $I_1 + I_2 I_3 = R$. 由 $I_1 + I_2 \cdots I_{n-1} = R$ 可得

$$R = RR = (I_1 + I_2 \cdots I_{n-1})(I_1 + I_n) = I_1(I_1 + I_n + I_2 \cdots I_{n-1}) + I_2 \cdots I_n$$

$$\subset I_1 + I_2 \cdots I_n \subset R,$$

故 $R = I_1 + I_2 \cdots I_n$. 由归纳法断言得证. 于是存在 $u_1 \in I_1$ 与 $b_1 \in I_2 \cdots I_n$ 使得

$$u_1 + b_1 = 1.$$

由 $I_2 \cdots I_n \subset I_2 \cap \cdots \cap I_n$ 即知 b_1 是同余方程组

$$\begin{cases} b \equiv 1 \pmod{I_1} \\ b \equiv 0 \pmod{I_2} \\ \quad \vdots \\ b \equiv 0 \pmod{I_n} \end{cases}$$

的解. 同理可求得另 $n-1$ 个同余方程组

$$\begin{cases} b \equiv 0 \pmod{I_1} \\ b \equiv 1 \pmod{I_2} \\ \quad \vdots \\ b \equiv 0 \pmod{I_n} \end{cases} \cdots \begin{cases} b \equiv 0 \pmod{I_1} \\ b \equiv 0 \pmod{I_2} \\ \quad \vdots \\ b \equiv 1 \pmod{I_n} \end{cases}$$

的解 $b_2, \cdots, b_n$. 令 $b = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$, 则 b 即最初的同余方程组的解.

(3) 由定理 2.2.20, θ 诱导环同构

$$R/(I_1 \cap \cdots \cap I_n) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{n} R/I_i.$$

由练习 2.8.6, 结合 (2) 中断言, 归纳即得 $I_1 \cap \cdots \cap I_n = I_1 \cdots I_n$. □

注记 2.8.5 $I_i + I_j = R$ 这一条件通常称为 "I_i 与 I_j 互素". 例如对 $a, b \in \mathbb{Z}$, $\gcd(a,b) = 1 \iff (a) + (b) = \mathbb{Z}$.

练习 2.8.6 设 I, J 为环 R 的理想, $I + J = R$, 则 $I \cap J = IJ$.

证明 由于 $I + J = R$, 存在 $i \in I$ 与 $j \in J$, 使得 $i + j = 1$. 任取 $a \in I \cap J$, 则有 $a = ai + aj$. 由 $a \in J$ 且 $i \in I$ 可知 $ai \in IJ$, 由 $a \in I$ 且 $j \in J$ 可知 $aj \in IJ$, 因此 $a \in IJ$, $I \cap J \subset IJ$. 又 $IJ \subset I \cap J$ 是显然的, 故 $I \cap J = IJ$. □

例 2.8.7 设 $\gcd(m,n) = 1$, 则存在环同构

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad a + mn\mathbb{Z} \mapsto (a + m\mathbb{Z}, a + n\mathbb{Z}).$$

练习 2.8.8 设 R, S 为环, 则有群同构 $U(R \times S) \simeq U(R) \times U(S)$.

例 2.8.9 由例 2.8.7 与练习 2.8.8, $\mathbb{Z}_{15} \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \implies U(\mathbb{Z}_{15}) \simeq U(\mathbb{Z}_3) \times U(\mathbb{Z}_5)$.

练习 2.8.10 设 R, S 为环, 是否一定有 $\mathrm{Aut}(R \times S) \simeq \mathrm{Aut}(R) \times \mathrm{Aut}(S)$?

解答 否. 取 $R = S = \mathbb{F}_2$. 考虑

$$\theta : R \times S \xrightarrow{\sim} R \times S$$

$$(a,b) \longmapsto (b,a)$$

则 $\theta \in \mathrm{Aut}(R \times S)$ 且 $\theta \neq \mathrm{Id}_{R\times S}$. 但 $|\mathrm{Aut}(R)| = |\mathrm{Aut}(S)| = 1$, 从而

$$|\mathrm{Aut}(R \times S)| \geqslant 2 > 1 = |\mathrm{Aut}(R) \times \mathrm{Aut}(S)|. \qquad \square$$

练习 2.8.11 设 R, S 为环, 则 $\mathrm{Spec}(R \times S) = (\mathrm{Spec}(R) \times \{S\}) \sqcup (\{R\} \times \mathrm{Spec}(S))$.

解答 任取 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R \times S)$, 令 $\mathfrak{p}_R = \pi_R(\mathfrak{p}), \mathfrak{p}_S = \pi_S(\mathfrak{p})$, 其中 π_R, π_S 分别为关于 R, S 的投影同态. 对 $r, r' \in R$, 注意到

$$\begin{tikzcd}
rr' \in \mathfrak{p}_R \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, dashed, Rightarrow] & (r,0)(r',0) \in \mathfrak{p} \arrow[d, Rightarrow] \\
r \in \mathfrak{p}_R \text{ 或 } r' \in \mathfrak{p}_R \arrow[r, Leftrightarrow] & (r,0) \in \mathfrak{p} \text{ 或 } (r',0) \in \mathfrak{p}
\end{tikzcd}$$

因此

$$\mathfrak{p}_R \in \mathrm{Spec}(R) \iff \mathfrak{p}_R \neq R,$$
$$\mathfrak{p}_S \in \mathrm{Spec}(S) \iff \mathfrak{p}_S \neq S.$$

进而

$$\mathfrak{p}_R \times S \in \mathrm{Spec}(R \times S) \iff \mathfrak{p}_R \neq R,$$
$$R \times \mathfrak{p}_S \in \mathrm{Spec}(R \times S) \iff \mathfrak{p}_S \neq S.$$

对于欲证等式, RHS $\subset$ LHS 是显然的, 只需证 LHS $\subset$ RHS. 结合前述讨论, 只需证 $\mathfrak{p}_R \neq R$ 与 $\mathfrak{p}_S \neq S$ 有且仅有一者成立.

(至多一者成立) 假设 $\mathfrak{p}_R \neq R$, 则 $1_R \notin \mathfrak{p}_R$. 任取 $s \in \mathfrak{p}_S$, 存在 $r \in R$ 使得 $(r, s) \in \mathfrak{p}$. 因

$$(r, 1_S)(1_R, s) = (r, s) \in \mathfrak{p}, \quad (1_R, s) \notin \mathfrak{p},$$

必有 $(r, 1_S) \in \mathfrak{p}$, 从而 $1_S \in \mathfrak{p}_S$, 即 $\mathfrak{p}_S = S$. 同理, 当 $\mathfrak{p}_s \neq S$ 时, 必有 $\mathfrak{p}_R = R$. 故 $\mathfrak{p}_R \neq R$ 与 $\mathfrak{p}_S \neq S$ 至多有一者成立.

(至少一者成立) 假设二者皆不成立, 即 $\mathfrak{p}_R = R$ 且 $\mathfrak{p}_S = S$, 则存在 $r \in R$ 与 $s \in S$ 使得 $(1_R, s), (r, 1_S) \in \mathfrak{p}$, 从而

$$(1_R, 1_S) = (1_R, 0_S)(1_R, s) + (0_R, 1_S)(r, 1_S) \in \mathfrak{p},$$

即 $\mathfrak{p} = R \times S$, 与 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R \times S)$ 矛盾. 故 $\mathfrak{p}_R \neq R$ 与 $\mathfrak{p}_S \neq S$ 总有一者成立. $\square$

注记 2.8.12 若采用代数几何术语, 有拓扑空间范畴中的同构 (即同胚)

$$\mathrm{Spec}(R \times S) \simeq \mathrm{Spec}(R) \sqcup \mathrm{Spec}(S),$$

这里的无交并采用定义 1.1.7 的集合论定义. 参考 `https://stacks.math.columbia.edu/tag/00ED`.

第三章 域论

3.1 域扩张与单扩张

定义 3.1.1 域扩张是指域同态 $\theta: k \hookrightarrow K$, 简记为 K/k.

注记 3.1.2 之所以选用 K/k 这一记号, 是因为 $k \simeq \theta(k) \subset K$, 我们将 k 等同于 $\theta(k)$, 而后者是 K 的子域. 于是域扩张 $\theta: k \hookrightarrow K$ 等同于包含映射 $\mathrm{inc}: \theta(k) \hookrightarrow K$. 此记号恰略去最关键的信息 θ, 见练习 3.1.4.

例 3.1.3 (域扩张的例子) (1) $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ 均是域扩张.

(2) Kronecker 添根构造: $k \hookrightarrow k[x]/(f(x))$.

(3) 考虑 $k[x]$ 的分式域 $k(x)$, 称为有理函数域. 典范嵌入 $k[x] \hookrightarrow k(x)$ 诱导域扩张

$$k \hookrightarrow k(x), \quad \lambda \mapsto \frac{\lambda}{1}.$$

练习 3.1.4 设 k 为域, 记 $F = k(t), K = k(x)$. 考虑域扩张

$$\begin{aligned} \theta: F &\hookrightarrow K \\ \frac{f(t)}{g(t)} &\mapsto \frac{f(x^2)}{g(x^2)}. \end{aligned}$$

通过 θ 将 K 视为 F-线性空间, 求 $\dim_F K$. 提示 注意到 $K = \theta(F)(x)$, 再用定理 3.1.23.

定义 3.1.5 设 $\theta: k \hookrightarrow K$ 与 $\theta': k \hookrightarrow K'$ 是两个域扩张. 称 θ 与 θ' 作为域扩张同构, 若存在域同构 $\phi: K \xrightarrow{\sim} K'$, 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dd, dashed, "\wr", "\exists\phi\text{域同构}"'] \\ k \arrow[ur, hook, "\theta"] \arrow[dr, hook, "\theta'"'] & \\ & K' \end{tikzcd}$$

若 $\theta = \theta'$, 则 θ 的自同构 $\phi: K \xrightarrow{\sim} K$ 又称为域扩张 K/k 的自同构.

注记 3.1.6 (1) 后文中练习 3.1.22 有助于体会 $\phi \circ \theta = \theta'$ 这一条件.

(2) θ 的自同构 ϕ 满足 $\phi \circ \theta = \theta$, 即 $\phi|_{\theta(k)} = \mathrm{Id}_{\theta(k)}$.

练习 3.1.7 在定义 3.1.5 中, $\phi: K \to K'$ 是 k-线性空间同构, 从而 $\dim_k K = \dim_k K'$.

注记 3.1.8 $\mathrm{Aut}(K/k) := \{\theta \text{ 的自同构}\} \leqslant \mathrm{Aut}(K)$ 为子群. 由练习 3.1.7 可见, "可视为线性同构" 是域扩张的自同构与一般的域自同构的一大区别.

定义 3.1.9 设 $\theta: R \hookrightarrow S$ 为环的单同态, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in S$.

(1) 定义 R 与 α 生成的子环为 S 中包含 $\theta(R)$ 及 α 的最小子环, 记为

$$R[\alpha] = \left\{\text{有限和} \sum \theta(r_i)\alpha^i : r_i \in R\right\}.$$

(2) 记 S 中包含 $\theta(R)$ 及 α_1, α_2 的最小子环为

$$R[\alpha_1, \alpha_2] = \left\{\text{有限和} \sum \theta(r_{ij})\alpha_1^i\alpha_2^j : r_{ij} \in R\right\}.$$

注记 3.1.10 (1) 由命题 2.4.13, 环嵌入 $R \xhookrightarrow{\text{inc}} S$ 诱导环同态

$$\widetilde{\psi}: R[x] \to S$$

使得 $\widetilde{\psi}\big|_R = \mathrm{Id}_R$ 且 $\theta(x) = \alpha$. 此时 $\mathrm{Im}\,\widetilde{\psi} = R[\alpha]$.

(2) $R[\alpha_1, \alpha_2] = R[\alpha_1][\alpha_2] = R[\alpha_2][\alpha_1]$.

例 3.1.11 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \subset \mathbb{C}$.

定义 3.1.12 设 $\theta: k \hookrightarrow K$ 为域同态, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in K$.

(1) 记 K 中包含 $\theta(k)$ 及 α 的最小子域为

$$k(\alpha) = \left\{\frac{\sum \theta(r_i)\alpha^i}{\sum \theta(r_j')\alpha^j} : r_i, r_j' \in k, \sum \theta(r_j')\alpha^j \neq 0_K\right\}.$$

(2) 记 K 中包含 $\theta(k)$ 及 α_1, α_2 的最小子域为

$$k(\alpha_1, \alpha_2) = \left\{\frac{\sum \theta(r_{ij})\alpha_1^i\alpha_2^j}{\sum \theta(r_{ij}')\alpha_1^i\alpha_2^j} : r_{ij}, r_{ij}' \in k, \sum \theta(r_{ij}')\alpha_1^i\alpha_2^j \neq 0_K\right\}$$

注记 3.1.13 (1) 一般而言, $k(\alpha)$ 与 $k[x]$ 无关.

(2) $k[\alpha] \subset k(\alpha)$.

(3) 有如下交换图表:

$$\begin{tikzcd} k \arrow[rr, hook, "\theta"] \arrow[dr, hook] & & K \\ & k(\alpha) \arrow[ur, hook, "\text{inc}"'] & \end{tikzcd}$$

(4) $k(\alpha_1, \alpha_2) = k(\alpha_1)(\alpha_2) = k(\alpha_2)(\alpha_1)$.

例 3.1.14 $\mathbb{Q}(\mathrm{i}) \subset \mathbb{C}$.

定义 3.1.15 称域扩张 K/k 为单扩张, 若存在 $\alpha \in K$ 使得 $K = k(\alpha)$.

例 3.1.16 (1) Kronecker 添根构造：$k \hookrightarrow k[x]/(f(x))$, $K = k(u) = k[u]$.

(2) 有理函数域 $k \subset k(x)$：$k[x] \subsetneq k(x)$.

(3) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\mathrm{i}) = \mathbb{Q}[\mathrm{i}]$.

(4) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$：$\mathbb{C} = \mathbb{R}(\mathrm{i}) = \mathbb{R}[\mathrm{i}]$.

定义 3.1.17 考虑域扩张 K/k 及 $\alpha \in K$. 称 α 为 k 上代数元, 若存在非零多项式 $f(x) \in k[x]$ 使得 $f(\alpha) = 0_K$. 否则, 称 α 为 k 上超越元.

例 3.1.18 考虑域扩张 $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$, 则 $\sqrt{2}, \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$ 均为 ($\mathbb{Q}$ 上) 代数元; π, e 均为 ($\mathbb{Q}$ 上) 超越元.

定理 3.1.19 考虑域扩张 K/k 以及 $\alpha \in K$ 在 k 上代数, 则唯一存在首一不可约多项式 $f(x) \in k[x]$ 满足：

(1) $f(\alpha) = 0$.

(2) 若 $g(x) \in k[x]$ 满足 $g(\alpha) = 0$, 则 $f(x) \mid g(x)$.

这样的多项式 $f(x)$ 称为 α 关于 k 的最小多项式.

证明 考虑在 α 处的赋值同态

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_\alpha : k[x] &\to K \\ g(x) &\mapsto g(\alpha), \end{aligned}$$

由 $k[x]$ 是 PID, 设其核 $\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_\alpha) = (f(x))$, 其中 $f(x) \in k[x]$. 由定理 2.2.20, 存在环同构

$$k[x]/(f(x)) \xrightarrow{\sim} k[\alpha].$$

由于 $k[\alpha] \subset K$ 为整环, $f(x) \in k[x]$ 为素元, 即 $f(x) \in k[x]$ 为不可约多项式. □

注记 3.1.20 由命题 2.4.31, $k[x]/(f(x))$ 为域, 因此 $k[\alpha] \subset K$ 为子域, 即 $k[\alpha] = k(\alpha)$. 这可用来解释例 3.1.16 中 (1)(3)(4) 与 (2) 的不同, 即在于 α 是否为 k 上代数元.

例 3.1.21 关于域扩张 $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$, $\sqrt[3]{2}$ 的最小多项式为 $x^3 - 2$, $\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$ 的最小多项式为 $x^2 + x + 1$.

练习 3.1.22 考虑域扩张 $\theta : k \to K$ 与 $\theta' : k \to K'$, $\alpha \in K$. 若存在域扩张的同构 $\phi : K \to K'$, 则

(1) α 在 k 上代数 $\iff$ $\phi(\alpha)$ 在 k 上代数.

(2) 若 α 在 k 上代数, 则 α 和 $\phi(\alpha)$ 的最小多项式相同.

定理 3.1.23 (单扩张的结构定理) 设有单扩张 K/k 与 $\alpha \in K$ 使得 $K = k(\alpha)$.

(1) 若 α 在 k 上代数, 最小多项式为 $f(x)$, $\deg(f(x)) = d$, 则

- ⋄ $\dim_k K = d < \infty$.
- ⋄ $\{1, \alpha, \cdots, \alpha^{d-1}\}$ 是 K 的一组 k-基, 且 $K = k[\alpha]$.
- ⋄ 有域扩张同构 $K \simeq k[x]/(f(x))$.

(2) 若 α 在 k 上超越, 则

- ⋄ $\dim_k K = \infty$.

- $k[\alpha] \subsetneq K$.
- 有域扩张同构 $K \simeq k(x)$.

提示 考虑赋值同态 ev_α：若 α 代数, 用定理 2.2.20; 若 α 超越, 用定理 2.3.4.

注记 3.1.24 本质上仅有两种单扩张, 我们主要研究有限维域扩张.

例 3.1.25 (1) 考虑 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$. 则 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ 有 $\mathbb{Q}$-基 $\left\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right\}$, 且存在域同构

$$\mathbb{Q}[x]/(x^3-2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$$

使得 $u = x + \left(x^3-2\right) \mapsto \sqrt[3]{2}$ 且它在 $\mathbb{Q}$ 上为恒等映射.

(2) 考虑 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega)/\mathbb{Q}$. 则 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega)$ 有 $\mathbb{Q}$-基 $\left\{1, \sqrt[3]{2}\omega, \sqrt[3]{4}\omega^2\right\}$, 且存在域同构

$$\mathbb{Q}[x]/(x^3-2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega)$$

使得 $u = x + \left(x^3-2\right) \mapsto \sqrt[3]{2}\omega$ 且它在 $\mathbb{Q}$ 上为恒等映射.

注记 3.1.26 作为 $\mathbb{C}$ 的子域, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \neq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega)$. 但由例 3.1.25 可得交换图表

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) & \sqrt[3]{2} & \lambda \\
\mathbb{Q} \arrow[ur, hook, "\mathrm{inc}"] \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook, "\mathrm{inc}"'] & \mathbb{Q}[x]/\left(x^3-2\right) \arrow[u, "\wr"'] \arrow[d, "\wr"] & u \arrow[u, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \lambda \in \mathbb{Q} \arrow[u, mapsto] \arrow[d, mapsto] \\
 & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega) & \sqrt[3]{2}\omega & \lambda
\end{tikzcd}$$

于是域扩张 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ 同构于 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega)/\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega), \quad a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mapsto a + b\sqrt[3]{2}\omega + c\sqrt[3]{4}\omega^2.$$

应用于 $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ 的证明 用反证法, 设

$$\sqrt[3]{3} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}, \quad a, b, c \in \mathbb{Q},$$

即

$$3 = \left(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}\right)^3, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

由注记 3.1.26, 域扩张 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ 同构于 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega)/\mathbb{Q}$, 因此

$$\left(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}\right)^3 = 3 = \left(a + b\sqrt[3]{2}\omega + c\sqrt[3]{4}\omega^2\right)^3,$$

从而

$$a + b\sqrt[3]{2}\omega + c\sqrt[3]{4}\omega^2 = \left(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}\right)\omega^k,$$

其中 $k = 0$ 或 1 或 2. 利用 $\omega^2 = -\omega - 1$ 化简可得:

- 若 $k = 0$, 则 $\left(b\sqrt[3]{2} - c\sqrt[3]{4}\right)\omega = b\sqrt[3]{2} + 2c\sqrt[3]{4}$, 易知与 $\omega \notin \mathbb{R}$ 矛盾.

- $\diamond$ 若 $k=1$, 则 $c\sqrt[3]{4}\omega=a$, 易知与 $\omega\notin\mathbb{R}$ 矛盾.
- $\diamond$ 若 $k=2$, 则 $\left(a+2b\sqrt[3]{2}\right)\omega+2a+b\sqrt[3]{2}=0$, 易知与 $\omega\notin\mathbb{R}$ 矛盾.

故假设不成立, $\sqrt[3]{3}\notin\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

定义 3.1.27 定义域扩张 K/k 的次数为 $[K:k]\coloneqq\dim_k K$.

练习 3.1.28 设 F/K 为域扩张, $u\in F$ 是 K 上奇次代数元. 求证 $K(u)=K(u^2)$.

练习 3.1.29 给出域扩张 F/K 的例子, 使得 $F=K(u,v)$, u 和 v 均是 K 上超越元, 但 $F\not\simeq K(x_1,x_2)$.

解答 $K=\mathbb{Q}$, $u=\pi$, $v=\sqrt{\pi}$, u 和 v 在 K 上超越, 但 $F=K(\pi,\sqrt{\pi})=\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})\simeq\mathbb{Q}(t)\not\simeq\mathbb{Q}(x_1,x_2)$. □

练习 3.1.30 设 p 为素数, 分别求扩张 $\mathbb{Q}(\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{p}})/\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{Q}(\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{8}})/\mathbb{Q}$ 的次数. 提示 $p-1$ 和 4.

练习 3.1.31 求元素 a 在域 K 上的最小多项式, 其中

(1) $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $K=\mathbb{Q}$. 提示 x^4-10x^2+1.

(2) $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. 提示 $x^2-2\sqrt{2}x-1$.

(3) $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{6})$. 提示 $x^2-(5+2\sqrt{6})$.

解答 (1) $f(x)=x^4-10x^2+1\in\mathbb{Q}[x]$ 零化 a. 下证 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 不可约. 令

$$r_1=\sqrt{2}+\sqrt{3},\quad r_2=\sqrt{2}-\sqrt{3},\quad r_3=\sqrt{3}-\sqrt{2},\quad r_4=-\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$

由 $f(x)=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)$, $r_i\notin\mathbb{Q}$, 且对任意 $i\neq j$, 均有 $(x-r_i)(x-r_j)\notin\mathbb{Q}[x]$ 可知 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 不可约.

(2) $f(x)=\left(x-\sqrt{2}\right)^2-3=x^2-2\sqrt{2}x-1\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ 零化 a. 下证 $f(x)\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ 不可约. 否则, $a\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, 考虑域扩张塔 $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})\subset\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. 由 (1) 知 $\left[\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}):\mathbb{Q}\right]=4$, 这与 $\left[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}\right]=2$ 矛盾.

(3) $f(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=x^2-(5+2\sqrt{6})\in\mathbb{Q}(\sqrt{6})[x]$ 零化 a. 下证 $f(x)\in\mathbb{Q}(\sqrt{6})[x]$ 不可约. 否则, $a\in\mathbb{Q}(\sqrt{6})$, 考虑域扩张塔 $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})\subset\mathbb{Q}(\sqrt{6})$. 由 Eisenstein 判别法知 $x^2-6\in\mathbb{Q}[x]$ 不可约, 因此 $\left[\mathbb{Q}(\sqrt{6}):\mathbb{Q}\right]=2$. 由 (1) 知 $\left[\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}):\mathbb{Q}\right]=4>2$, 矛盾. □

3.2 域的代数扩张

定义 3.2.1 域扩张 K/k 称为代数扩张, 若任何 $\alpha\in K$ 均在 k 上代数.

例 3.2.2 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 不是代数扩张, 例如 π 与 e 均为 ($\mathbb{Q}$ 上) 超越元.

引理 3.2.3 有限维域扩张总是代数扩张, 即若 $\dim_k K<\infty$, 则 K/k 代数.

证明 对任意 $\alpha\in K$, $k(\alpha)$ 是 K 的 k-线性子空间, 因此 $\dim_k k(\alpha)<\infty$. 由定理 3.1.23, α 是 k 上代数元. □

由线性代数可得另证:

证明 对任意 $\alpha\in K$, $\{1,\alpha,\alpha^2,\cdots\}$ 是 k-线性相关的, 即存在 k 上多项式零化 α. □

定理 3.2.4 (维数公式) 考虑域扩张塔 $k \subset E \subset K$. 若 E/k 与 K/E 均为有限维域扩张, 则 K/k 亦为有限维域扩张, 且其次数具有塔性质:

$$[K:k] = [E:k][K:E].$$

提示 若 $(x_i)_{i\in I}$ 和 $(y_j)_{j\in J}$ 分别是 K 在 E 上和 E 在 k 上的一组基, 则 $(x_iy_j)_{(i,j)\in I\times J}$ 是 K 在 k 上的一组基.

例 3.2.5 设 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. 考虑域扩张 $K/\mathbb{Q}$, 求 $[K:\mathbb{Q}]$.

解答 考虑域扩张塔 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset K$, 由定理 3.2.4,

$$[K:\mathbb{Q}] = \left[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}\right]\left[K : \mathbb{Q}(\sqrt{2})\right].$$

由例 2.7.41, $\left[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}\right] = 2$. 由 $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 知 $x^2 - 3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ 不可约, 因此 $\left[K : \mathbb{Q}(\sqrt{2})\right] = 2$. 故 $[K:\mathbb{Q}] = 4$. □

$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的证明 设 $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$, 其中 $a, b \in \mathbb{Q}$, 两边平方得

$$3 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2},$$

因此 $ab = 0$. 但不论 $a = 0$ 或 $b = 0$ 均矛盾.

注记 3.2.6 从 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的 $\mathbb{Q}$-基 $\left\{1, \sqrt{2}\right\}$ 和 K 的 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-基 $\left\{1, \sqrt{3}\right\}$ 可得 K 的 $\mathbb{Q}$-基 $\left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\right\}$.

例 3.2.7 设 $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$. 考虑域扩张 $K/\mathbb{Q}$, 求 $[K:\mathbb{Q}]$.

解答 考虑域扩张塔 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset K$, 由定理 3.2.4,

$$[K:\mathbb{Q}] = \left[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}\right]\left[K : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\right].$$

由例 2.7.41, $\left[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}\right] = 3$. 由于 $x^2+x+1 = (x-\omega)(x-\omega^2)$ 零化 ω, 且其在 $\mathbb{C}$ 上的根 $\omega, \omega^2 \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, x^2+x+1 在 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ 上不可约, 因此 $\left[K : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\right] = 2$. 故 $[K:\mathbb{Q}] = 6$. 从 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ 的 $\mathbb{Q}$-基 $\left\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right\}$ 和 K 的 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$-基 $\{1, \omega\}$ 可得 K 的 $\mathbb{Q}$-基 $\left\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, \omega, \sqrt[3]{2}\omega, \sqrt[3]{4}\omega\right\}$. □

练习 3.2.8 求 $\sqrt[3]{2}$ 在 $\mathbb{Q}(\omega)$ 上的最小多项式.

解答 假设 $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}(\omega)$, 则有域扩张塔 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{Q}(\omega)$. 由定理 3.2.4,

$$2 = [\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = \left[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\right]\left[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}\right] \geqslant 3,$$

矛盾. 故 $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\omega, \sqrt[3]{2}\omega^2 \notin \mathbb{Q}(\omega)$ 即 $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}(\omega)[x]$ 不可约. 因此 $x^3 - 2$ 为 $\sqrt[3]{2}$ 在 $\mathbb{Q}(\omega)$ 上的最小多项式. □

练习 3.2.9 设 K/k 为有限维域扩张, $\alpha \in K$ 的最小多项式 $f(x) \in k[x]$, 则 $\deg(f(x)) \mid [K:k]$.

定义 3.2.10 考虑域扩张 K/k. 若一族 K 中的元素 $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ 满足 $k(\alpha_i : i \in I) = K$, 则称 $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ 是 K/k 的生成元集. 具有有限生成集 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 的扩张称为有限生成扩张, 此时有域扩张塔

$$k \subset k(\alpha_1) \subset k(\alpha_1, \alpha_2) \subset \cdots \subset K.$$

定理 3.2.11 域扩张 K/k 是有限维的 $\iff$ K/k 是有限生成的代数扩张.

命题 3.2.12 考虑域扩张塔 $k \subset E \subset K$, 则 K/k 代数 $\iff$ K/E 和 E/k 均代数.

证明 $(\Rightarrow)$ 由 K/k 代数,

- ⋄ 对任意 $\alpha \in K$, 存在 $f(x) \subset k[x] \subset E[x]$ 使得 $f(\alpha) = 0_K$, 因此 K/E 代数.
- ⋄ 对任意 $\beta \in E \subset K$, 存在 $g(x) \subset k[x]$ 使得 $g(\beta) = 0_E$, 因此 E/k 代数.

$(\Leftarrow)$ 对任意 $\alpha \in K$, 由 K/E 代数, 存在 $u_0, u_1, \cdots, u_{n-1} \in E$, 使得

$$\alpha^n + u_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + u_1\alpha + u_0 = 0_K.$$

因此 α 在 $k(u_0, u_1, \cdots, u_{n-1})$ 上代数. 由定理 3.1.23,

$$[k(u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}, \alpha) : k(u_0, u_1, \cdots, u_{n-1})] < \infty.$$

又 $k(u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}) \subset E$, E/k 代数, $k(u_0, u_1, \cdots, u_{n-1})/k$ 是有限生成的代数扩张. 由定理 3.2.11,

$$[k(u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}) : k] < \infty.$$

由定理 3.2.4 即得

$$[k(u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}, \alpha) : k] < \infty.$$

而 $k \subset k(\alpha) \subset k(u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}, \alpha)$, 故 $[k(\alpha) : k] < \infty$. 再由定理 3.1.23, α 在 k 上代数. 故 K/k 代数. □

定义–定理 3.2.13 考虑域扩张 K/k. 定义 $E = \{\alpha \in K : \alpha \text{ 在 } k \text{ 上代数}\}$, 则 $E \subset K$ 为子域, 它称为 k 在 K 中的代数闭包.

证明 对任意 $\alpha, \beta \in K$, 考虑域扩张塔 $k \subset k(\alpha) \subset k(\alpha, \beta)$. 由 α, β 在 k 上代数,

$$[k(\alpha) : k] < \infty, \quad [k(\alpha, \beta) : k(\alpha)] < \infty.$$

由定理 3.2.4, $[k(\alpha, \beta) : k] < \infty$. 再由定理 3.2.11, $k(\alpha, \beta)/k$ 是有限生成的代数扩张. 特别地, $\alpha \pm \beta, \alpha \cdot \beta \in k(\alpha, \beta)$ 均在 k 上代数; 若 $\beta \neq 0_K$, $\beta^{-1} \in k(\alpha, \beta)$ 亦在 k 上代数. □

练习 3.2.14 考虑域扩张 K/k. 若 $\beta \in K$ 关于 k 的最小多项式为 $f(x)$, $\deg(f(x)) = d$, 则 β^{-1} 的最小多项式为 $x^d \cdot f(\frac{1}{x})$.

练习 3.2.15 在定义-定理 3.2.13 中, 若 $E \subsetneq K$, 任取 $u \in K \setminus E$, 则 u 在 E 上超越.

定义 3.2.16 域 K 称为代数闭域, 若它没有非平凡的代数扩张, 亦即: E/K 为代数扩张 $\iff$ $[E : K] = 1$ $(E = K)$.

命题 3.2.17 域 K 是代数闭域当且仅当 $K[x]$ 中任意不可约多项式均为一次的.

命题 3.2.18 域 K 是代数闭域当且仅当 $K[x]$ 中每个非常值多项式完全分裂, 亦即有一次因子.

练习 3.2.19 若域 K 是代数闭域, 则 K 必为无限域.

证明 假设 $|K| < \infty$. 考虑 $f(x) = \prod_{\lambda \in K} (x - \lambda) + 1_K \in K[x]$, 则 $f(x)$ 在 K 上无根. 由命题 3.2.18 即得矛盾. 故 K 为无限域. □

定理 3.2.20 (代数基本定理) $\mathbb{C}$ 是代数闭域.

练习 3.2.21 记 $\overline{\mathbb{Q}}$ 为 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{C}$ 中的代数闭包, 则 $\overline{\mathbb{Q}}$ 是代数闭域.

证明 任取 $f(x) \in \overline{\mathbb{Q}}[x]$, 由定理 3.2.20 与命题 3.2.18, 设 $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i)$, 其中 $\lambda_i \in \mathbb{C}$. 记 K 为 $\overline{\mathbb{Q}}$ 在 $\mathbb{C}$ 中的代数闭包, 则由 $f(x) \in \overline{\mathbb{Q}}[x]$ 知 $\lambda_i \in K$. 由于 $K/\overline{\mathbb{Q}}$ 与 $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ 均为代数扩张, 根据命题 3.2.12, $K/\mathbb{Q}$ 为代数扩张, 即 $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$. 故 $\lambda_i \in \overline{\mathbb{Q}}$, 再由命题 3.2.18 即知 $\overline{\mathbb{Q}}$ 是代数闭域. □

注记 3.2.22 $\overline{\mathbb{Q}}$ 为可数域, 其中的元素称为代数数.

定理 3.2.23 对任意域 k, 均存在 (同构意义下) 唯一的代数扩张 $k \hookrightarrow \overline{k}$ 使得 $\overline{k}$ 为代数闭域. 这样的 $\overline{k}$ 称为 k 的代数闭包.

例 3.2.24 $\mathbb{C}$ 为 $\mathbb{R}$ 的代数闭包, 练习 3.2.21 中 $\overline{\mathbb{Q}}$ 为 $\mathbb{Q}$ 的代数闭包.

练习 3.2.25 设 u 是域 K 的某扩域中的元素, 且 $x^n - a$ 是 u 在 K 上的最小多项式. 对于 $m \mid n$, 求 u^m 在域 K 上的最小多项式.

练习 3.2.26 设 u 是多项式 $x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ 的一个实根.

(1) 求证 $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 3$.

(2) 试将 $u^4, (u+1)^{-1}, \left(u^2 - 6u + 8\right)^{-1}$ 表示成 $1, u, u^2$ 的 $\mathbb{Q}$-线性组合.

练习 3.2.27 设 $u = \dfrac{x^3}{x+1}$, 求 $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}(u)]$. 提示 $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}(u)] = 3$.

练习 3.2.28 设 M/K 为域扩张, M 中元素 u, v 分别是 K 上的 m 次和 n 次代数元, $F = K(u), E = K(v)$.

(1) 求证 $[FE : K] \leqslant mn$.

(2) 若 $\gcd(m, n) = 1$, 则 $[FE : K] = mn$.

我们可以将上面的练习 3.1.4 与练习 3.2.27 推广为如下命题.

命题 3.2.29 设 k 为域, $u \in k(x) \setminus k$, 则 u 在 k 上超越, x 在 $k(u)$ 上代数, 且 $[k(x) : k(u)] = \deg(u)$, 这里 $\deg(u)$ 定义为 u 的既约表达中分子、分母次数的较高者.

证明 由命题 2.7.7, 可设 $u(x) = \dfrac{a(x)}{b(x)}$, 其中 $a(x), b(x) \in k[x]$ 互素. 则 $a(t) - b(t)u \in k(u)[t]$ 有根 x, 从而 x 在 $k(u)$ 上代数. 进而 u 在 k 上超越, 否则 $k \hookrightarrow k(u) \hookrightarrow k(x)$ 是代数扩张的复合, 由命题 3.2.12, $k(x)/k$ 亦为代数扩张, 矛盾. 由于 u 在 k 上超越, 由命题 2.4.13 易知

$$k[y, t] \simeq k[u, t], \quad y \leftrightarrow u, \quad t \leftrightarrow t.$$

由于 $a(t) - b(t)y \in k[y, t]$ 显然不可约, 因此 $a(t) - b(t)u \in k[u, t]$ 亦不可约, 再由命题 2.7.34 知 $a(t) - b(t)u \in k(u)[t]$ 不可约, 而 x 是它的根, 因此 (在至多相差常数倍的意义下) 它是 x 在 $k(u)$ 上的最小多项式, 其次数为 $\deg(u)$. □

3.3 分裂域

引理 3.3.1 (关键引理) 考虑下图

$$\begin{tikzcd} \alpha \in E & & E' \\ k \arrow[u, "\text{域扩张}"] \arrow[rr, "\sigma\text{域同构}", "\sim"'] & & k' \arrow[u, "\text{域扩张}"'] \end{tikzcd}$$

设 α 关于 k 的最小多项式为 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in k[x]$. 令 $\sigma(f) = x^n + \sigma(a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + \sigma(a_0) \in k'[x]$. 则

(1) 若 $\beta \in \mathrm{Root}_{E'}(\sigma(f))$, 则唯一存在 σ 的延拓

$$\widetilde{\sigma} : k(\alpha) \xrightarrow{\sim} k'(\beta)$$

满足 $\widetilde{\sigma}(\alpha) = \beta$.

(2) 恰有 $|\mathrm{Root}_{E'}(\sigma(f))|$ 个这样的延拓 $\widetilde{\sigma} : k(\alpha) \hookrightarrow E'$.

证明 (1) 设存在 $\beta \in \mathrm{Root}_{E'}(\sigma(f))$.

① 先证明 $\widetilde{\sigma}$ 的至多唯一性. 设 $\deg(f(x)) = d$. 由定理 3.1.23, $\{1, \alpha, \cdots, \alpha^{d-1}\}$ 是 $k(\alpha)$ 的一组 k-基, 而 $\widetilde{\sigma}(\alpha) = \beta$, 且对任意 $\lambda \in k$, $\widetilde{\sigma}(\lambda) = \sigma(\lambda)$.

② 再验证如上 $\widetilde{\sigma} : k(\alpha) \to k'(\beta)$ 满足要求. 由 σ 是域同构知 $\sigma(f) \in k'[x]$ 是首一不可约多项式, 又 $\beta \in \mathrm{Root}_{E'}(\sigma(f))$, 因此 $\sigma(f)$ 是 β 关于 k' 的最小多项式. 又域同构 $\sigma : k \xrightarrow{\sim} k'$ 自然诱导环同构 $k[x] \xrightarrow{\sim} k'[x]$ (仍用 σ 标识), 它使得 $(f(x)) \xrightarrow{\sigma} (\sigma(f(x)))$. 由练习 2.6.16, 有环同构 $k[x]/(f(x)) \xrightarrow{\sim} k'[x]/(\sigma(f(x)))$. 再结合定理 3.1.23 即可得到如下图表:

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[d, dashed, mapsto] & \in & k(\alpha) \arrow[d, dashed, "\wr" ', "\widetilde{\sigma}"] & k[x]/(f(x)) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "\wr"] & \ni & \overline{x} \arrow[d, mapsto] \arrow[lllll, mapsto, bend right] \\ \beta & \in & k'(\beta) & k'[x]/(\sigma(f(x))) \arrow[l, "\sim"'] & \ni & \overline{x} \arrow[lllll, mapsto, bend left] \end{tikzcd}$$

由此图表显见欲求 $\widetilde{\sigma}$ (即虚线箭头) 的存在性.

(2) 设 $\delta : k(\alpha) \hookrightarrow E'$ 为 (1) 中所述的延拓:

$$\begin{tikzcd} k(\alpha) \arrow[r, hook, "\delta"] & E' \\ k \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sigma", "\sim"'] & k' \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

将 δ 作用在等式

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0 = 0_{k(\alpha)}$$

两端即得

$$\delta(\alpha)^n + \sigma(a_{n-1})\delta(\alpha)^{n-1} + \cdots + \sigma(a_0) = 0_{E'},$$

即 $\delta(\alpha) \in \mathrm{Root}_{E'}(\sigma(f))$. 再由 (1) 即得证. $\square$

注记 3.3.2 由定理 3.1.23, 当 $\beta \in \mathrm{Root}_{E'}(\sigma(f))$ 时, 有如下图表:

$$\begin{tikzcd}
 & \alpha \in E & E' \ni \beta & \\
k[x]/(f(x)) & k(\alpha) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed, "\exists!\sigma\text{域同构}", "\alpha\mapsto\beta"'] & k'(\beta) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sim"] & k'[x]/(\sigma(f(x))) \\
 & k \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sigma", "\sim"'] & k' \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd}$$

定义 3.3.3 设 k 为域, 非常值多项式 $f(x) \in k[x]$ 的分裂域是指域扩张 E/k 满足:

(1) $f(x)$ 在 E 上分裂: $f(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$, $\alpha_i \in E$.

(2) $E = k(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$.

注记 3.3.4 由每个 α_i 均被 $f(x) \in k[x]$ 零化知它们在 k 上代数, 再由定理 3.1.23 知域扩张塔 $k \subset k(\alpha_1) \subset k(\alpha_1, \alpha_2) \subset \cdots \subset E$ 中相邻扩张均是有限维的. 由定理 3.2.4 得 $[E:k] < \infty$.

定理 3.3.5 设 k 为域, 则非常值多项式 $f(x) \in k[x]$ 在 k 上的分裂域总是存在的.

证明 (1) 先证明存在域扩张 K/k 使得 $f(x)$ 在 K 上完全分裂. 提示 添根构造.

(2) 由 (1), 设 $f(x) = (x-\beta_1)\cdots(x-\beta_n)$, $\beta_i \in K$. 取 $E = k(\beta_1, \cdots, \beta_n) \subset K$, 则 E/k 为分裂域. $\square$

例 3.3.6 设 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, 由定理 3.2.20,

$$f(x) = (x-z_1)\cdots(x-z_n), \quad z_i \in \mathbb{C}.$$

则 $E = \mathbb{Q}(z_1, \cdots, z_n)$ 为 $f(x)$ 的分裂域.

例 3.3.7 $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ 的分裂域为 $E = \mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\omega, \sqrt[3]{2}\omega^2\big) = \mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{2}, \omega\big)$.

例 3.3.8 $\big(x^2-2\big)\big(x^2-3\big) \in \mathbb{Q}[x]$ 的分裂域为 $E = \mathbb{Q}\big(\sqrt{2}, \sqrt{3}\big)$.

例 3.3.9 $x^2 + x + \bar{1} \in \mathbb{F}_2[x]$ 的分裂域为 $\mathbb{F}_2\big(u, u+\bar{1}\big) = \mathbb{F}_4$.

定义 3.3.10 设 E/k 为 $f(x) \in k[x]$ 的分裂域, 称 $\mathrm{Gal}(E/k) := \mathrm{Aut}(E/k) = \{\delta \in \mathrm{Aut}(E) : \delta|_k = \mathrm{Id}_k\}$ 为 E/k 的 Galois 群 (或方程 $f(x) = 0$ 的 Galois 群 $\mathrm{Gal}_k(f)$).

注记 3.3.11 由下面的定理 3.3.13, Galois 群的定义不依赖于域扩张 E/k 的选取.

命题 3.3.12 任取 $\alpha \in \mathrm{Root}_E(f(x))$ 与 $\sigma \in \mathrm{Gal}_k(f)$, 则 $\sigma(\alpha) \in \mathrm{Root}_E(f(x))$.

定理 3.3.13 给定域同构 $\sigma : k \xrightarrow{\sim} k'$, $f(x) \in k[x]$ 及相应的 $\sigma(f(x)) \in k'[x]$. 取 E/k 为 $f(x)$ 的一个分裂域, E'/k' 为 $\sigma(f(x))$ 的一个分裂域. 则 σ 可延拓为域同构

$$\delta : E \xrightarrow{\sim} E'.$$

这样的域同构 δ 至多有 $[E:k] = [E':k']$ 个.

证明 对 $[E:k]$ 归纳. 若 $[E:k]=1$, 则 $E=k$. 因此 $f(x)$ 在 k 上完全分裂, $\sigma(f(x))$ 在 k' 上完全分裂, $E'=k'$. 此时 σ 自身即为所求 δ (自然个数为 1). 现设 $[E:k]<N$ 时结论成立, 考虑 $[E:k]=N\geqslant 2$ 的情形. 设 $f(x)$ 在 E 上完全分裂为

$$f(x)=(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n),\quad \alpha_i\in E.$$

由于 $[E:k]>1$, 不妨设 $\alpha_1\notin k$. 设 α_1 关于 k 的最小多项式为 $g(x)$, 则 $\deg(g(x))\geqslant 2$ 且 $g(x)\mid f(x)$, 进而 $\sigma(g(x))\mid\sigma(f(x))$. 由 $\sigma(f(x))$ 在 E' 上完全分裂即知 $\sigma(g(x))$ 亦在 E' 上完全分裂. 于是可取 $\beta_1\in\mathrm{Root}_{E'}(\sigma(g(x)))$. 由引理 3.3.1, 唯一存在 σ 的延拓 $\widetilde{\sigma}:k(\alpha_1)\xrightarrow{\sim}k'(\beta_1)$ 满足 $\widetilde{\sigma}(\alpha_1)=\beta_1$. 由分裂域的定义可知 $E/k(\alpha_1)$ 是 $f(x)\in k(\alpha_1)[x]$ 的分裂域, $E/k'(\beta_1)$ 是 $\sigma(f(x))\in k'(\beta_1)[x]$ 的分裂域. 由定理 3.2.4,

$$[E:k(\alpha_1)]=\frac{[E:k]}{[k(\alpha_1):k]}<[E:k].$$

由归纳假设, 存在域同构 $\delta:E\xrightarrow{\sim}E'$ 延拓 $\widetilde{\sigma}$, 且这样的域同构至多有 $[E:k(\alpha_1)]$ 个. 而由引理 3.3.1, 恰有 $|\mathrm{Root}_{E'}(\sigma(g(x)))|$ 个 $\widetilde{\sigma}:k(\alpha_1)\xrightarrow{\sim}k'(\beta_1)$. 于是这样的 δ 的个数为

$$[E:k(\alpha_1)]\cdot\underbrace{|\mathrm{Root}_{E'}(\sigma(g(x)))|}_{\leqslant\deg(g(x))=[k(\alpha_1):k]}\leqslant[E:k(\alpha_1)][k(\alpha_1):k]\xlongequal{\text{定理 3.2.4}}[E:k].$$

□

推论 3.3.14 在定理 3.3.13 中取 $\delta=\mathrm{Id}_k$ (从而 $k'=k$, $\sigma(f(x))=f(x)$), 可得

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, dashed, "\exists\delta\text{域同构}", "\sim"'] & E' \\ k \arrow[u, hook] \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}_k"] & k \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

(1) **(分裂域的唯一性)** 分裂域在域扩张同构的意义下唯一.

(2) $|\mathrm{Gal}_k(f)|\coloneqq|\mathrm{Aut}(E/k)|\leqslant[E:k]$.

例 3.3.15 考虑 $f(x)=x^3-2\in\mathbb{Q}[x]$, 由例 3.3.7, 其分裂域 $E=\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{2},\omega\big)$, 因此 $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)=\mathrm{Aut}(E/\mathbb{Q})$. 同练习 2.5.18 (2) 证明手法可知, E 上任一自同构限制在 $\mathbb{Q}$ 上均为恒等映射. 于是域 E 的自同构均为域扩张 $E/\mathbb{Q}$ 的自同构, $\mathrm{Aut}(E/\mathbb{Q})=\mathrm{Aut}(E)$. 记

$$\mathrm{Root}_E\big(x^3-2\big)=\Big\{\beta_0=\sqrt[3]{2},\beta_1=\sqrt[3]{2}\omega,\beta_2=\sqrt[3]{2}\omega^2\Big\},$$
$$\mathrm{Root}_E\big(x^2+x+1\big)=\big\{\alpha_1=\omega,\alpha_2=\omega^2\big\}.$$

由引理 3.3.1, 存在 $\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$ 的延拓

$$\sigma_i:\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{2}\big)\xrightarrow{\sim}\mathbb{Q}(\beta_i)$$

满足 $\sigma_i\big(\sqrt[3]{2}\big)=\beta_i$. 再次运用引理 3.3.1, 存在 σ_i 的延拓

$$\delta_{i,j}:\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{2}\big)(\omega)\xrightarrow{\sim}\mathbb{Q}(\beta_i)(\alpha_j)$$

满足 $\delta_{i,j}(\omega)=\alpha_j$. 故

$$\mathrm{Aut}(E)=\{\delta_{i,j}:i=0,1,2;\ j=1,2\}.$$

此时 $|\mathrm{Aut}(E/\mathbb{Q})| = 6 = [E:\mathbb{Q}]$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})(\omega) \arrow[r, dashed, "\delta_{i,j}", "\sim"'] & \mathbb{Q}(\beta_i)(\alpha_j) \\
\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \arrow[u, "x^2+x+1"] \arrow[r, dashed, "\sigma_i", "\sim"'] & \mathbb{Q}(\beta_i) \arrow[u, "\sigma_i(x^2+x+1)"'] \\
\mathbb{Q} \arrow[u, "x^3-2"] \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}"] & \mathbb{Q} \arrow[u, "\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}(x^3-2)"']
\end{tikzcd}$$

练习 3.3.16 例 3.3.15 中 $\mathrm{Aut}(E)$ 的乘法表.

解答 见表 3.1. 注意 $\mathrm{Aut}(E)$ 是非 Abel 群.

表 3.1: 例 3.3.15 中 $\mathrm{Aut}(E)$ 的乘法表

$\downarrow \circ \rightarrow$	$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{1,1}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{2,1}$	$\delta_{2,2}$
$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{1,1}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{2,1}$	$\delta_{2,2}$
$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,1}$	$\delta_{2,2}$	$\delta_{2,1}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,1}$
$\delta_{1,1}$	$\delta_{1,1}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{2,1}$	$\delta_{2,2}$	$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$
$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,1}$	$\delta_{2,2}$	$\delta_{2,1}$
$\delta_{2,1}$	$\delta_{2,1}$	$\delta_{2,2}$	$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{1,1}$	$\delta_{1,2}$
$\delta_{2,2}$	$\delta_{2,2}$	$\delta_{2,1}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,1}$

例 3.3.17 考虑 $f(x) = x^2 + x + \bar{1} \in \mathbb{F}_2[x]$, 由例 3.3.9, 其分裂域 $\mathbb{F}_2(u, u+\bar{1}) = \mathbb{F}_4$. 因此 $\mathrm{Gal}_{\mathbb{F}_2}(f) = \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2)$. 由于 $\mathbb{F}_4$ 上任一自同构限制在 $\mathbb{F}_2$ 上均为恒等映射, $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2) = \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_4)$. 记

$$\mathrm{Root}_{\mathbb{F}_4}(x^2+x+\bar{1}) = \{\alpha_0 = u, \alpha_1 = u+\bar{1}\}.$$

由引理 3.3.1, 存在 $\mathrm{Id}_{\mathbb{F}_2}$ 的延拓

$$\delta_i : \mathbb{F}_4 \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_2(\alpha_i)$$

满足 $\delta_i(u) = \alpha_i$. 故

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_4) = \{\delta_0, \delta_1\}.$$

此时 $|\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2)| = 2 = [\mathbb{F}_4 : \mathbb{F}_2]$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}_2(u) \arrow[r, phantom, "="] & \mathbb{F}_4 \arrow[r, dashed, "\delta_i", "\sim"'] & \mathbb{F}_4 \\
& \mathbb{F}_2 \arrow[u, "x^2+x+\bar{1}"] \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}_{\mathbb{F}_2}"] & \mathbb{F}_2 \arrow[u, "\mathrm{Id}_{\mathbb{F}_2}(x^2+x+\bar{1})"']
\end{tikzcd}$$

练习 3.3.18 例 3.3.17 中, $\delta_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{F}_4}$, 而对每个 $a \in \mathbb{F}_4$ 均有 $\delta_1(a) = a^2$.

定义 3.3.19 称非零多项式 $f(x) \in k[x]$ (在某个扩域里) 有重根, 若存在域扩张 E/k 使得对某个 $a \in E$ 有 $(x-a)^2 \mid f(x)$.

定义 3.3.20 设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in k[x]$. 定义 $f(x)$ 的形式微分为

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

注记 3.3.21 若 $n1_k \neq 0_k$, 则对任意 n 次多项式 $f(x)$, $\deg(f'(x)) = \deg(f(x)) - 1$.

性质 3.3.22 (Leibniz 法则) 设 $f(x), g(x) \in k[x]$, 则

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

引理 3.3.23 非零多项式 $f(x) \in k[x]$ 无重根当且仅当 $\gcd_{k[x]}(f(x), f'(x)) = 1$.

定义 3.3.24 非零多项式 $f(x) \in k[x]$ 称为 k 上可分的, 若 $f(x)$ 在 $k[x]$ 中的不可约因子均无重根.

引理 3.3.25 若 $\mathrm{char}(k) = 0$, 则 k 上的任意多项式均可分.

证明 设 $g(x)$ 是 $f(x) \in k[x]$ 的不可约因子. 由注记 3.3.21, $\deg(g'(x)) = \deg(g(x)) - 1$. 因此

$$\gcd_{k[x]}(g(x), g'(x)) = 1.$$

由引理 3.3.23, $g(x)$ 无重根. 故 $f(x)$ 在 k 上可分. □

例 3.3.26 (不可分多项式) 考虑有理函数域 $k = \mathbb{F}_p(t)$, 其中 p 为素数, t 为未定元. 由 $t \in \mathbb{F}_p[t]$ 为素元, 根据 Eisenstein 判别法, $x^p - t \in \mathbb{F}_p[t][x]$ 不可约. 而 $\mathbb{F}_p[t]$ 为 UFD, 由命题 2.7.34, $x^p - t \in k[x]$ 不可约. 设 α 是 $x^p - t$ 在 k 的某个扩域上的根, 则由

$$x^p - t = x^p - \alpha^p = (x - \alpha)^p$$

可知 α 是重根. 故 $x^p - t \in k[x]$ 是不可分多项式.

练习 3.3.27 考虑域扩张 K/k 与 $f(x) \in k[x]$. 若 $f(x)$ 在 k 上可分, 则 $f(x)$ 在 K 上亦可分.

定理 3.3.13 续 给定域同构 $\sigma : k \xrightarrow{\sim} k'$, $f(x) \in k[x]$ 及相应的 $\sigma(f(x)) \in k'[x]$. 取 E/k 为 $f(x)$ 的一个分裂域, E'/k' 为 $\sigma(f(x))$ 的一个分裂域. 则 $f(x) \in k[x]$ 可分当且仅当 σ 仅有 $[E : k]$ 个延拓 $\delta : E \xrightarrow{\sim} E'$. 此时 $|\mathrm{Aut}(E/k)| = [E : k]$.

有限维域扩张 设 E/k 为有限维域扩张, 由定理 3.2.11, E/k 是有限生成的代数扩张. 因此任意 $u \in E$ 均有关于 k 的最小多项式 $g(x)$. 对任意 $\sigma \in \mathrm{Aut}(E/k)$, 由 $\sigma|_k = \mathrm{Id}_k$ 知, 对 $g(x) \in k[x]$, 有 $g(u) = 0 \implies g(\sigma(u)) = 0$, 即 $\sigma(u) \in \mathrm{Root}_E(g(x))$, 它仅有有限种可能取值. 设 $E = k(u_1, \cdots, u_n)$, 我们有以下事实:

练习 3.3.28 设 $\sigma, \tau \in \mathrm{Aut}(E/k)$. 若 $\sigma(u_i) = \tau(u_i), \forall i$, 则 $\sigma = \tau$.

也即域扩张 E/k 的自同构完全由其在生成元集上的作用确定. 故 $\mathrm{Aut}(E/k)$ 是有限群.

例 3.3.29 $\mathrm{Aut}\Big(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}\Big) = \mathrm{Aut}\Big(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\Big) = \Big\{\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})}\Big\}$. 它是平凡群的原因在于 $x^3 - 2$ 在 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ 中的根仅有 $\sqrt[3]{2}$.

定理 3.3.30 设 E/k 是有限维域扩张, 则 $|\mathrm{Aut}(E/k)| \leqslant [E : k]$, 等号成立当且仅当 E/k 是 k 上某个可分多项式的分裂域. 此时, 对任意 $a \in E$, 有 $a \in k$ 当且仅当对任意 $\sigma \in \mathrm{Aut}(E/k)$ 均有 $\sigma(a) = a$.

证明 (1) 由定理 3.2.11, E/k 是有限生成的代数扩张, 设 $E = k(u_1, \cdots, u_n)$. 不妨只考虑 $n = 2$ 的情形. 取 u_1 关于 k 的最小多项式 $g_1(x) \in k[x]$, 任取 $\beta_1 \in \mathrm{Root}_E(g_1(x))$. 由引理 3.3.1, 对于每个取定的 β_1, 唯一存在 Id_k 的延拓 $\sigma_1 : k(u_1) \xrightarrow{\sim} k(\beta_1)$ 满足 $\sigma_1(u_1) = \beta_1$. 这样的延拓 σ_1 恰有 $|\mathrm{Root}_E(g_1(x))|$ 个, 而 $|\mathrm{Root}_E(g_1(x))| \leqslant \deg(g_1(x)) = [k(\beta_1) : k]$. 再取 u_2 关于 $k(u_1)$ 的最小多项式 $g_2(x) \in k(u_1)[x]$, 任取 $\beta_2 \in \mathrm{Root}_E(\sigma_1(g_2(x)))$. 再由引理 3.3.1, 对于给定的 σ_1 与取定的 β_2,

唯一存在 σ_1 的延拓 $\sigma_2 : E \xrightarrow{\sim} E$ 满足 $\sigma_2(u_2) = \beta_2$. 这样的延拓恰有 $|\mathrm{Root}_E(\sigma_1(g_2(x)))|$ 个, 而 $|\mathrm{Root}_E(\sigma_1(g_2(x)))| \leqslant \deg(g_2(x)) = [E : k(\beta_1)]$. 故

$$\begin{aligned}|\mathrm{Aut}(E/k)| &= |\mathrm{Root}_E(g_1(x))| \cdot |\mathrm{Root}_E(\sigma_1(g_2(x)))| \\ &\leqslant [k(\beta_1) : k][E : k(\beta_1)] \xlongequal{\text{定理 3.2.4}} [E : k].\end{aligned}$$

(2) 设 $|\mathrm{Aut}(E/k)| = [E : k]$. 由 (1) 中第一处 “$\leqslant$” 为 “$=$” 知, u_1 关于 k 的最小多项式 $h_1(x) \in k[x]$ 在 E 上分裂且无重根. 由于从 k 到 E 的扩张不依赖于 $u_1, \cdots, u_n$ 的顺序, 对域扩张 $k(u_i)/k$ 如上分析即知, u_i 关于 k 的最小多项式 $h_i \in k[x]$ 在 E 上分裂且在 k 上可分. 记 $f(x) = \prod_{i=1}^{n} h_i(x) \in k[x]$, 则 $f(x)$ 在 E 上分裂且在 k 上可分, E/k 即 $f(x)$ 的分裂域.

(3) 设 E/k 为 k 上可分多项式 $f(x)$ 的分裂域, $f(x) = (x - u_1) \cdots (x - u_n)$. 由于 u_1 关于 k、u_2 关于 $k(u_1)$ 直至 u_n 关于 $k(u_1, \cdots, u_{n-1})$ 的最小多项式均为 $f(x)$ 的因子, 因此它们在 E 上分裂且无重根. 由此可知 (1) 中每处 “$\leqslant$” 均为 “$=$”, 故 $|\mathrm{Aut}(E/k)| = [E : k]$.

(4) 设 E/k 是 k 上可分多项式 $f(x)$ 的分裂域, $a \in E$, 且对任意 $\sigma \in \mathrm{Aut}(E/k)$ 均有 $\sigma(a) = a$. 下证 $a \in k$. 用反证法, 假设 $a \notin k$, 则 a 关于 k 的最小多项式 $g(x)$ 满足 $\deg(g(x)) \geqslant 2$. 同 (2) 知 $g(x)$ 在 E 上分裂且无重根, 因此 $|\mathrm{Root}_E(g(x))| = \deg(g(x)) \geqslant 2$, 存在 $b \neq a$ 使得 $g(b) = 0$. 由引理 3.3.1, 存在 Id_k 的延拓 $\sigma : k(a) \xrightarrow{\sim} k(b)$ 满足 $\sigma(a) = b$. 由于 $\sigma(f(x)) = f(x)$, $E/k(a)$ 为 $f(x) \in k(a)[x]$ 的分裂域, $E/k(b)$ 为 $f(x) \in k(b)[x]$ 的分裂域, 由定理 3.3.13, 存在 σ 的延拓 $\delta \in \mathrm{Aut}(E)$. 因此 $\delta \in \mathrm{Aut}(E/k)$, 但 $\delta(a) = \sigma(a) = b \neq a$, 矛盾.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, dashed, "\delta", "\sim"'] & E \\
k(a) \arrow[u] \arrow[r, dashed, "\sigma : a \mapsto b", "\sim"'] & k(b) \arrow[u] \\
k \arrow[u] \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}_k"] & k \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

□

不动子域 设 E/k 为有限维域扩张, $H \leqslant \mathrm{Aut}(E/k)$ 为子群. 定义 H-不动子域为

$$E^H \coloneqq \{z \in E : \sigma(z) = z, \forall \sigma \in H\}.$$

此时有域扩张塔 $k \subset E^H \subset E$.

中间域 考虑域扩张塔 $k \subset K \subset E$. 此时对中间域 K 有

$$\mathrm{Aut}(E/K) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(E) : \sigma|_K = \mathrm{Id}_K\} \leqslant \mathrm{Aut}(E/k)$$

为子群.

3.4 有限域

有限域的概念 设 E 为有限域. 由推论 2.2.24, $\mathrm{char}(R) = p$ (p 为素数). 再由注记 2.2.25, 存在域嵌入 $\mathbb{F}_p \hookrightarrow E$. 由练习 2.4.39, 可视 E 为 $\mathbb{F}_p$-线性空间. 设 $n = \dim_{\mathbb{F}_p} E$, 则有线性同构 $E \simeq \mathbb{F}_p \times \cdots \times \mathbb{F}_p$. 于是 $|E| = p^n$.

定义 3.4.1 设有限域 E 特征为 p. 定义 E 上的 Frobenius 自同构为

$$\begin{aligned}\sigma : E &\xrightarrow{\sim} E\\ a &\longmapsto a^p.\end{aligned}$$

注记 3.4.2 考虑域扩张 $E/\mathbb{F}_p$, 由于 $\sigma \in \mathrm{Aut}(E)$, $\sigma|_{\mathbb{F}_p} = \mathrm{Id}_{\mathbb{F}_p}$. 因此对任意 $\overline{m} \in \mathbb{F}_p$, $\sigma(\overline{m}) = \overline{m}^p = \overline{m}$. 这便是 Fermat 小定理.

例 3.4.3 考虑域扩张 $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$, 则 $\sigma|_{\mathbb{F}_2} = \mathrm{Id}_{\mathbb{F}_2}$, $\sigma(u) = u^2 = u + \overline{1}$, $\sigma\big(u + \overline{1}\big) = u^2 + \overline{1} = u$. 因此 $\sigma^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{F}_4}$. 而 $|\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2)| \leqslant [\mathbb{F}_4 : \mathbb{F}_2] = 2$, 因此 $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2) = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{F}_4}, \sigma\}$.

例 3.4.4 有理函数域 $\mathbb{F}_p(t)$ 的 Frobenius 自同态 $\sigma(x) = x^p$ 不是满射. 例如, 假设 $t \in \mathrm{Im}\,\sigma$, 则存在 $f(t), g(t) \in \mathbb{F}_p[t]$, 使得 $\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)^p = t$. 两边取次数即 $p \cdot [\deg(f) - \deg(g)] = 1$, 但这不可能. 故 $t \notin \mathrm{Im}\,\sigma$.

设 $|E| = p^n$, 则 $E^\times = E \setminus \{0_E\}$ 满足 $\left|E^\times\right| = p^n - 1$. 我们有定理 4.1.18 的特殊情形:

引理 3.4.5 对任意 $a \in E^\times$ 均有 $a^{p^n - 1} = 1_E$. 故任意 $a \in E$ 均为 $x^{p^n} - x$ 的根.

证明 固定 $a \in E^\times$, 考虑无穷序列

$$1_E, a, a^2, \cdots \in E.$$

由 E 是有限域, 必存在 $i < j$ 使得 $a^i = a^j$. 于是 $a^{j-i} = 1_E$. 取最小的 $d \geqslant 1$ 使得 $a^d = 1_E$. 由于 $H = \left\{1_E, a, \cdots, a^{d-1}\right\} \leqslant E^\times$ 是子群, 由定理 4.1.18, $|H| \mid (p^n - 1)$ 即 $d \mid (p^n - 1)$. 故 $a^{p^n - 1} = 1_E$. □

定理 3.4.6 对任意正整数 n 与素数 p, 唯一存在 p^n 阶有限域, 通常记为 $\mathbb{F}_{p^n}$.

证明 **(至多唯一性)** 设存在有限域 E 满足 $|E| = p^n$. 由引理 3.4.5, $E/\mathbb{F}_p$ 是 $x^{p^n} - x \in \mathbb{F}_p[x]$ 的分裂域, 它在域扩张同构的意义下唯一.

(存在性) 设 $K/\mathbb{F}_p$ 为 $x^{p^n - 1} - x \in \mathbb{F}_p[x]$ 的分裂域. 由 $K/\mathbb{F}_p$ 是有限生成的代数扩张知 $[K : \mathbb{F}_p] < \infty$, 因此 K 为有限域. 取 $E = \mathrm{Root}_K\left(x^{p^n} - x\right)$. 考虑 K 上的 Frobenius 自同构 σ, 对任意 $a, b \in E$, 有

$$(a \pm b)^{p^n} = \sigma^n(a \pm b) = \sigma^n(a) \pm \sigma^n(b) = a \pm b, \quad (ab)^{p^n} = a^{p^n} b^{p^n} = ab,$$

因此 E 为 K 的子域. 由 K 的定义即得 $E = K$. 只需说明 $|E| = p^n$ 即 $x^{p^n} - x \in \mathbb{F}_p[x]$ 无重根. 这来自

$$\gcd_{\mathbb{F}_p[x]}\left(x^{p^n} - x, \left(x^{p^n} - x\right)'\right) = \gcd_{\mathbb{F}_p[x]}\left(x^{p^n} - x, -\overline{1}\right) = \overline{1}.$$

□

注记 3.4.7 特别地, 我们有 $\mathbb{F}_{p^n}[x]$ 中的等式

$$x^{p^n} - x = \prod_{a \in \mathbb{F}_{p^n}} (x - a).$$

当 $n=1$ 时, 就得到 $\mathbb{F}_p[x]$ 中的等式

$$x^p - x = x(x-\overline{1})\cdots(x-\overline{p-1}),$$

两边约去 x 即

$$x^{p-1} - \overline{1} = (x-\overline{1})\cdots(x-\overline{p-1}).$$

令 $x=\overline{0}$ 便是初等数论中的 Wilson 定理:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p.$$

命题 3.4.8 对素数 p 与正整数 n, 在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中有分解

$$x^{p^n} - x = \prod_{d \mid n} \prod_{\substack{d\text{ 次首一不可约}\\ \text{多项式} f(x)\in\mathbb{F}_p[x]}} f(x).$$

证明 取定 E 满足 $|E|=p^n$. 任取 $x^{p^n}-x$ 的不可约因子 $f(x)\in\mathbb{F}_p[x]$, 则 $f(x)$ 在 E 上完全分裂, 因此可取 $a\in E$ 使得 $f(a)=\overline{0}$. 考虑域扩张塔

$$\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_p(a) \subset E.$$

由于 $[\mathbb{F}_p(a):\mathbb{F}_p]=\deg(f(x))$, $[E:\mathbb{F}_p]=n$, 由定理 3.2.4, $\deg(f(x))\mid n$. 又 $x^{p^n}-x$ 无重根 (见定理 3.4.6 证明), 故 $f(x)$ 在分解式中仅出现一次. 反过来, 设 $g(x)\in\mathbb{F}_p[x]$ 为 d 次首一不可约多项式, $d\mid n$. 考虑 Kronecker 添根构造 $K=\mathbb{F}_p[x]/(g(x))$, 记 $u=\overline{x}$. 则 $K=\mathbb{F}_p(u)$, $[K:\mathbb{F}_p]=d$, 因此 $|K|=p^d$. 由引理 3.4.5, $u^{p^d}-u=\overline{0}$. 又 $g(x)$ 是 u 的最小多项式, 因此 $g(x)\,\Big|\,\left(x^{p^d}-x\right)$. 而 $\left(x^{p^d}-x\right)\Big|\left(x^{p^n}-x\right)$, 故 $g(x)\,\Big|\,\left(x^{p^n}-x\right)$. □

$\left(x^{p^d}-x\right)\Big|\left(x^{p^n}-x\right)$ **的证明** $\gcd(a^m-1,a^n-1)=a^{\gcd(m,n)}-1$, $\forall a,m,n\in\mathbb{Z}_+$.

例 3.4.9 在命题 3.4.8 中, 取 $p=2$ 可得 $\mathbb{F}_2[x]$ 中分解

$$\begin{aligned}
x^4 - x &= x(x+\overline{1})(x^2+x+\overline{1}),\\
x^8 - x &= x(x+\overline{1})(x^3+x^2+\overline{1})(x^3+x+\overline{1}),\\
x^{16} - x &= x(x+\overline{1})(x^2+x+\overline{1})(x^4+x^3+x^2+x+\overline{1})(x^4+x^3+\overline{1})(x^4+x+\overline{1}).
\end{aligned}$$

取 $p=3$ 可得 $\mathbb{F}_3[x]$ 中分解

$$x^9 - x = x(x+\overline{1})(x-\overline{1})(x^2+\overline{1})(x^2+x-\overline{1})(x^2-x-\overline{1}).$$

命题 3.4.10 取定 p^n 元域 E.

(1) 设 K 为 E 的子域, 则 $|K|=p^d$, 其中 $d\mid n$.

(2) 设 $d\mid n$, 则存在唯一的子域 $K\subset E$ 满足 $|K|=p^d$.

证明 (1) 考虑域扩张塔 $\mathbb{F}_p\subset K\subset E$, 由定理 3.2.4 得 $[K:\mathbb{F}_p]\mid[E:\mathbb{F}_p]$.

(2) **(至多唯一性)** 假设 $K\subset E$ 满足 $|K|=p^d$, 由引理 3.4.5, $K\subset \mathrm{Root}_E\left(x^{p^d}-x\right)$. 但 $x^{p^d}-x$ 无重根 (见定理 3.4.6 证明), $\left|\mathrm{Root}_E\left(x^{p^d}-x\right)\right| = p^d = |K|$, 因此 $K=\mathrm{Root}_E\left(x^{p^d}-x\right)$.

(存在性) 只需验证 $\mathrm{Root}_E\left(x^{p^d}-x\right)\subset E$ 是 p^d 阶子域. $\square$

例 3.4.11 ($\mathbb{F}_{2^6}$ 的子域格) 取定域 E 使得 $|E|=2^6$. 由命题 3.4.10, 存在唯一子域 $K_1\subset E$ 与 $K_2\subset E$ 满足 $|K_1|=2^2, |K_2|=2^3$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & K_1 \arrow[dr, phantom, "\subset"] & \\ \mathbb{F}_2 \arrow[ur, phantom, "\subset"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & & E \\ & K_2 \arrow[ur, phantom, "\subset"] & \end{tikzcd}$$

此时, $K_1=\left\{a\in E : a^4=a\right\}$, $K_2=\left\{b\in E : b^8=b\right\}$.

练习 3.4.12 设 E, K_1, K_2 如例 3.4.11 所述.

(1) 证明：$K_1\cap K_2=\mathbb{F}_2$.

(2) 求 $|\{u\in E : \mathbb{F}_2(u)=E\}|$.

解答 (1) $K_1\cap K_2=\left\{a\in E : a^2=a\right\}=\mathrm{Root}_E\left(x^2-x\right)=\mathbb{F}_2$.

(2) 结合 (1) 可知 $|\{u\in E : \mathbb{F}_2(u)=E\}|=|E\setminus(K_1\cup K_2)|=64-(4+8-2)=54$. $\square$

从例 3.4.11 可提取出如下结论：设 n 有素因数分解 $n=q_1^{r_1}\cdots q_t^{r_t}$ $(r_i\geqslant 1)$, 则 E 的极大真子域 K_i 阶为 $p^{\frac{n}{q_i}}$. 此时, 从练习 3.4.12 (2) 出发, 我们还有

命题 3.4.13 E 的全体极大真子域的并集 $\bigcup\limits_{i=1}^{t}K_i\neq E$. 故存在 $u\in E$ 使得 $E=\mathbb{F}_p(u)$.

证明 只需作简单的估计：

$$\left|\bigcup_{i=1}^{t}K_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{t}p^{\frac{n}{q_i}}\leqslant t\cdot p^{\frac{n}{2}}<\frac{n}{2}\cdot p^{\frac{n}{2}}\leqslant p^n.$$

$\square$

从命题 3.4.13 可知 $E/\mathbb{F}_p$ 为单扩张. 于是 $E\setminus(K_1\cup\cdots\cup K_t)$ 中任一元素关于 $\mathbb{F}_p$ 的最小多项式次数为 $[E:\mathbb{F}_p]=n$. 故我们得到

推论 3.4.14 对任意正整数 n, $\mathbb{F}_p[x]$ 中总有 n 次不可约多项式.

命题 3.4.15 取定 n 次首一不可约多项式 $f(x)\in\mathbb{F}_p[x]$. 设 $u\in\mathrm{Root}_E(f(x))$, 则

$$f(x)=\prod_{i=0}^{n-1}\left(x-\sigma^i(u)\right).$$

证明 由 $u\in\mathrm{Root}_E(f(x))$ 可知 $[\mathbb{F}_p(u):\mathbb{F}_p]=\deg(f(x))=n$, 因此 $\mathbb{F}_p(u)=E$.

(1) 先证明 $\sigma^i(u)\neq u, \forall 1\leqslant i\leqslant n-1$. 假设存在 $i\leqslant n-1$ 使得 $\sigma^i(u)=u$. 记

$$d=\gcd(i,n)=mi+rn,\quad m,r\in\mathbb{Z}.$$

由 $u\in E$ 即知 $\sigma^n(u)=u$. 于是

$$\sigma^d(u)=(\sigma^i)^m\circ(\sigma^n)^r(u)=(\sigma^i)^m(u)=u.$$

若 $d<n$, 则 $u\in\mathbb{F}_{p^d}\subsetneq E$, $\mathbb{F}_p(u)\subsetneq E$, 矛盾. 故 $d=n$, 但这与 $i\leqslant n-1$ 矛盾.

(2) 由 (1) 可知 $\sigma^i(u)\neq\sigma^j(u), 0\leqslant i<j\leqslant n-1$. 否则两边作用 σ^{-i} 即得矛盾.

(3) 由于 $\sigma \in \mathrm{Aut}(E)$, $u, \sigma(u), \cdots, \sigma^{n-1}(u) \in \mathrm{Root}_E(f(x))$ 且两两不同. □

注记 3.4.16 $E/\mathbb{F}_p$ 是 $\mathbb{F}_p$ 上可分多项式 $f(x)$ 的分裂域.

例 3.4.17 对任意 $w \in \mathbb{F}_9 \setminus \mathbb{F}_3$, w 与 $\sigma(w) = w^3$ 有相同的最小多项式, 为

$$(x-w)(x-\sigma(w)) \in \mathbb{F}_3[x].$$

证明 由 Fermat 小定理, $\sigma|_{\mathbb{F}_3} = \mathrm{Id}_{\mathbb{F}_3}$. 视 $\mathbb{F}_9$ 为 $\mathbb{F}_3$-线性空间, 则

$$g(w) = \bar{0} \iff \sigma(g(w)) = \bar{0} \iff g(\sigma(w)) = \bar{0}.$$

又 $[\mathbb{F}_9 : \mathbb{F}_3] = 2$, w 的最小多项式次数为 2, $\sigma(w) \neq w$, 因此 w (与 $\sigma(w)$) 关于 $\mathbb{F}_3$ 的最小多项式为 $(x-w)(x-\sigma(w)) \in \mathbb{F}_3[x]$. □

注记 3.4.18 由此可知 $\mathbb{F}_3[x]$ 中共有 3 个 2 次首一不可约多项式.

定理 3.4.19 设域 E 满足 $|E| = p^n$, 则 $\mathrm{Aut}(E) = \left\{\mathrm{Id}_E, \sigma, \cdots, \sigma^{n-1}\right\}$.

证明 取定 u 使 $\mathbb{F}_p(u) = E$, 设 u 关于 $\mathbb{F}_p$ 的最小多项式为 $f(x)$. 由命题 3.4.15 证明知 $\mathrm{Id}_E, \sigma, \cdots, \sigma^{n-1} \in \mathrm{Aut}(E)$ 两两不同, 且 $u, \sigma(u), \cdots, \sigma^{n-1}(u) \in \mathrm{Root}_E(f(x))$. 任取 $\delta \in \mathrm{Aut}(E)$, 则 $\delta(u) \in \mathrm{Root}_E(f(x))$. 因此存在 $0 \leqslant i \leqslant n-1$, 使得 $\delta(u) = \sigma^i(u)$. 又 E 的任一自同构限制在 $\mathbb{F}_p$ 上均为恒等映射, 由 E 为 $\mathbb{F}_p$-线性空间即知 $\delta = \sigma^i$. □

注记 3.4.20 $\mathrm{Aut}(E)$ 为循环群. 对任意 $d \mid n$,

$$H_d = \left\{\mathrm{Id}_E, \sigma^d, \sigma^{2d}, \cdots, \sigma^{n-d}\right\} \leqslant \mathrm{Aut}(E)$$

为子群, 且 $\mathrm{Aut}(E)$ 的任意子群均形如此.

由命题 3.4.10 与注记 3.4.20, E 的子域与 $\mathrm{Aut}(E)$ 的子群均一一对应于 n 的 (正) 因子. 故我们得到

定理 3.4.21 (有限域的 Galois 对应) 设 E 为有限域, $|E| = p^n$. 存在格的反同构

$$\begin{array}{ccc}
\{H \leqslant \mathrm{Aut}(E) \text{ 子群}\} & \xleftrightarrow{\ 1:1\ } & \{K \subset E \text{ 子域}\} \\
H_d & \longmapsto & \begin{array}{l} K_d = \left\{a \in E : \sigma^d(a) = a\right\} \\ = \{a \in E : \delta(a) = a, \forall \delta \in H_d\} \\ = \mathrm{Root}_E\left(x^{p^d} - x\right) \end{array} \\
\mathrm{Aut}(E/K_d) = \{\delta \in E : \delta|_{K_d} = \mathrm{Id}_{K_d}\} & \longleftarrow\!\shortmid & K_d.
\end{array}$$

注记 3.4.22 (1) K_d 是由 σ^d 生成的子群 H_d 的不动子域.

(2) 由注记 3.4.16, E/K_d 也是 K_d 上可分多项式 $f(x) = x^{p^n} - x$ 的分裂域. 由定理 3.3.13 续, $|\mathrm{Aut}(E/K_d)| = [E : K_d]$. 这与 $|\mathrm{Aut}(E/K_d)| = |H_d| = \dfrac{n}{d}$ 而 $[E : K_d] = \dfrac{n}{d}$ 相符.

(3) Galois 对应反保持偏序关系 (格结构).

3.5 分圆域

定义 3.5.1 称元素 $w\in k$ 为 n 次单位根, 若满足 $w^n=1_k$. 定义单位根 w 的阶 $\operatorname{ord}(w)$ 为最小的正整数 d 使得 $w^d=1_k$. 此时, 称 w 为 d 次本原单位根.

引理 3.5.2 设单位根 $w\in k$ 满足 $\operatorname{ord}(k)=d$, 则 $w^n=1_k \iff d\mid n$.

引理 3.5.3 设 $\operatorname{char}(k)=p>0$, 单位根 $w\in k$ 满足 $\operatorname{ord}(w)=d$, 则 $p\nmid d$.

证明 用反证法, 假设 $d=pd_1$, 则

$$0_k=w^d-1_k=\left(w^{d_1}\right)^p-1_k^p=\left(w^{d_1}-1_k\right)^p \implies w^{d_1}=1_k.$$

这与 d 的最小性矛盾. □

例 3.5.4 设有限域 E 满足 $|E|=p^n$. 任意 $w\in E^\times$ 均满足 $w^{p^n-1}=1_E$, 故 $\operatorname{ord}(w)\mid(p^n-1)$.

若 $w\in k$ 为 d 次本原单位根, 则 $\left\{1,w,\cdots,w^{d-1}\right\}=\operatorname{Root}_k\left(x^d-1\right)$ 为 $k^\times$ 的 d 阶子群. 事实上, 这是唯一可能的 d 阶子群:

定理 3.5.5 设 k 为域, 且 $H\leqslant k^\times$ 为 d 阶子群, 则存在 d 阶本原单位根 w, 且 $H=\left\{1,w,\cdots,w^{d-1}\right\}$. 特别地, 这样的 H 唯一.

例 3.5.6 设有限域 E 满足 $|E|=p^n$, 则 $E^\times$ 为 p^n-1 阶群. 由定理 3.5.5, 存在 p^n-1 次本原单位根 $u\in E$, 使得 $E^\times=\left\{1,u,\cdots,u^{p^n-2}\right\}$. 于是 $E=\mathbb{F}_p(u)$.

例 3.5.7 考虑九元域 $E=\mathbb{F}_3[x]/(x^2+\overline{1})$, 记 $u=\overline{x}$. 在 $E^\times$ 中, 由于 $\operatorname{ord}\left(u+\overline{1}\right)\mid 8$, 而 $\left(u+\overline{1}\right)^2=\overline{2}u$, $\left(u+\overline{1}\right)^4=\overline{2}$, 因此 $\operatorname{ord}\left(u+\overline{1}\right)=8$, $u+\overline{1}$ 是 $E^\times$ 的生成元.

复单位根 设 $n\geqslant 2$, 考虑 $\zeta=\zeta_n=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$, 则 $\operatorname{Root}_{\mathbb{C}}(x^n-1)=\left\{1,\zeta,\cdots,\zeta^{n-1}\right\}$,

$$x^n-1=(x-1)(x-\zeta)\cdots\left(x-\zeta^{n-1}\right).$$

由定理 3.5.5, $\left\{1,\zeta,\cdots,\zeta^{n-1}\right\}$ 是 $\mathbb{C}^\times$ 的 (唯一) n 阶子群.

练习 3.5.8 设 ζ 是 n 次本原单位根, m 为正整数, 则 $\operatorname{ord}(\zeta^m)=\dfrac{n}{\gcd(m,n)}$.

引理 3.5.9 复 n 次本原单位根的全体恰为 $\left\{\zeta^d:1\leqslant d<n,\gcd(d,n)=1\right\}$, 共有 $\varphi(n)$ 个, 这里 $\varphi(n)$ 为 Euler 函数.

定义 3.5.10 $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ 恰为 $x^n-1\in\mathbb{Q}[x]$ 的分裂域, 称为分圆域.

例 3.5.11 $\mathbb{Q}(\zeta_2)=\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\zeta_3)=\mathbb{Q}(\omega)=\mathbb{Q}\left(\sqrt{-3}\right)$, $\mathbb{Q}(\zeta_4)=\mathbb{Q}(\mathrm{i})$, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)\subset\mathbb{Q}(\zeta_5)$.

计算 ζ_5 将 $\zeta=\zeta_5$ 满足的方程 $\zeta^4+\zeta^3+\zeta^2+\zeta+1=0$ 写成

$$\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)^2+\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)-1=0.$$

由此可得 $2\cos\frac{2\pi}{5}=\zeta_5+\zeta_5^{-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 进而 $\zeta_5=\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\mathrm{i}$. 由于 $\zeta_5,\zeta_5^{-1}\in\mathbb{Q}(\zeta_5)$, 而 $\zeta_5+\zeta_5^{-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 因此 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})\subset\mathbb{Q}(\zeta_5)$.

定义 3.5.12 对 $n\geqslant 2$, n 级分圆多项式

$$\Phi_n(x)=\prod_{\operatorname{ord}(w)=n}(x-w)=\prod_{\substack{1\leqslant m<n\\ \gcd(m,n)=1}}(x-\zeta^m).$$

注记 3.5.13 补充定义 $\Phi_1(x)=x-1$. 我们有 $\deg\Phi_n(x)=\varphi(n)$.

引理 3.5.14 $x^n-1=\prod\limits_{d\mid n}\Phi_d(x)$.

证明 由练习 3.5.8, 对于 $1\leqslant m\leqslant n$ 与 $d\mid n$,

$$\operatorname{ord}(\zeta^m)=d\iff\gcd(m,n)=\frac{n}{d}\iff m=\frac{n}{d}\cdot k \text{ 且 } \gcd(k,d)=1.$$

因此 n 次单位根中阶为 d 的元素为

$$S_d=\left\{\zeta^{\frac{n}{d}k}:1\leqslant k\leqslant d,\ \gcd(k,d)=1\right\}.$$

利用 n 次单位根之集的划分

$$\left\{1,\zeta,\cdots,\zeta^{n-1}\right\}=\bigsqcup_{d\mid n}S_d$$

即得

$$x^n-1=(x-1)(x-\zeta)\cdots\left(x-\zeta^{n-1}\right)=\prod_{d\mid n}\prod_{w\in S_d}(x-w)=\prod_{d\mid n}\Phi_d(x).$$

□

注记 3.5.15 由 $\left\{1,\zeta,\cdots,\zeta^{n-1}\right\}=\bigsqcup\limits_{d\mid n}S_d$ 可得 $n=\sum\limits_{d\mid n}\varphi(d)$.

例 3.5.16 设 p 为素数, 则 $\Phi_p(x)=\dfrac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+\cdots+x+1$.

定理 3.5.17 对任意正整数 n, $\Phi_n(x)\in\mathbb{Z}[x]$.

证明 用归纳法, 当 $n=1$ 时, $\Phi_1(x)=x-1\in\mathbb{Z}[x]$. 假设对所有正整数 $d<n$, 均有 $\Phi_d(x)\in\mathbb{Z}[x]$. 令

$$g(x)=\prod_{\substack{d\mid n\\ 1\leqslant d<n}}\Phi_d(x),$$

则 $g(x)\in\mathbb{Z}[x]$. 由引理 3.5.14,

$$x^n-1=g(x)\Phi_n(x).$$

由于 $g(x)$ 首一, 由带余除法, 存在 $q(x),r(x)\in\mathbb{Z}[x]$ 使得

$$x^n-1=q(x)g(x)+r(x),$$

其中 $r(x)=0$ 或 $\deg(r(x))<\deg(g(x))$. 将以上两式看作 $\mathbb{C}[x]$ 中带余除法, 由定理 2.4.18 即知 $r(x)=0$ 且 $q(x)=\Phi_n(x)$. 故 $\Phi_n(x)\in\mathbb{Z}[x]$. □

练习 3.5.18 设域 F 为 p^n 元域, p 为素数, $f(x)\in F[x]$ 为首一不可约多项式. 求证:

(1) $f(x)$ 有重根 $\iff$ 存在 $g(x)\in F[x]$, 使得 $f(x)=g(x^p)$.

(2) 如果 $f(x)=g\big(x^{p^n}\big)$, 其中 $g(x)\in F[x]$, 但不存在 $\bar{g}(x)\in F[x]$ 使得 $f(x)=\bar{g}\big(x^{p^{n+1}}\big)$, 则 $p^n\mid m=\deg(f(x))$, 并且 $f(x)$ 共有 $\frac{m}{p^n}$ 个不同的根, 每个根的重数均为 p^n.

证明 (1) 设 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 则

$$f(x)\text{ 有重根}\xLeftrightarrow{\text{引理 3.3.23}}\gcd(f(x),f'(x))\neq 1\xLeftrightarrow[\deg(f'(x))<\deg(f(x))]{f(x)\text{ 首一不可约}}f'(x)=0$$
$$\iff ma_m=0,\ 0\leqslant m\leqslant n\iff \text{若 } p\nmid m \text{ 则 } a_m=0.$$

(2) 由 $f(x)$ 首一不可约且 $f(x)=g\big(x^{p^{n+1}}\big)$ 知 $g(x)$ 亦为首一不可约多项式. 由条件, 不存在 $h(x)\in F[x]$ 使得 $g(x)=h(x^p)$. 由 (1), 这等价于 $g(x)$ 无重根. 设

$$g(x)=\prod_{i=1}^{\frac{m}{p^n}}(x-u_i),$$

其中 u_i 互异. 取 v_i 使得 $v_i^{p^n}=u_i$, 则 v_i 互异, 且

$$f(x)=g\big(x^{p^{n+1}}\big)=\prod_{i=1}^{\frac{m}{p^n}}\Big(x^{p^n}-v_i^{p^n}\Big)=\prod_{i=1}^{\frac{m}{p^n}}[\sigma^n(x)-\sigma^n(v_i)]=\prod_{i=1}^{\frac{m}{p^n}}(x-v_i)^{p^n}.$$ □

由例 3.5.16 与例 2.7.47, 对于素数 p, $\Phi_p(x)\in\mathbb{Z}[x]$ 不可约. 更一般地, 我们有

定理 3.5.19 $\Phi_n(x)\in\mathbb{Z}[x]$ 不可约 (由命题 2.7.34, $\Phi_n(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 也不可约), 它是任意 n 次本原单位根的最小多项式.

证明 取定 n 次本原单位根 ζ_n 及其 (首一) 最小多项式 $P\in\mathbb{Q}[x]$, 则 $P\mid\Phi_n$. 如能证明每个 n 次单位根 ζ 都是 P 的根, 则 $\deg P=\varphi(n)=\deg\Phi_n$, 从而 $\Phi_n=P$ 不可约. 为此只需证对 ζ 如上及满足 $p\nmid n$ 的素数 p, 皆有 $P(\zeta)=0\implies P(\zeta^p)=0$; 因为对任意满足 $\gcd(k,n)=1$ 及 $1<k<n$ 的正整数 k, 可由素因数分解 $k=p_1\cdots p_s$ $(p_i\nmid n)$ 得到 $P(\zeta)=0\implies P(\zeta^{p_1})=0\implies P(\zeta^{p_1p_2})=0\implies\cdots\implies P(\zeta^{p_1\cdots p_s})=0$.

注意到 $\Phi_n(\zeta^p)=0$, 并且在 $\mathbb{Q}[x]$ 中有分解 $\Phi_n=PQ$, 其中 Q 首一, 而由注记 2.7.31 即得 $P,Q\in\mathbb{Z}[x]$. 假设 $P(\zeta)=0$ 而 $P(\zeta^p)\neq 0$, 则 $Q(\zeta^p)=0$. 此时 $P(x)$ 与 $Q(x^p)$ 有公共根 ζ, 因此 $P(x)$ 与 $Q(x^p)$ 在 $\mathbb{C}[x]$ 中不互素, 由于 $\mathbb{Q}[x]$ 中最大公因子不随域 $\mathbb{Q}$ 的扩张而改变, 它们在 $\mathbb{Q}[x]$ 中也不互素. 又 $P(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 因此在 $\mathbb{Q}[x]$ 中 $P(x)\mid Q(x^p)$, 即存在 $R(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 使得 $Q(x^p)=P(x)R(x)$. 再次运用注记 2.7.31 即知 $R(x)\in\mathbb{Z}[x]$. 考虑多项式的模 p 约化 $\pi:\mathbb{Z}[x]\twoheadrightarrow\mathbb{F}_p[x]$. 由 Fermat 小定理, 设 $Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$, 则

$$\begin{aligned}\pi(Q(x^p))&=\overline{b_m}x^{pm}+\overline{b_{m-1}}x^{p(m-1)}+\cdots+\overline{b_1}x^p+\overline{b_0}\\&=\left(\overline{b_m}x^m\right)^p+\left(\overline{b_{m-1}}x^{m-1}\right)^p+\cdots+\left(\overline{b_1}x\right)^p+\left(\overline{b_0}\right)^p\\&=\left(\overline{b_m}x^m+\overline{b_{m-1}}x^{m-1}+\cdots+\overline{b_1}x+\overline{b_0}\right)^p=\pi(Q(x))^p.\end{aligned}$$

于是由 $Q(x^p)=P(x)R(x)$ 可得

$$\pi(Q)^p=\pi(P)\pi(R).$$

由于 $\mathbb{F}_p[x]$ 是 UFD, $\pi(P)$ 在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中任一不可约因子必整除 $\pi(Q)$, 从而 $\pi(P)$ 与 $\pi(Q)$ 不互素. 而 $\pi(\Phi_n)=\pi(P)\pi(Q)$, $\Phi_n(x)\mid(x^n-1)$, 故 $\pi(x^n-1)=x^n-\overline{1}\in\mathbb{F}_p[x]$ 有重根. 但由 $p\nmid n$ 知 $\left(x^n-\overline{1}\right)'=\overline{n}x^{n-1}\in\mathbb{F}_p[x]$ 非零, $\gcd\left(x^n-\overline{1},\overline{n}x^{n-1}\right)=\overline{1}$, 由引理 3.3.23 知 $x^n-\overline{1}\in\mathbb{F}_p[x]$ 无重根, 矛盾. □

推论 3.5.20 分圆域 $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ 的维数 $[\mathbb{Q}(\zeta_n):\mathbb{Q}]=\varphi(n)$.

由于 $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ 是可分多项式 $x^n-1\in\mathbb{Q}[x]$ 的分裂域, 由定理 3.3.13 续,

$$|\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta_n))|=|\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})|=[\mathbb{Q}(\zeta_n):\mathbb{Q}]=\varphi(n).$$

注意到域的自同构保持代数元的最小多项式, 因此对任意 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta_n))$, $\sigma(\zeta_n)$ 仍为 n 次本原单位根, 记 $\sigma(\zeta_n)=\zeta^k$, 其中 $1\leqslant k\leqslant n$ 且 $\gcd(k,n)=1$.

定理 3.5.21 *存在群同构*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta_n))\xrightarrow{\sim}U(\mathbb{Z}_n),\quad \sigma\mapsto\overline{k},$$

其中 σ 满足 $\sigma(\zeta_n)=\zeta_n^k$.

注记 3.5.22 在此群同构下, 复共轭 $\sigma(z)=\overline{z}$ 的像为 $-\overline{1}$.

练习 3.5.23 $\mathbb{Q}(\zeta_n)\cap\mathbb{R}=\mathbb{Q}\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right)$. 这便是 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ 的不动子域 $\mathbb{Q}(\zeta_n)^{\{\mathrm{Id},\sigma\}}$, 其中 σ 为复共轭.

提示 利用第一类 Chebyshev 多项式证明 LHS $\subset$ RHS, 注意 $\mathbb{Q}(\zeta_n)=\mathbb{Q}[\zeta_n]$.

例 3.5.24 由定理 3.5.21, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta_8))\simeq U(\mathbb{Z}_8)=\left\{\overline{1},\overline{3},\overline{5},\overline{7}\right\}$, 元素间的对应关系为

$$\overline{1}\leftrightarrow(\zeta_8\mapsto\zeta_8),\quad \overline{3}\leftrightarrow\left(\zeta_8\mapsto\zeta_8^3\right),\quad \overline{5}\leftrightarrow\left(\zeta_8\mapsto\zeta_8^5\right),\quad \overline{7}\leftrightarrow\left(\zeta_8\mapsto\zeta_8^7\right).$$

易知 $\mathbb{Q}(\zeta_8)=\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\mathrm{i}\right)$. 利用 $\zeta_8+\zeta_8^7=\sqrt{2}$ 与 $\zeta_8^2=\mathrm{i}$, 经计算可将上述 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta_8))$ 元素重新表述为

$$\boxed{\mathrm{Id}:\sqrt{2}\mapsto\sqrt{2},\mathrm{i}\mapsto\mathrm{i}}\quad\boxed{\sigma:\sqrt{2}\mapsto-\sqrt{2},\mathrm{i}\mapsto-\mathrm{i}}\quad\boxed{\delta:\sqrt{2}\mapsto-\sqrt{2},\mathrm{i}\mapsto\mathrm{i}}\quad\boxed{\tau:\sqrt{2}\mapsto\sqrt{2},\mathrm{i}\mapsto-\mathrm{i}}$$

由定理 4.1.18, 四阶群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta_8))=\{\mathrm{Id},\sigma,\delta,\tau\}$ 的非平凡子群只能为二阶群, 而由上述可见 σ,δ,τ 均为二阶元, 故所有二阶子群为 $\{\mathrm{Id},\sigma\},\{\mathrm{Id},\delta\},\{\mathrm{Id},\tau\}$. 再考虑余下两个平凡子群, 由 Galois 对应及下面的练习 3.5.25 结果可得 $\mathbb{Q}(\zeta_8)$ 的所有子域为 $\mathbb{Q}(\zeta_8),\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right),\mathbb{Q}(\mathrm{i}),\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right),\mathbb{Q}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(\zeta_8) \arrow[d, equal] & \\
 & \mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\mathrm{i}\right) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(\mathrm{i}) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

练习 3.5.25 例 3.5.24 中 $\{\mathrm{Id},\sigma\},\{\mathrm{Id},\delta\},\{\mathrm{Id},\tau\}$ 对应的 $\mathbb{Q}(\zeta_8)$ 的不动子域分别为 $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right),\mathbb{Q}(\mathrm{i}),\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$.

提示 $\mathbb{Q}(\zeta_8)$ 的一组 $\mathbb{Q}$-基为 $\left\{1,\sqrt{2},\mathrm{i},\sqrt{2}\mathrm{i}\right\}$.

第四章 群论

4.1 群的定义

定义 4.1.1 二元组 $(G,\cdot)$ 称为群, 其中 G 为非空集合, 乘法 $\cdot$ 为二元运算

$$G\times G\to G,\quad (a,b)\mapsto a\cdot b$$

满足如下三条公理:

(G1) 结合律: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c),\forall a,b,c\in G$.

(G2) 有幺元: 存在 $1_G\in G$, 使得 $1_G\cdot a=a=a\cdot 1_G,\forall a\in G$.

(G3) 有逆元: 对任意 $a\in G$, 存在 $b\in G$, 使得 $a\cdot b=1_G=b\cdot a$, 记 $b=a^{-1}$.

有时简记 $(G,\cdot)$ 为 G, 乘法运算 $a\cdot b=ab$.

注记 4.1.2 满足 **(G1)** 和 **(G2)** 的称为含幺半群.

练习 4.1.3 群中幺元和逆元均是唯一的.

定义 4.1.4 若群 G 中运算还满足交换律, 则称 G 为交换群或 Abel 群.

引理 4.1.5 设 G 为群, 则有

(1) 乘法消去律: $ab=ac\implies b=c$.

(2) $ab=1_G\implies b=a^{-1}$.

(3) $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$.

(4) $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$.

(5) $a^{n+m}=a^n\cdot a^m,\forall n,m\in\mathbb{Z}$.

定义 4.1.6 非空子集 $H\subset G$ 称为 G 的子群, 若对任意 $a,b\in G$, 均有 $a\cdot b\in G,a^{-1}\in G$, 记作 $H\leqslant G$. 此时, H 也是群.

注记 4.1.7 每个群 G 均有平凡子群 $\{1_G\}$ 和 G.

例 4.1.8 (一般线性群) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})=\{A\in M_n(\mathbb{C}):\det(A)\neq 0\}$.

例 4.1.9 (特殊线性群) $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})=\{A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}):\det(A)=1\}$.

例 4.1.10 (正交群) $\mathrm{O}(n)=\left\{A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}):AA^{\mathsf{T}}=I_n\right\}$.

例 4.1.11 (特殊正交群) $\mathrm{SO}(n)=\{A\in\mathrm{O}(n):\det(A)=1\}$.

约定 4.1.12 加法群意指 Abel 群 A, 其二元运算记为 $+$, 幺元记为 0, 元素 $a\in A$ 的加法逆元 (负元) 记为 $-a$.

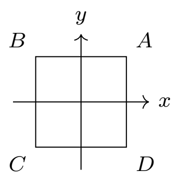
例 4.1.13 给定环 R, 自然有三个群: 加法群 $(R,+)$, 单位群 $(U(R),\cdot)$, 自同构群 $(\mathrm{Aut}(R),\circ)$. 实例如下:

R	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_n$	$\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$
$(R,+)$	$(\mathbb{Z},+)$	$(\mathbb{Z}_n,+)$	$(\mathbb{Z}[\mathrm{i}],+)\simeq(\mathbb{Z},+)\times(\mathbb{Z},+)$
$(U(R),\cdot)$	$\{\pm1\}$	$\{\overline{m}:1\leqslant m\leqslant n,\gcd(m,n)=1\}$	$\{\pm1,\pm\mathrm{i}\}$
$(\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}),\circ)$	$\{\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}\}$	$\{\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_n}\}$	$\left\{\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}[\mathrm{i}]},\sigma\right.$ (复共轭)$\left.\right\}$

例 4.1.14 考虑域扩张 K/k, 则 $\mathrm{Aut}(K/k)=\{\sigma\in\mathrm{Aut}(K):\sigma|_k=\mathrm{Id}_k\}\leqslant\mathrm{Aut}(K)$.

例 4.1.15 图形 $P\subset\mathbb{R}^n$ 的对称群 $\Sigma(P)=\{g\in\mathrm{O}(n):g(P)=P\}\leqslant\mathrm{O}(n)$. 称 $g\in\Sigma(P)$ 为 P 的对称. 如 $\mathbb{R}^2$ 中单位圆周 $\mathbb{S}^1$ 的对称群即 $\mathrm{O}(2)$.

练习 4.1.16 写出 $\mathbb{R}^2$ 中以原点为中心的正方形的对称群 (矩阵形式).



提示 四个旋转和四个镜面对称, $|\Sigma(\square)|=8$.

例 4.1.17 抽象集 X (无附加结构) 上的置换指双射 $\sigma:X\xrightarrow{\sim}X$, X 的对称群 $S(X)=\{X$ 上的所有置换$\}$. 如 $\mathrm{Aut}(R)\leqslant S(R)$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 同构于 $S(\mathbb{C}^n)$ 的子群.

定理 4.1.18 (Lagrange 定理) 设 G 为有限群, $H\leqslant G$, 则 $|H|\mid|G|$.

证明 定义 G 上关系 $\approx$ 为 $a\approx b\iff ab^{-1}\in H$, 容易验证 $\approx$ 是等价关系, 且任意 $a\in H$ 关于 $\approx$ 的等价类为 $Ha=\{ha:h\in H\}$, 称其为 H 的右陪集. 设 $G=\bigsqcup\limits_{i\in I}Ha_i$ 为 G 关于 H 的右陪集分解, 称 $\{a_i\}_{i\in I}$ 为 G 关于 H 的右陪集完全代表元系. 观察到对任意 $a\in G$, $|Ha|=|H|$, 因此 $|G|=|H|\cdot|I|$. $\square$

注记 4.1.19 $[G:H]\coloneqq|I|$ 称为 H 在 G 中的指数. 故 Lagrange 定理可表述为 $|G|=|H|\cdot[G:H]$.

练习 4.1.20 设 $H\leqslant G$. H 的左陪集 $aH=\{ah:h\in H\}$ 是 a 关于等价关系 $a\sim b\iff b^{-1}a\in H$ 的等价类.

练习 4.1.21 设 $H\leqslant G$. 若 $G=\bigsqcup\limits_{i\in I}Ha_i$, 则 $G=\bigsqcup\limits_{i\in I}a_i^{-1}H$.

例 4.1.22 设 $G=\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_2)$. 考虑 G 的子群 $H=\left\{\begin{pmatrix}\overline{1}&\overline{0}\\\overline{0}&\overline{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{1}&\overline{1}\\\overline{0}&\overline{1}\end{pmatrix}\right\}$ 与元素 $a=\begin{pmatrix}\overline{0}&\overline{1}\\\overline{1}&\overline{0}\end{pmatrix}$, 则 $Ha=\left\{\begin{pmatrix}\overline{0}&\overline{1}\\\overline{1}&\overline{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{1}&\overline{1}\\\overline{1}&\overline{0}\end{pmatrix}\right\}\neq\left\{\begin{pmatrix}\overline{0}&\overline{1}\\\overline{1}&\overline{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{0}&\overline{1}\\\overline{1}&\overline{1}\end{pmatrix}\right\}=aH$.

定义 4.1.23 元素 $a\in G$ 的阶是指最小的正整数 d 使得 $a^d=1_G$, 记为 $\mathrm{ord}(a)$. 若不存在这样的 d, 则记 $\mathrm{ord}(a)=\infty$.

注记 4.1.24 若 G 是有限群, 则 G 中任意元素 a 具有有限的阶, 且 $\mathrm{ord}(a)\mid|G|$.

例 4.1.25 设 p 为素数. 由注记 4.1.24, 对任意 $\overline{m} \in \mathbb{F}_p^\times$, 有 $\overline{m}^{p-1} = \overline{1}$. 这即是 Fermat 小定理.

命题 4.1.26 设 G 为群, $a \in G$. 若 $\mathrm{ord}(a) = d < \infty$, 则 $a^n = 1_G$ 当且仅当 $d \mid n$.

定义 4.1.27 设 G, G' 为群. 称映射 $f : G \to G'$ 为群同态, 若 $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b), \forall a, b \in G$. 双射的群同态称为群同构.

注记 4.1.28 f 是群同态蕴含了 $f(1_G) = 1_{G'}$ 及 $f(a)^{-1} = f\big(a^{-1}\big)$.

练习 4.1.29 设 $f : G \to G'$ 为群同态, $a \in G$, 则 $\mathrm{ord}(f(a)) \mid \mathrm{ord}(a)$. 若 f 是群同构, 则 $\mathrm{ord}(f(a)) = \mathrm{ord}(a)$.

注记 4.1.30 同构的群的阶表必定相同.

例 4.1.31 子群 $H \leqslant G$ 诱导包含同态 $\mathrm{inc} : H \to G$.

例 4.1.32 行列式映射 $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \twoheadrightarrow \mathbb{C}^\times$ 是群的满同态.

例 4.1.33 记 n 阶单位根群 $\mu_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\} \leqslant \mathbb{C}^\times$, 存在群同构

$$\mu_n \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}_n, +), \quad \mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{n}} \mapsto \overline{k}.$$

定义 4.1.34 设 G, H 是两个群, 在 $G \times H = \{(g, h) : g \in G, h \in H\}$ 中定义乘法为

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2).$$

则 $G \times H$ 是一个群, 称为 G 与 H 的直积, 其中 $1_{G \times H} = (1_G, 1_H)$, $(g, h)^{-1} = \big(g^{-1}, h^{-1}\big)$.

- 有自然同态
$$G \hookrightarrow G \times H, \quad g \mapsto (g, 1_H).$$
- 有投影同态
$$G \times H \twoheadrightarrow G, \quad (g, h) \mapsto g.$$
- $(g, h) = (g, 1_H) \cdot (1_G, h) = (1_G, h) \cdot (g, 1_H)$.

练习 4.1.35 考虑 $(g, h) \in G \times H$, 若 $\mathrm{ord}(g), \mathrm{ord}(h) < +\infty$, 则 $\mathrm{ord}(g, h) = \mathrm{lcm}(\mathrm{ord}(g), \mathrm{ord}(h))$.

例 4.1.36 Klein 四元群 $V_4 := \mu_2 \times \mu_2 = \{(\pm 1, \pm 1)\}$, 其阶表如下:

	$(1,1)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,-1)$
阶	1	2	2	2

特别地, V_4 无四阶元, 因此 $V_4 \not\simeq \mathbb{Z}_4$. 由命题 4.2.7, V_4 不是循环群. 由推论 4.2.12, V_4 是最小的非 Abel 群.

练习 4.1.37 存在群同构 $V_4 \simeq U(\mathbb{Z}_8)$.

定义 4.1.38 设 G 为群, $X \subset G$ 是任意子集, 则包含 X 的最小子群称为由 X 生成的子群, 记为 (X). 若 $(X) = G$, 则称 X 为 G 的生成元集. 当 X 是独点集 $\{x\}$ 时, 简记 $(\{x\})$ 为 $(x) := \{x^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

注记 4.1.39 (X) 中的元素是由 X 的元素出发, 经乘法及求逆运算所能得到的所有元素:

$$(X) = \{1_G\} \cup \big\{x_1 \cdots x_n : x_i \in X \text{ 或 } x_i^{-1} \in X, n \geqslant 1\big\}.$$

练习 4.1.40 证明：$(\mathbb{Q},+)\not\simeq(\mathbb{Q}^{\times},\cdot)$.

证明 假设存在群同构 $f:(\mathbb{Q},+)\xrightarrow{\sim}(\mathbb{Q}^{\times},\cdot)$, 取 $a\in\mathbb{Q}$ 使得 $f(a)=2$, 则 $2=f(a)=f\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)=f\left(\frac{a}{2}\right)^2$, 与 $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ 矛盾. □

练习 4.1.41 设 A,B 是群 G 的两个子群. 试证：$AB\leqslant G$ 当且仅当 $AB=BA$.

练习 4.1.42 设 a,b 是群 G 的任意两个元素. 试证：a 和 a^{-1}, ab 和 ba 有相同的阶.

4.2 循环群

定义 4.2.1 群 G 称为循环群, 若存在 $a\in G$ 使 $(a)=G$, 即 $G=\{a^n:n\in\mathbb{Z}\}$. 此时称 a 为 G 的生成元.

注记 4.2.2 循环群是 Abel 群.

练习 4.2.3 设 $G\simeq H$, 则 G 为循环群当且仅当 H 为循环群.

例 4.2.4 $(\mathbb{Z},+)$ 为循环群, 生成元为 1 或 -1.

例 4.2.5 $(\mathbb{Z}_n,+)$ 为循环群, $\bar{1}$ 或 $-\bar{1}$ 是生成元.

例 4.2.6 n 阶单位根群 μ_n 为循环群, $\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$ 是生成元.

命题 4.2.7 设 G 为循环群, 则 G 同构于 $(\mathbb{Z},+)$ 或 $(\mathbb{Z}_n,+)$.

利用命题 4.2.7 的同构可以得到

命题 4.2.8 设 G 为循环群, 生成元为 a.

(1) 若 $|G|=\infty$, 则 G 恰有两个生成元 a 和 a^{-1}, G 的子群有 $\{1_G\}$ 和 $\left(a^d\right)$, 其中 $d\geqslant 1$. 每个 $\left(a^d\right)$ 均同构于 $\mathbb{Z}$, 也同构于 G.

(2) 若 $|G|=n<\infty$, 则 G 恰有 $\varphi(n)$ 个生成元 a^k, 其中 $1\leqslant k\leqslant n,\gcd(k,n)=1$. 对于每个 $d\mid n$, 存在唯一的子群 $H_d=\left(a^{\frac{n}{d}}\right)$, 满足 $|H_d|=d$.

提示 对 (2), 利用例 2.2.29 对环 $\mathbb{Z}_n$ 理想的分类结果以及练习 4.2.10. 注意

$$\boxed{\text{群 }(\mathbb{Z}_n,+)\text{ 的子群 }=\text{ 环 }(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)\text{ 的理想}}$$

注记 4.2.9 由于 $\varphi(d)$ 恰为 G 中 d 阶元的个数, 我们再次得到 $n=\sum\limits_{d\mid n}\varphi(d)$.

练习 4.2.10 设 G 为群, $a\in G$. 若 $\operatorname{ord}(a)=n<\infty$, 则 $\operatorname{ord}(a^m)=\dfrac{n}{\gcd(m,n)}$.

命题 4.2.11 n 阶群 G 为循环群当且仅当 G 中存在 n 阶元.

推论 4.2.12 对于素数 p, p 阶群一定为循环群, 进而 $G\simeq(\mathbb{Z}_p,+)$.

证明 设 G 为 p 阶群. 任取 $1_G\neq a\in G$, 则 $\operatorname{ord}(a)>1$, 但 $\operatorname{ord}(a)\mid|G|=p$, 因此 $\operatorname{ord}(a)=p$. 由命题 4.2.11, G 为循环群. □

定理 4.2.13 设 G 为群, $|G|=n<\infty$, 则 G 为循环群当且仅当对任意 $d\mid n$, 至多存在一个 d 阶子群.

证明 $(\Rightarrow)$ 这即是命题 4.2.8 (2).

$(\Leftarrow)$ 对任意 $d \mid n$, 记 $S_d = \{g \in G : \operatorname{ord}(g) = d\}$, 由定理 4.1.18,

$$G = \bigsqcup_{d\mid n} S_d.$$

对任意 $g \in S_d$, $(g) \leqslant G$ 为 d 阶循环群, 由条件, (g) 不依赖于 $g \in S_d$ 的选取, 记之为 H_d, 则 $S_d \subset H_d$. 因此

$$n = |G| = \sum_{d\mid n} |S_d| \leqslant \sum_{d\mid n} \sharp\{H_d \text{ 生成元}\} = \sum_{d\mid n} \varphi(d) = n,$$

这说明 $|S_d| = \varphi(d), \forall d \mid n$. 特别地, $S_n \neq \varnothing$, 由命题 4.2.11, G 为循环群. $\square$

定理 4.2.14 *设 k 为域, $G \leqslant k^\times$ 为有限子群, 则 G 为循环群.*

证明 设 $|G| = n$, 对任意 $d \mid n$, 假设存在 G 的 d 阶子群 H, 下证 H 唯一. 注意到 $H \subset \operatorname{Root}_k(x^d - 1_k)$, 而 $\left|\operatorname{Root}_k(x^d - 1_k)\right| \leqslant d$, 故 $H = \operatorname{Root}_k(x^d - 1)$. 由定理 4.2.13, G 为循环群. $\square$

运用定理 4.2.14, 我们再次得到命题 3.4.13 的结论:

例 4.2.15 考虑有限域 $E/\mathbb{F}_p$, 则 $E^\times$ 为循环群, 即存在 $v \in E$ 使得 $E^\times = (v)$. 故 $E = \{\overline{0}\} \cup \left\{\overline{1}, v, \cdots, v^{|E|-2}\right\}$, $E = \mathbb{F}_p(v)$ 为单扩张.

利用定理 4.2.14 还可以确定乘法群 $\mathbb{C}^\times$ 的所有有限子群:

例 4.2.16 设 $G \leqslant \mathbb{C}^\times$ 为有限子群, $|G| = n$, 则 $G = \mu_n$ (n 阶单位根群).

练习 4.2.17 乘法群 $\mathbb{C}^\times$ 不是循环群.

证明 假设 $\mathbb{C}^\times$ 是循环群, 由命题 4.2.7, $\mathbb{C}^\times \simeq \mathbb{Z}$, 从而 $\mathbb{C}^\times$ 中除去 1 外任意元素的阶为 ∞. 这与 $\mathbb{C}^\times$ 存在有限子群 μ_n 矛盾. $\square$

例 4.2.18 由定理 4.2.14, $\mathbb{F}_9^\times = \mathbb{F}_3[x]/\left(x^2 + \overline{1}\right)$ 是循环群. 由于 $u = \overline{x}$ 满足 $u^2 = \overline{2}$, $u^3 = \overline{2}u$, $u^4 = \overline{1}$, 因此 $\{\overline{1}, \overline{2}, u, \overline{2}u\}$ 是 $\mathbb{F}_9^\times$ 的 4 阶子群. 又 $\mathbb{F}_9^\times$ 共有 $\varphi(8) = 4$ 个生成元, 故余下的 $u + \overline{1}, u + \overline{2}, \overline{2}u + \overline{1}, \overline{2}u + \overline{2}$ 均为 $\mathbb{F}_9^\times$ 的生成元.

练习 4.2.19 $(\mathbb{Q}, +)$ 不是循环群, 但它的任意有限生成的子群都是循环群.

证明 设 $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. 取素数 p 满足 $p \nmid n$, 则 $\dfrac{1}{p} \notin \left(\dfrac{m}{n}\right)$. 这表明 $(\mathbb{Q}, +)$ 不是循环群. 欲证 $(\mathbb{Q}, +)$ 的有限生成子群是循环群, 由归纳法只需证由两个元素生成的子群是循环群. 设 $H = \left(\dfrac{m}{n}, \dfrac{t}{s}\right)$, 令 $d = \gcd(ms, nt)$. 则由 Bézout 等式, 存在 $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ 使得 $d = \lambda ms + \mu nt$, 从而 $\dfrac{d}{ns} = \lambda \cdot \dfrac{m}{n} + \mu \cdot \dfrac{t}{s} \in H$. 又

$$\frac{m}{n} = \frac{ms}{ns} \in \left(\frac{d}{ns}\right), \quad \frac{t}{s} = \frac{nt}{ns} \in \left(\frac{d}{ns}\right),$$

故 $H = \left(\dfrac{d}{ns}\right)$ 为循环群. $\square$

练习 4.2.20 设 p 为素数, $G = \left\{x \in \mathbb{C} : \text{ 存在正整数 } n \text{ 使得 } x^{p^n} = 1\right\}$, 则 G 对于复数的乘法构成群. 试证 G 的任意真子群都是有限阶的循环群.

证明 设 H 是 G 的真子群, 取 $g \in G \setminus H$. 设 $\mathrm{ord}(g) = p^n$, 则 H 中任一元素的阶为 p^m, $m < n$. 否则, $\mu_{p^m} \leqslant H$, 而 $g \in \mu_{p^m}$, 与 $g \notin H$ 矛盾. 故可设 h 是 H 中阶最大的元素, 进而 $H = (h)$. □

4.3 正规子群与商群

考虑群同态 $f: G \to H$, 则 f 的像 $\mathrm{Im}(f) \leqslant H$ 是子群. 回顾定义 1.1.16, f 诱导 G 上的等价关系:

$$a \overset{f}{\sim} b \iff f\left(ab^{-1}\right) = 1_H \iff f\left(b^{-1}a\right) = 1_H.$$

应该注意, 一般而言 $ab^{-1} \neq b^{-1}a$, 但有相似 (共轭) 关系: $ab^{-1} = a\left(b^{-1}a\right)a^{-1}$.

定义 4.3.1 定义群同态 $f: G \to H$ 的核为 $\mathrm{Ker}(f) = \{g \in G : f(g) = 1_H\}$.

注记 4.3.2 $\mathrm{Ker}(f) \leqslant G$ 为子群.

令 $N = \mathrm{Ker}(f)$, 则 $a \in Nb \iff ab^{-1} \in N \iff b^{-1}a \in N \iff a \in bN$, 即 $Nb = bN, \forall b \in G$.

定义 4.3.3 子群 $N \leqslant G$ 称为正规子群, 若 $aN = Na, \forall a \in G$, 记为 $N \lhd G$.

注记 4.3.4 (1) 设 $f: G \to H$ 为群同态, 则 $\mathrm{Ker}(f) \lhd G$.

(2) 若群 G 为 Abel 群, 则 G 的任意子群均正规.

定义 4.3.5 群 G 的中心定义为 $Z(G) = \{g \in G : gh = hg, \forall h \in G\}$.

练习 4.3.6 设 G 为群, 则 $Z(G) \lhd G$.

定义 4.3.7 设 G 为群, $H \leqslant G$, $a \in G$. 定义 H 的共轭 $aHa^{-1} = \left\{aha^{-1} : h \in H\right\}$.

练习 4.3.8 在定义 4.3.7 中, $aHa^{-1} \leqslant G$, 且有内自同构 $H \xrightarrow{\sim} aHa^{-1}$.

命题 4.3.9 设 $H \leqslant G$ 为子群, 则 $H \lhd G$ 当且仅当 $H = aHa^{-1}, \forall a \in G$.

例 4.3.10 设 $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ $(n \geqslant 2)$, H 为 G 中全体上三角方阵构成的集合, 则 $H \leqslant G$ 但 H 不是正规子群, 因为总可用 G 中方阵将 H 中方阵相似下三角化.

例 4.3.11 由 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ 是 $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times$ 的核知, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \lhd \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

例 4.3.12 设 $H \leqslant G$ 为子群. 若 $[G : H] = 2$, 则 $H \lhd G$. 提示 $G = G \sqcup (G \setminus H)$.

例 4.3.13 考虑 $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$. 设 $H = \left\{\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0}\end{pmatrix}\right\}$, $N = \left(\begin{pmatrix}\overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1}\end{pmatrix}\right)$. 则 $H \leqslant G$ 但 H 不是正规子群, 因为

$$\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1}\end{pmatrix} \notin H.$$

而 $|N| = 3$, $|G| = 6$, $[G : N] = 2$, 由例 4.3.12, $N \lhd G$.

定义 4.3.14 设 G 为群, $N \lhd G$. 在陪集空间 $G/N = \{\overline{a} = aN : a \in G\}$ 上定义乘法运算

$$aN \cdot bN = abN, \quad a, b \in G.$$

这使得 G/N 构成一个群, 称为 G 模 N 的商群.

注记 4.3.15 (1) 在商群 G/N 中, $\overline{a}=\overline{b} \iff a^{-1}b\in N \iff ba^{-1}\in N$. 由此可验证 G/N 中乘法的良定性与结合律.

(2) G/N 中幺元为 $1_{G/N}=\overline{1}$, 而逆由 $\overline{a}^{-1}=\overline{a^{-1}}$ 给出.

(3) 有典范群同态

$$\begin{aligned}\mathrm{can}: G &\twoheadrightarrow G/N\\ a &\mapsto \overline{a}.\end{aligned}$$

其核 $\mathrm{Ker}(\mathrm{can})=N$.

定理 4.3.16 (群同态基本定理) 设 $f:G\to H$ 为群同态, 则唯一存在群同构

$$\bar{f}: R/\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(f)$$

使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & H \\ G/\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, hook, "\mathrm{inc}"'] \end{tikzcd}$$

提示 由定理 1.1.19, 只需验证 $\bar{f}$ 为群同态.

注记 4.3.17 (1) 若 f 是单的, 即 $\mathrm{Ker}(f)=\{1_G\}$, 则 $G\simeq \mathrm{Im}(f)\leqslant H$.

(2) 若 f 是满的, 即 $\mathrm{Im}(f)=H$, 则 $H\simeq G/\mathrm{Ker}(f)$.

例 4.3.18 在练习 4.1.16 中, 记 $V=\{A,B,C,D\}$, 则任意 $g\in\Sigma(\square)$ 均满足 $g|_V$ 为 V 的置换. 因此有群同态

$$\begin{aligned}\phi:\Sigma(\square)&\to S(V)\\ g&\mapsto g|_V.\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Ker}\,\phi=\{I_2\}$ 即 ϕ 是单射, 由定理 4.3.16, $\Sigma(\square)$ 同构于 $S(V)$ 的一个 8 阶子群.

例 4.3.19 考虑 $x^3-2\in\mathbb{Q}[x]$ 的分裂域 $E=\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{2},\omega\big)$ 及其根集 $X=\mathrm{Root}_E\big(x^3-2\big)=\Big\{\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2}\omega,\sqrt[3]{2}\omega^2\Big\}$. 对任意 $\sigma\in\mathrm{Aut}(E/\mathbb{Q})=\mathrm{Aut}(E)$, $\sigma|_X\in S(X)$, 因此有自然群同态

$$\begin{aligned}\phi:\mathrm{Aut}(E)&\to S(X)\\ \sigma&\mapsto \sigma|_X.\end{aligned}$$

利用 E 是 $\mathbb{Q}$-线性空间 ($\mathbb{Q}$-基见例 3.2.7) 可知 ϕ 是单射. 又 $|\mathrm{Aut}(E)|=6=|S(X)|$, 由定理 4.3.16, ϕ 是群同构, $\mathrm{Aut}(E)\simeq S(X)$. 特别地, $\mathrm{Aut}(E/\mathbb{Q})$ 是非 Abel 群.

练习 4.3.20 在例 4.3.19 中, 存在群同构 $S(X)\simeq \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_2)$.

证明 记 $u=\big(\overline{1},\overline{0}\big)^{\mathsf{T}}, v=\big(\overline{0},\overline{1}\big)^{\mathsf{T}}, w=\big(\overline{1},\overline{1}\big)^{\mathsf{T}}$. 观察到 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_2)$ 中任一方阵诱导集合 $\{u,v,w\}$ 上的一个置换, 因此存在群同态 $f:\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_2)\to S(X)$. 可验证 f 是单的, 又 $|\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_2)|=6=|S(X)|$, 由定理

4.3.16, f 是群同构. 具体而言, 群同构 $f : \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_2) \xrightarrow{\sim} S(X)$ 如下:

$$\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{pmatrix} \mapsto (123), \quad \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{pmatrix} \mapsto (12), \quad \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{pmatrix} \mapsto (132),$$
$$\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix} \mapsto (13), \quad \begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{pmatrix} \mapsto (23), \quad I \mapsto \mathrm{Id}. \qquad \square$$

定理 4.3.21 (对应定理) 设 G 为群, $N \lhd G$, 则存在双射

$$\begin{aligned} \{K : N \leqslant K \leqslant G\} &\xleftrightarrow{1:1} \{G/N \text{ 的子群}\} \\ K &\longmapsto K/N \\ \{a \in G : aN \in \overline{K}\} &\longleftarrow\!\shortmid\ \overline{K}. \end{aligned}$$

定理 4.3.22 设 G 为群, $N \leqslant K \leqslant G$, $N \lhd G$. 则 $K \lhd G$ 当且仅当 $K/N \lhd G/N$. 此时, 有自然同构

$$(G/N)/(K/N) \xrightarrow{\sim} G/K, \quad (aN)K/N \mapsto aK.$$

证明 (1) 若 $K \lhd G$, 则有群的满同态

$$G/N \twoheadrightarrow G/K, \quad aN \mapsto aK.$$

其良定性检验: $aN = a'N \iff a^{-1}a' \in N \implies a^{-1}a' \in K \iff aK = a'K$. 此同态的核为 $\{aN : aK = 1_{G/K}\} = \{aN : a \in K\} = K/N$. 因此 $K/N \lhd G/N$.

(2) 若 $K/N \lhd G/N$, 由命题 4.3.9, 对任意 $gN \in G/N$, $(gN)(K/N) = (gN)^{-1}$, 于是 $\left(gKg^{-1}\right)/N = K/N, \forall g \in G$. 又 $N \leqslant K$, $N \leqslant gKg^{-1}$, 由定理 4.3.21 中的双射即得 $gKg^{-1} = K, \forall g \in G$. 再由命题 4.3.9, $K \lhd G$.

(3) 若 $K \lhd G$, 对 (1) 中满同态运用定理 4.3.16 即得 $(G/N)/(K/N) \xrightarrow{\sim} G/K$. □

定理 4.3.23 设 G 为群, $N \lhd G$, $H \leqslant G$, 则

(1) $NH = HN \leqslant G$.

(2) $(H \cap N) \lhd H$.

(3) $H/(H \cap N) \simeq NH/N$.

证明 由 $N \lhd G$ 知 $Nh = hN, \forall h \in H$, 令 h 遍历 H 即得 $NH = HN$. 由此易得 $NH \leqslant G$. 于是有群的满同态

$$H \twoheadrightarrow NH/N, \quad h \mapsto hN.$$

其核为 $\{h \in H : hN = 1_{NH/N}\} = \{h \in H : h \in N\} = N \cap H$. 故 $(N \cap H) \lhd H$, 且由定理 4.3.16, 存在群同构

$$H/(H \cap N) \xrightarrow{\sim} NH/N. \qquad \square$$

例 4.3.24 设 G, H 为群. 考虑投影同态

$$G \times H \twoheadrightarrow H, \quad (g,h) \mapsto h.$$

其核为 $(G\times\{1_H\})\lhd(G\times H)$. 由定理 4.3.16, 存在群同构

$$(G\times H)/(G\times\{1_H\})\xrightarrow{\sim}H.$$

练习 4.3.25 设有群同构 $\theta:G\xrightarrow{\sim}G'$, $N\lhd G$, $N'=\theta(N)\lhd G'$, 则 $G/N\simeq G'/N'$.

练习 4.3.26 令 G 是实数对 $(a,b),a\neq 0$ 带有乘法 $(a,b)(c,d)=(ac,ad+b)$ 的群. 试证：$K=\{(1,b):b\in\mathbb{R}\}\lhd G$ 且 $G/K\simeq(\mathbb{R}^\times,\cdot)$. 提示 第一分量投影同态.

练习 4.3.27 设 $f:G\to H$ 是群同态, $M\leqslant G$. 试证 $f^{-1}(f(M))=KM$, 这里 $K=\mathrm{Ker}(f)$.

练习 4.3.28 设 M 和 N 均为群 G 的正规子群. 若 $M\cap N=\{1_G\}$, 则对任意 $a\in M$, $b\in N$ 有 $ab=ba$. 提示 $b^{-1}aba^{-1}\in M\cap N$.

练习 4.3.29 若 $G/Z(G)$ 是循环群, 则 G 是 Abel 群.

证明 设 $G/Z(G)=(gZ(G))$, 其中 $g\in G$. 对任意 $a,b\in G$, 存在 $c,d\in Z(G)$ 使得 $a=g^mc,b=g^nd$. 由此可见 $ab=ba$, 即 G 是 Abel 群. □

4.4 对称群

定义 4.4.1 记 n 元集合 $\underline{n}=\{1,\cdots,n\}$ 的对称群为 S_n, 称为 n 次的对称群或置换群.

注记 4.4.2 $|S_n|=n!$.

命题 4.4.3 设有集合间双射 $\delta:X\to Y$, 则有群同构

$$S(X)\xrightarrow{\sim}S(Y),\quad \sigma\mapsto\delta\circ\sigma\circ\delta^{-1}.$$

推论 4.4.4 若集合 X 满足 $|X|=n$, 则 $S(X)\simeq S_n$.

约定 4.4.5 当 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列时, 可将一个置换 $\sigma\in S_n$ 记为

$$\sigma=\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n\\ \sigma(j_1) & \sigma(j_2) & \cdots & \sigma(j_n)\end{pmatrix}.$$

例 4.4.6 在 S_3 中, 考虑 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ 及 $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$, 则 $\sigma\circ\tau\neq\tau\circ\sigma$.

例 4.4.7 对任意正整数 n, 有群嵌入

$$S_n\hookrightarrow S_{n+1},\quad \sigma\mapsto\overline{\sigma}=\begin{pmatrix}1&\cdots&n&n+1\\ \sigma(1)&\cdots&\sigma(n)&n+1\end{pmatrix}.$$

于是结合例 4.4.6 即知, 当 $n\geqslant 3$ 时, S_n 是非 Abel 群.

定义 4.4.8 设 $\{i_1,i_2,\cdots,i_t\}\subset\{1,2,\cdots,n\}$. 若 $c\in S_n$ 满足

$$\begin{tikzcd} & i_1 \arrow[r, mapsto, "c"] & i_2 \arrow[dr, "c"] & \\ i_t \arrow[ur, "c"] & & & i_3 \arrow[dl, "c"] \\ & \cdots\cdots \arrow[ul, "c"] & & \end{tikzcd} \quad \text{且} \quad c(j)=j, \forall j\in \underline{n}\setminus\{i_1,i_2,\cdots,i_t\},$$

则称 c 为 S_n 中的一个 t-轮换 (又称循环), 记为 $c=(i_1i_2\cdots i_t)$. 称 $i_1,i_2,\cdots,i_t$ 为轮换 c 中的文字, t 称为轮换 c 的长. 特别地, 2-轮换称为对换, 1-轮换实际上就是恒等置换.

注记 4.4.9 (1) $c^{-1}=(i_t\cdots i_2i_1)$.

(2) $\mathrm{ord}(c)=t$.

(3) 任一个 t-轮换都有 t 种表示法.

(4) S_n 中 t-轮换共有 $\dfrac{n!}{t}$ 个.

例 4.4.10 (辫结构) 在 S_3 中, $(12)(23)(12)=(23)(12)(23)$. 提示〉用引理 4.4.12 简算.

定义 4.4.11 在 S_n 中, 如果若干个轮换间没有共同文字, 则称它们是不相交的轮换.

引理 4.4.12 (t-轮换的共轭) 对任意 $\sigma\in S_n$ 与 t-轮换 $(i_1i_2\cdots i_t)\in S_n$, 有

$$\sigma(i_1i_2\cdots i_t)\sigma^{-1}=(\sigma(i_1)\sigma(i_2)\cdots\sigma(i_t)).$$

提示〉观察 LHS 在 $\sigma(i_r)$ 上的作用.

引理 4.4.13 S_n 中两个不相交的轮换是可交换的.

证明 设 $\sigma,\tau\in S_n$ 为两个不相交的轮换, $\tau=(i_1i_2\cdots i_t)$, 由引理 4.4.12,

$$\sigma\tau\sigma^{-1}=(\sigma(i_1)\sigma(i_2)\cdots\sigma(i_t))\xlongequal{\text{不相交}}(i_1i_2\cdots i_t)=\tau\implies\sigma\tau=\tau\sigma.$$ □

命题 4.4.14 (轮换分解) 任何 $\sigma\in S_n$ 均可表为 $\sigma=c_1\cdots c_l$, 其中 c_i 为互不相交的轮换 (不含 1-轮换). 如果不计次序, 则表法是唯一的. 提示〉考虑 $\underline{n}$ 上的 σ-轨道.

定义 4.4.15 称群 G 中元素 a 与 b 共轭, 若存在 $g\in G$ 使得 $a=gbg^{-1}$. 这是 G 上的等价关系, 其等价类称为共轭类. 通常记元素 a 所在的共轭类为 C_a.

注记 4.4.16 $C_a=\{a\}\iff a\in Z(G)$.

定义 4.4.17 设 $\sigma\in S_n$ 可表为 $c_1\cdots c_t$, 其中 c_i 为互不相交的轮换 (包括 1-轮换), 并用 λ_i 表示其中长为 i 的轮换个数. 定义 σ 的循环型为 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$, 它满足 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i\lambda_i=n$.

注记 4.4.18 $\mathrm{ord}(\sigma)=\mathrm{lcm}(i:\lambda_i\neq 0)$.

定理 4.4.19 S_n 中两元素共轭当且仅当它们具有相同的循环型.

证明 ($\Rightarrow$) 任取 $\sigma\in S_n$, 设 $\sigma=c_1\cdots c_t$, 其中 c_i 为互不相交的轮换, 则对任意 $h\in S_n$, $h\sigma h^{-1}=(hc_1h^{-1})\cdots(hc_th^{-1})$. 由引理 4.4.12 立见 σ 与 $h\sigma h^{-1}$ 同型.

($\Leftarrow$) 设 $\sigma, \tau \in S_n$ 具有相同的循环型:

$$\sigma = (a_1)\cdots(a_s)(i_1 i_2)\cdots(i_{2r-1} i_{2r})\cdots,$$
$$\tau = (b_1)\cdots(b_s)(j_1 j_2)\cdots(j_{2r-1} j_{2r})\cdots.$$

取 $h \in S_n$ 满足 $h(a_1) = b_1, \cdots, h(a_s) = b_s, h(i_1) = j_1, h(i_2) = j_2, \cdots, h(i_{2r-1}) = j_{2r-1}, h(i_{2r}) = j_{2r}, \cdots$. 易见 $h\sigma h^{-1} = \tau$ 即 σ 与 τ 共轭. □

例 4.4.20 由定理 4.4.19 可得 S_3 的共轭类 (表 4.1).

表 4.1: S_3 的共轭类 $\boxed{6 = 1 + 3 + 2}$

循环型	1^3	$1^1 2^1$	3^1
元素	Id	$(12), (13), (23)$	$(123), (132)$

由此可知在 S_3 中 (12) 与 (13) 共轭, 为求 $h \in S_3$ 使得 $h(12)h^{-1} = (13)$, 利用引理 4.4.12, 只需求解 $(h(1)h(2)) = (13)$. 故分别解

$$\begin{cases} h(1) = 1, \\ h(2) = 3 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} h(1) = 3, \\ h(2) = 1 \end{cases}$$

得 $h = (23)$ 或 $h = (132)$.

例 4.4.21 由定理 4.4.19 可得 S_4 的共轭类 (表 4.2).

表 4.2: S_4 的共轭类 $\boxed{24 = 1 + 6 + 3 + 8 + 6}$

循环型	1^4	$1^2 2^1$	2^2	$1^1 3^1$	4^1
元素	Id	$(12), (13),$ $(14), (23),$ $(24), (34)$	$(12)(34),$ $(13)(24),$ $(14)(23)$	$(123), (132), (124), (142),$ $(134), (143), (234), (243)$	$(1234), (1243),$ $(1324), (1342),$ $(1423), (1432)$

观察到群嵌入 $S_3 \hookrightarrow S_4$ (例 4.4.7) 对共轭不封闭, 由命题 4.3.9, S_3 不是 S_4 的正规子群.

注记 4.4.22 由注记 4.4.16, 从例 4.4.20 与例 4.4.21 可见, $Z(S_3)$ 与 $Z(S_4)$ 均平凡.

例 4.4.23 在练习 4.1.16 中, 代 A, B, C, D 以 $1, 2, 3, 4$. 映射 $\Sigma(\square) \hookrightarrow S_4$ 的像 H 为

(1) **四个旋转**: $\mathrm{Id}, (1234), (13)(24), (1432)$.

(2) **四个镜面对称**: $(14)(23), (12)(34), (24), (13)$.

由表 4.2 可见, $H \leqslant S_4$ 对共轭不封闭, 因此 H 不是 S_4 的正规子群.

练习 4.4.24 在例 4.4.23 中,

(1) $H = \langle(1234), (13)\rangle$.

(2) 另代练习 4.1.16 中的 A, B, C, D 以 $1, 3, 2, 4$, 求映射 $\Sigma(\square) \hookrightarrow S_4$ 的像 H'.

(3) 另代练习 4.1.16 中的 A, B, C, D 以 $1, 2, 4, 3$, 求映射 $\Sigma(\square) \hookrightarrow S_4$ 的像 H''.

(4) 求 $H\cap H'\cap H''$.

解答 (1) 在 S_4 中, $\mathrm{ord}(1234)=4$ 且 $(13)\notin\langle(1234)\rangle$, 因此 $|\langle(1234),(13)\rangle|\geqslant 5$. 又 $\langle(1234),(13)\rangle\leqslant H$, $|H|=8$, 由定理 4.1.18, $|\langle(1234),(13)\rangle|=8$, 故 $H=\langle(1234),(13)\rangle$.

(2) $H'=\{\mathrm{Id},(1324),(12)(34),(1423),(14)(23),(13)(24),(12),(34)\}$.

(3) $H''=\{\mathrm{Id},(1243),(14)(23),(1342),(13)(24),(12)(34),(14),(23)\}$.

(4) $H\cap H'\cap H''=\{\mathrm{Id},(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}\lhd S_4$, 其正规性见表 4.2. □

注记 4.4.25 (4) 中得到的子群记作 K_4, 因其同构于 Klein 四元群 (例 4.1.36).

引理 4.4.26 任意 $\sigma\in S_n$ 均能写成对换之积.

证明 任一 t-轮换都可写成 $t-1$ 个对换之积: $(i_1i_2\cdots i_t)=(i_{t-1}i_t)\cdots(i_2i_t)(i_1i_t)$. □

引理 4.4.27 S_n 可由 $(12),(23),\cdots,(n-1,n)$ 生成.

证明 只需证任意 $(ij)\in\langle(12),(23),\cdots,(n-1,n)\rangle$. 对 $|j-i|$ 归纳, 当 $|j-i|=1$ 时结论已成立. 当 $|j-i|>1$ 时, $(ij)=(i+1,j)(i,i+1)(i+1,j)$, 对 $(i+1,j)$ 归纳即证. □

注记 4.4.28 对 $1\leqslant i\leqslant n-1$, 通常记 $s_i=(i,i+1)\in S_n$. 因此 S_n 由 $s_1,s_2\cdots,s_{n-1}$ 生成. 有如下辫子关系:

$$\begin{aligned}
s_is_{i+1}s_i&=s_{i+1}s_is_{i+1},\quad \forall 1\leqslant i\leqslant n-2,\\
s_is_j&=s_js_i,\quad \forall |i-j|\geqslant 2,\\
s_i^2&=\mathrm{Id},\quad \forall 1\leqslant i\leqslant n-1.
\end{aligned}$$

例 4.4.29 存在群同态

$$S_n\hookrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),\quad \sigma\mapsto P_\sigma \text{ 置换方阵}.$$

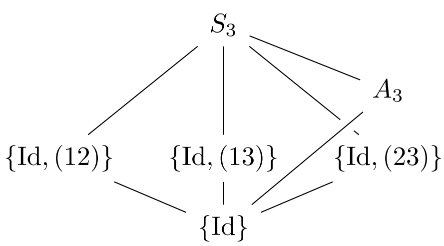
将其与行列式同态复合便得群同态

$$\begin{aligned}
\mathrm{sgn}:S_n&\to\{1,-1\}\\
\sigma&\mapsto\det(P_\sigma).
\end{aligned}$$

若 $\mathrm{sgn}(\sigma)=1$, 称 σ 为偶置换; 若 $\mathrm{sgn}(\sigma)=-1$, 称 σ 为奇置换. 定义 $A_n=\mathrm{Ker}(\mathrm{sgn})$, 称为 n 元集合上的交错群, 则 A_n 的元素为全体偶置换, $A_n\lhd S_n$. 由定理 4.3.16, $S_n/A_n\simeq\{\pm1\}$, $|A_n|=\dfrac{n!}{2}$. 由引理 4.4.26, $\mathrm{sgn}(i_1i_2\cdots i_t)=(-1)^{t-1}$.

例 4.4.30 由表 4.1, $A_3=\{\mathrm{Id},(123),(132)\}\lhd S_3$.

例 4.4.31 (S_3 的子群格) 对 S_3 的子群作分类 (用线表示包含关系, 称为 Hasse 图):



例 4.4.32 在表 4.2 中, A_4 为循环型 $1^4, 2^2, 1^1 3^1$ 对应共轭类之并, 因此 $A_4 \lhd S_4$.

例 4.4.33 对 S_4 的正规子群分类: $\{\mathrm{Id}\} \leqslant K_4 \leqslant A_4 \leqslant S_4$ (利用子群正规当且仅当是共轭类之并).

定义 4.4.34 若群 G 不具有除 $\{1_G\}, G$ 之外的正规子群, 则称 G 为单群.

练习 4.4.35 设 $G \neq \{1_G\}$ 为 Abel 群, 则 G 为单群当且仅当 G 为 p 阶循环群, 其中 p 为素数.

证明 由于 G 为 Abel 群, G 的任意子群均是正规子群.

($\Rightarrow$) 任取 $a \in G \setminus \{1_G\}$, 则 $(a) \lhd G$, 因此 $G = (a)$ 为循环群. 由任意非 1_G 元素均为生成元即知 G 为素数阶循环群.

($\Leftarrow$) 若 G 为 p 阶循环群, 由定理 4.1.18, G 无非平凡子群, 进而为单群. □

定理 4.4.36 当 $n \geqslant 5$ 时, 交错群 A_n 是单群.

证明 (1) 先证明当 $n \geqslant 3$ 时, A_n 由所有 3-轮换生成. 对于互不相同的 i, j, k, l, 有 $(ij)(ik) = (jik), (ij)(kl) = (ij)(jk)(jk)(kl) = (ijk)(jkl)$, 因此两个不同的对换之积一定是 3-轮换之积, 而 A_n 中任何元素都可以写成偶数个对换之积, 因此 A_n 由 3-轮换生成.

(2) 再证明当 $n \geqslant 5$ 时, A_n 中所有 3-轮换是一个共轭类. 对任意 3-轮换 (ijk), 存在 $\sigma \in S_n$ 使得 $\sigma(i) = 1, \sigma(j) = 2, \sigma(k) = 3$. 若 $\sigma \in A_n$, 则 $\sigma(ijk)\sigma^{-1} = (123)$; 若 $\sigma \notin A_n$, 则 $(45)\sigma \in A_n$, 且 $(45)\sigma(ijk)\sigma^{-1}(45) = (123)$. 因此所有 3-轮换都与 (123) 共轭.

(3) 下证 A_n 无非平凡正规子群. 由 (1)(2), 只需证若 $\{\mathrm{Id}\} \neq N \lhd A_n$, 则 N 含有一个 3-轮换. 以下记任意置换 σ 的不动点集为 $\mathrm{Fix}(\sigma) \coloneqq \{i : \sigma(i) = i\}$. 取 $\sigma \in N \setminus \{\mathrm{Id}\}$ 使得 $|\mathrm{Fix}(\sigma)|$ 最大, 下证 σ 即欲求的 3-轮换.

① 如果 σ 的轮换分解中只有对换, 那么分解中至少含两项如 $(ij)(kl)$, 其中 $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \varnothing$. 由于 $n \geqslant 5$, 可取 $r \notin \{i, j, k, l\}$ 并定义

$$\tau \coloneqq (klr), \quad \sigma' \coloneqq \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} \in N \quad (\because N \lhd A_n).$$

可直接验证 $i, j \in \mathrm{Fix}(\sigma') \setminus \mathrm{Fix}(\sigma)$, $\sigma'(k) = r \neq k$, 以及

$$\mathrm{Fix}(\sigma) \setminus \{r\} = \mathrm{Fix}(\sigma) \setminus \{k, l, r\} = (\mathrm{Fix}(\sigma) \cap \mathrm{Fix}(\tau)) \subset \mathrm{Fix}(\sigma').$$

故 $|\mathrm{Fix}(\sigma')| > |\mathrm{Fix}(\sigma)|$, 矛盾.

② 设 σ 的轮换分解中包含长 > 2 的项 $(ijk\cdots)$. 若 $\sigma = (ijk)$ 则 σ 即所求的 3-轮换; 否则因为 σ 不可能是 4-轮换, σ 除了 i, j, k 之外还挪动至少两个相异元 r, l. 依然如 ① 定义 $\sigma' \in N$. 可以验证 $j \in \mathrm{Fix}(\sigma')$, $\sigma'(k) = l \neq k$ 和

$$\mathrm{Fix}(\sigma) = \mathrm{Fix}(\sigma) \setminus \{k, l, r\} = (\mathrm{Fix}(\sigma) \cap \mathrm{Fix}(\tau)) \subset \mathrm{Fix}(\sigma').$$

仍得到矛盾 $|\mathrm{Fix}(\sigma')| > |\mathrm{Fix}(\sigma)|$. 故 σ 只能为 3-轮换. □

推论 4.4.37 当 $n \geqslant 5$ 时, A_n 是 S_n 唯一的非平凡正规子群.

证明 设 $\{\mathrm{Id}\} \neq N \lhd S_n$, 结合 $A_n \lhd S_n$ 即得 $(N \cap A_n) \lhd A_n$.

- 若 $N \cap A_n = A_n$, 则 $A_n \subset N$, 而 $[S_n : A_n] = 2$, 故 $N = A_n$.

◇ 若 $N \cap A_n = \{\mathrm{Id}\}$, 考虑群同态

$$A_n \xhookrightarrow{\text{inc}} S_n \twoheadrightarrow S_n/N,$$

因其核即 $N \cap A_n = \{\mathrm{Id}\}$, 这是群嵌入. 因此 $|N| = 2$. 取 $\sigma \in N \setminus \{\mathrm{Id}\}$, 则 $\mathrm{ord}(\sigma) = 2$. 由命题 4.4.14 与注记 4.4.18, σ 是不交对换之积. 由定理 4.4.19 易见 N 对共轭不封闭, 与 $N \lhd S_n$ 矛盾. □

例 4.4.38 由例 4.3.12 与定理 4.4.36 即知, A_5 无 30 阶子群.

练习 4.4.39 在 A_4 中求解方程 $\sigma(12)(34)\sigma^{-1} = (13)(24)$.

解答 由引理 4.4.12, $\sigma(12)(34)\sigma^{-1} = \big(\sigma(12)\sigma^{-1}\big)\big(\sigma(34)\sigma^{-1}\big) = (\sigma(1)\sigma(2))(\sigma(3)\sigma(4))$.

◇ $\begin{cases} (\sigma(1)\sigma(2)) = (13), \\ (\sigma(3)\sigma(4)) = (24) \end{cases} \implies \sigma = \underbrace{(23)}_{\notin A_4}, (132), (234), \underbrace{(1342)}_{\notin A_4}.$

◇ $\begin{cases} (\sigma(1)\sigma(2)) = (24), \\ (\sigma(3), \sigma(4)) = (13) \end{cases} \implies \sigma = \underbrace{(1243)}_{\notin A_4}, (143), (143), (124), \underbrace{(14)}_{\notin A_4}.$

故 $\sigma = (132), (234), (143), (124)$. □

照此计算可知 A_4 中 $(12)(34)$ 与 $(14)(23)$ 共轭, 但 (123) 与 (132) 不共轭 (尽管它们在 S_4 中共轭).

练习 4.4.40 分别求 A_4 中 (123) 和 (132) 的共轭类.

解答 A_4 中 (123) 和 (132) 的共轭类均为 3^1 型, 因此 $|C_{(123)}| + |C_{(132)}| \leqslant 8$, 若能分别找到 $C_{(123)}$ 与 $C_{(132)}$ 中的 4 个元素, 则它们恰为欲求共轭类. 直接计算得:

$$\begin{aligned}
(12)(34)(123)(34)^{-1}(12)^{-1} &= (142), \\
(13)(24)(123)(24)^{-1}(13)^{-1} &= (134), \\
(14)(23)(123)(23)^{-1}(14)^{-1} &= (243), \\
(12)(34)(132)(34)^{-1}(12)^{-1} &= (124), \\
(13)(24)(132)(24)^{-1}(13)^{-1} &= (143), \\
(14)(23)(132)(23)^{-1}(14)^{-1} &= (234).
\end{aligned}$$

故 $C_{(123)} = \{(123), (134), (142), (243)\}, C_{(132)} = \{(124), (132), (143), (234)\}$. □

练习 4.4.41 A_4 没有 6 阶子群.

证明 假设 G 是 A_4 的 6 阶子群, 则 $[A_4 : G] = 2$, 由例 4.3.12, $G \lhd A_4$, 因此 G 为 A_4 中若干共轭类之并. 由前述讨论可得 A_4 的共轭类 (表 4.3), 可见与 $|G| = 6$ 矛盾.

表 4.3: A_4 的共轭类 $\boxed{12 = 1 + 3 + 4 + 4}$

循环型	1^4	2^2	$1^1 3^1$	$1^1 3^1$
元素	Id	$(12)(34), (13)(24), (14)(23)$	$(123), (134),$ $(142), (243)$	$(124), (132),$ $(143), (234)$

练习 4.4.42 讨论置换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 的奇偶性.

4.5 群作用

定义 4.5.1 设 G 为群, X 为非空集合. 若映射

$$\begin{aligned}\psi: G\times X &\to X\\ (g,x)&\mapsto \psi(g,x)\end{aligned}$$

满足对任意 $x\in X$ 与 $g_1,g_2\in G$ 都有

$$\begin{aligned}\psi(1_G,x)&=x,\\ \psi(g_1g_2,x)&=\psi(g_1,\psi(g_2,x)),\end{aligned}$$

则称 G 左作用于 X, 记为 $G\curvearrowright X$. 此时称 X 或 (X,ψ) 为左 G-集. 常记 $\psi(g,x)$ 为 $g.x$.

例 4.5.2 对任意非空集合 X, 其对称群 $S(X)$ 在 X 上有自然的左作用: $(\sigma,x)\mapsto\sigma(x)$.

例 4.5.3 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上有自然的左 (线性) 作用: $(A,x)\mapsto Ax$.

例 4.5.4 设 K/k 为 $f(x)\in k[x]$ 的分裂域, 则 $\mathrm{Aut}(K/k)\curvearrowright\mathrm{Root}_K(f):(\sigma,a)\mapsto\sigma(a)$.

例 4.5.5 在练习 4.3.20 的证明中, 我们看到 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_2)\curvearrowright\mathbb{F}_2^{\oplus 2}$.

例 4.5.6 若 $G\curvearrowright X$, 则 G 自然作用于 P 的幂集 $\mathcal{P}(X)$.

$\{G$ 在 X 上的左作用$\}\xleftrightarrow{1:1}\mathrm{Hom}(G,S(X))$ 任意左 G-集 (X,ψ) 诱导群同态 (群的置换表示)

$$\begin{aligned}\rho: G&\to S(X)\\ g&\mapsto\rho(g),\end{aligned}$$

其中 $\rho(g)(x)\coloneqq g.x$. 反过来, 给定群同态 $\rho:G\to S(X)$, 可定义 G 在 X 上的左作用:

$$\begin{aligned}\psi: G\times X&\to X\\ (g,x)&\mapsto\rho(g)(x).\end{aligned}$$

阅读提示

请验证如上群同态的良定性, 如 $\rho(g)\in S(X)$ 等.

定义 4.5.7 定义群作用 $G\curvearrowright X$ 的核 N 为如上群同态 $G\to S(X)$ 的核, 即 $N=\bigcap\limits_{x\in X}G_x$.

练习 4.5.8 设 K/k 为 $f(x)\in k[x]$ 的分裂域, 由例 4.5.4 可得群同态

$$\rho:\mathrm{Aut}(K/k)\to S(\mathrm{Root}_K(f)).$$

证明 ρ 是单同态. 由此再次得到 $\mathrm{Aut}(K/k)$ 是有限群.

定义 4.5.9 给定群 $(G,\cdot)$, 在集合 G 上定义新的二元运算 $\star$ 使得 $x\star y=y\cdot x$, 得到的新群 $(G,\star)$ 记作 G^{op}, 称为 G 的反群.

注记 4.5.10 存在群同构 $G \xrightarrow{\sim} G^{\mathrm{op}}, g \mapsto g^{-1}$.

定义 4.5.11 设 G 为群, Y 为非空集合. 若映射

$$\begin{aligned}\phi : Y \times G &\to Y \\ (y,g) &\mapsto \phi(y,g)\end{aligned}$$

满足对任意 $y \in Y$ 与 $g_1, g_2 \in G$ 都有

$$\begin{aligned}\phi(y, 1_G) &= y, \\ \phi(y, g_1 g_2) &= \phi(\phi(y, g_1), g_2),\end{aligned}$$

则称 G 右作用于 y, 记为 $Y \curvearrowleft G$. 此时称 Y 或 (Y,ϕ) 为右 G-集. 常记 $\phi(y,g)$ 为 $y.g$.

$\{G$ **在** Y **上的右作用**$\} \xleftrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}\big(G, S(Y)^{\mathrm{op}}\big)$ 任意右 G-集 (Y,ϕ) 诱导群同态 (群的置换表示)

$$\begin{aligned}\rho : G &\to S(Y)^{\mathrm{op}} \\ g &\mapsto \rho(g),\end{aligned}$$

其中 $\rho(g)(y) \coloneqq y.g$. 反过来, 给定群同态 $\rho : G \to S(Y)^{\mathrm{op}}$, 可定义 G 在 Y 上的右作用:

$$\begin{aligned}\phi : Y \times G &\to Y \\ (y,g) &\mapsto \rho(g)(y).\end{aligned}$$

$$\textbf{左/右 } G\textbf{-集本质相同:}\ \boxed{G \curvearrowright X : (g,x) \mapsto g.x} \rightleftarrows \boxed{X \curvearrowleft G : (x,g) \mapsto x.g \coloneqq g^{-1}.x}$$

例 4.5.12 设 G 为群, $H \leqslant G$.

(1) 考虑左陪集空间 $G/H = \{aH : a \in G\}$ (未必为商群), 则有左诱导作用 $G \curvearrowright (G/H) : (g, aH) \mapsto gaH$.

(2) 对偶地, 考虑右陪集空间 $H\backslash G = \{Ha : a \in G\}$, 则有右诱导作用 $(H\backslash G) \curvearrowleft G : (Ha, g) \mapsto Hag$, 与右正则作用对应的左作用为 $(g, Ha) \mapsto Hag^{-1}$.

(3) 特别地, 当 $H = \{1_G\}$ 时, 得到左正则作用 $G \curvearrowright G : (g,a) \mapsto ga$ 与右正则作用 $G \curvearrowleft G : (a,g) \mapsto ag$.

前文已谈及 G 在 X 上的左作用与 $\mathrm{Hom}(G, S(X))$ 间存在一一对应关系, 将其用于例 4.5.12 (3) 的左正则作用, 便得到群嵌入

$$G \hookrightarrow S(G), \quad g \mapsto \ell_g,$$

其中 $\ell_g(x) \coloneqq gx$ (易验证此同态的核为 $\{1_G\}$). 故我们得到

定理 4.5.13 (Cayley 定理) 任何群 G 与对称群 $S(G)$ 的一个子群同构.

定义 4.5.14 设 G 为群, X 为左 G-集, 称 $G \curvearrowright X$ 是忠实的, 若相应的群同态

$$\begin{aligned}\rho : G &\to S(X) \\ g &\mapsto \rho(g)\end{aligned}$$

是单射, 其中 $\rho(g)(x) = g.x, \forall x \in X$. 这等价于说群作用 $G \curvearrowright X$ 的核 $N = \{1_G\}$.

例 4.5.15 例 4.5.12 中的左/右正则作用均是忠实的.

例 4.5.16 由练习 4.5.8, $\mathrm{Aut}(K/k)\curvearrowright S(\mathrm{Root}_K(f))$ 是忠实的.

例 4.5.17 (非忠实群作用) $(\mathbb{R}^2,+)\curvearrowright\mathbb{S}^1:\big((x,y),\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big)\mapsto\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+x+y)}$ 非忠实.

定义 4.5.18 设 $G\curvearrowright X, x\in X$. 称 $\mathcal{O}_x=\{g.x:g\in G\}\subset X$ 为 x 的轨道.

注记 4.5.19 定义 X 上的等价关系为 $x\approx y \iff \exists g\in G, \mathrm{s.t.}\, y=g.x$. 则 x 所在的等价类即 $\mathcal{O}_x$, X 有 G-轨道分解 $X=\bigsqcup\limits_{x\in I}\mathcal{O}_x$, 其中 I 为 G-轨道的完全代表元系. 轨道的集合记为 X/G 或 $G\backslash X$.

定义 4.5.20 设 $G\curvearrowright X$. 若对任意 $x,y\in X$, 均存在 $g\in G$ 使得 $y=g.x$, 则称群作用 $G\curvearrowright X$ 是可迁的.

注记 4.5.21 (1) $G\curvearrowright X$ 可迁当且仅当 X 仅有一个 G-轨道.

(2) 对任意 $x\in X$, 限制作用 $G\curvearrowright\mathcal{O}_x$ 总是可迁的.

引理 4.5.22 考虑无重根非零多项式 $f(x)\in k[x]$ 及其分裂域 K/k, 则 $f(x)$ 不可约当且仅当群作用 $\mathrm{Aut}(K/k)\curvearrowright\mathrm{Root}_K(f)$ 是可迁的.

证明 ($\Rightarrow$) 对不可约的 $f(x)$ 的任意一对根 $\alpha\neq\beta\in K$, 由引理 3.3.1, 唯一存在 Id_k 的延拓 $\sigma: k(\alpha)\xrightarrow{\sim}k(\beta)$ 满足 $\sigma(\alpha)=\beta$. 此时 $K/k(\alpha)$ 与 $K/k(\beta)$ 分别为 $f(x)\in k(\alpha)[x]$ 与 $\sigma(f(x))\in k(\beta)[x]$ 的分裂域, 由定理 3.3.13, 存在 σ 的延拓 $\delta\in\mathrm{Aut}(K)$. 故 $\delta\in\mathrm{Aut}(K/k)$ 满足 $\delta(\alpha)=\beta$, 即 $\mathrm{Aut}(K/k)\curvearrowright\mathrm{Root}_K(f)$ 可迁.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, dashed, "\delta", "\sim"'] & K \\
k(\alpha) \arrow[u] \arrow[r, dashed, "\sigma:\alpha\mapsto\beta", "\sim"'] & k(\beta) \arrow[u] \\
k \arrow[u] \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}_k"] & k \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

($\Leftarrow$) 若 $f=gh$ 可约, $\deg(g),\deg(h)\geqslant 1$, 则由 $f(x)$ 无重根知 $\mathrm{Root}_K(g)\cap\mathrm{Root}_K(h)=\varnothing$, 因此 $\mathrm{Aut}(K/k)\curvearrowright\mathrm{Root}_K(f)$ 不混合 g 和 h 的根集, 故不可迁, 矛盾. □

定义 4.5.23 设 $G\curvearrowright X, x\in X$. 定义 x 的稳定化子 $G_x=\{g\in G:g.x=x\}$.

注记 4.5.24 $G_x\leqslant G$ 为子群.

引理 4.5.25 设 $G\curvearrowright X, x,y\in X$. 若存在 $h\in G$ 使得 $x=h.y$, 则 $G_x=hG_yh^{-1}$. 故同一轨道中的稳定化子是互相共轭的.

注记 4.5.26 再由练习 4.3.8 可知, 有群同构 $G_x\simeq G_y$.

例 4.5.27 将地球表面看作 $\mathbb{S}^2$. 地球绕南北极的自转可看作 $\mathrm{SO}(2)$ 在 $\mathbb{S}^2$ 上的作用, 其轨道就是纬线. 在非南北极点的稳定化子是 $\{\mathrm{Id}\}$; 在南北极点的稳定化子是 $\mathrm{SO}(2)$.

例 4.5.28 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的自然作用的轨道有 $\{\mathbf{0}\}$ 和 $\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ 两个. 在 $\mathbf{0}$ 点的稳定化子是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, 在 $\mathbf{e}_1$ 点的稳定化子是

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ \mathbf{0} & A\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}):A\in\mathrm{GL}(n-1,\mathbb{R}),\alpha\in\mathbb{R}^{n-1}\right\}.$$

例 4.5.29 $\mathrm{SO}(n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的作用的轨道是 $\{x\in\mathbb{R}^n : |x|=r\}, r\geqslant 0$. 当 $r>0$ 时, 在 $r\mathbf{e}_1$ 点的稳定化子是 $\{\mathrm{diag}(1,A) : A\in\mathrm{SO}(n-1)\}$.

例 4.5.30 根据例 4.4.7, S_{n-1} 可看作 S_n 的子群. $S_n \curvearrowright \underline{n}$ 在 n 的稳定化子为 S_{n-1}.

例 4.5.31 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 在 $M_n(\mathbb{C})$ 上相似作用的轨道是 $\mathcal{O}_J=\{TJT^{-1} : T\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\}$, 其中 J 是某个 Jordan 标准形, 而 J 的稳定化子为 $\{A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) : AJ=JA\}$.

定理 4.5.32 (轨道-稳定化子定理) 设 $G\curvearrowright X, x\in X$, 则存在双射

$$\begin{aligned} f : G/G_x &\xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_x \\ gG_x &\longmapsto g.x. \end{aligned}$$

特别地, 我们有轨道-稳定化子公式

$$|\mathcal{O}_x| = |G/G_x| = [G:G_x] \quad 即 \quad |G| = |\mathcal{O}_x||G_x|.$$

注记 4.5.33 对集合间双射 $f : Y\to Z$ 与群作用 $G\curvearrowright Y, G\curvearrowright Z$, 称 f 与 G-作用相容, 若

$$f(g.y) = g.f(y), \quad \forall g\in G, y\in Y.$$

在定理 4.5.32 中, 从 $G\curvearrowright X$ 可得左诱导作用 $G\curvearrowright (G/G_x)$ (参见例 4.5.12 (1)) 与限制作用 $G\curvearrowright \mathcal{O}_x$. 由于

$$f(h.gG_x) = h.f(gG_x), \quad \forall g,h\in G,$$

双射 f 与 G-作用相容.

例 4.5.34 在例 4.4.23 中, 有 $\Sigma(\square)\curvearrowright\underline{4}$. 由于 $\mathcal{O}_1=\underline{4}$ 而 $\Sigma(\square)_1=\{\mathrm{Id},(24)\}$, 根据定理 4.5.32, $|\Sigma(\square)| = 4\cdot 2 = 8$.

定理 4.5.35 (Burnside 引理) 设 G 是有限群, X 是有限 G-集. 对于 $g\in G$, 考虑 $X^g=\{x\in X : g.x=x\}$, 则有

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|.$$

证明 通过将 X 拆分为轨道的并, 可不妨设 $G\curvearrowright X$ 是可迁的, 从而只需证 $|G|=\sum\limits_{g\in G}|X^g|$. 定义函数 $f : G\times X\to\mathbb{R}$ 如下:

$$f(g,x) = \begin{cases} 1, & 若\ g.x = x, \\ 0, & 若\ g.x\neq x. \end{cases}$$

下面用两种方式来计算 $S=\sum\limits_{(g,x)\in G\times X} f(g,x)$:

- 对任意 $x\in X$, 由定理 4.5.32, $|G_x| = \dfrac{|G|}{|\mathcal{O}_x|} = \dfrac{|G|}{|X|}$. 因此 $S=|X||G_x|=|G|$.
- 对任意 $g\in G$, $\sum\limits_{x\in X} f(g,x) = |X^g|$, 因此 $S=\sum\limits_{g\in G}|X^g|$.

比较这两个等式即得 $|G|=\sum\limits_{g\in G}|X^g|$. □

注记 4.5.36 换言之, 轨道的个数是群中各个元素不动点个数的平均值.

定义 4.5.37 设 G 为群, X 为 G-集. 称作用 $G\curvearrowright X$ 为自由的, 若对任意 $x\in X$ 都有 $G_x=\{1_G\}$.

注记 4.5.38 由定理 4.5.32, $G\curvearrowright X$ 是自由的 $\iff |\mathcal{O}_x|=|G|,\forall x\in X$. 此时 $|G|\mid|X|$.

例 4.5.39 例 4.5.12 (3) 的左正则作用 $G\curvearrowright G:(g,a)\mapsto ga$ 是自由的.

例 4.5.40 设 $H\leqslant G$, 则限制左正则作用 $H\curvearrowright G:(h,x)\mapsto hx$ 是自由的. 由注记 4.5.38, $|H|\mid|G|$, 这便是定理 4.1.18.

定义 4.5.41 设 G 为群, X 为 G-集. 称作用 $G\curvearrowright X$ 为平凡的, 若对任意 $g\in G$ 与 $x\in X$ 均有 $g.x=x$.

注记 4.5.42 $G\curvearrowright X$ 是平凡的 $\iff G_x=G,\forall x\in X \iff \mathcal{O}_x=\{x\},\forall x\in X$.

例 4.5.43 设 $G\curvearrowright X$, 记 X 的不动点集为 $X^G=\{x\in X:g.x=x,\forall g\in G\}$. 若 $X^G\neq\varnothing$, 则 $G\curvearrowright X^G$ 是平凡的.

定义 4.5.44 设 G 为群, 称作用 $G\curvearrowright X=G:(g,x)\mapsto gxg^{-1}$ 为共轭作用.

注记 4.5.45 (1) G 是 Abel 群 $\iff G\curvearrowright X$ 是平凡的. 故仅考虑非 Abel 群共轭作用.

(2) 共轭作用下的 x 的轨道即 G 中 x 所在的共轭类 C_x (定义 4.4.15).

定义 4.5.46 定义 $x\in G$ 的中心化子 $Z(x)$ 为 x 在共轭作用下的稳定化子, 即

$$Z(x)=\{g\in G:gx=xg\}\leqslant G.$$

注记 4.5.47 (1) $Z(G)\subset Z(x),(x)\subset Z(x),\forall x$.

(2) 定理 4.5.32 在共轭作用下可表述为 $|G|=|C_x||Z(x)|$. 特别地, $|C_x|\mid|G|$.

(3) $C_x=\{x\}\iff x\in Z(G)\iff Z(x)=G$.

例 4.5.48 在练习 4.4.40 中, 我们看到 A_4 中 $\left|C_{(123)}\right|=4$. 这也可由注记 4.5.47 (2) 公式 $|G|=|C_x||Z(x)|$, 化为求 $Z((123))=\left\{\sigma\in A_4:\sigma(123)\sigma^{-1}=(123)\right\}$. 由引理 4.4.12,

$$\sigma(123)\sigma^{-1}=(\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3))=(123)\implies\sigma=\mathrm{Id},(123),(132).$$

故 $\left|C_{(123)}\right|=\dfrac{|A_4|}{|Z((123))|}=\dfrac{12}{3}=4.$

由注记 4.5.47 (3) 可得

命题 4.5.49 (类等式) $|G|=|Z(G)|+\displaystyle\sum_{C_x:|C_x|>1}|C_x|$.

注记 4.5.50 表 4.1, 4.2, 4.3 分别给出了 S_3,S_4,A_4 的类等式.

定义 4.5.51 设 p 为素数. 有限群 G 称为 p-群, 若 $|G|=p^n,n\in\mathbb{Z}_{\geqslant0}$.

注记 4.5.52 p-群未必是 Abel 群, 如练习 4.1.16 的 8 阶群 $\Sigma(\square)$ 是非 Abel 群.

命题 4.5.53 设 G 为非平凡的 p-群, 则 $Z(G)\neq\{1_G\}$.

证明 由命题 4.5.49 及注记 4.5.47 (2), $p\mid|Z(G)|$. □

注记 4.5.54 若 G 为非平凡 p-群, 由练习 4.3.6, 商群 $G/Z(G)$ 是阶数更小的 p-群, 可以此递归研究 p-群的结构. 下面的定理 4.5.55 与后面的例 5.3.6 (5) 即为二例.

定理 4.5.55 对任意非平凡 p-群 G, 存在 $H \lhd G$ 使得 $[G:H]=p$.

证明 设 $|G|=p^n$, 对 n 归纳. 由推论 4.2.12, $n=1$ 时结论显然成立. 下设结论对 $k<n$ $(n\geqslant 2)$ 成立. 由命题 4.5.53, $Z(G)\neq\{1_G\}$, 即 $Z(G)$ 亦为非平凡 p-群. 由定理 4.6.11, 存在 p 阶元 $a\in Z(G)$. 令 $H=(a)\leqslant Z(G)$, 则 $H\lhd G$. 由于 $|G/H|=p^{n-1}$, 由归纳假设, G/H 有指数为 p 的正规子群, 由定理 4.3.21 与定理 4.3.22, 它对应于 G 中包含 H 的正规子群, 且由定理 4.3.22 给出的群同构可知此正规子群指数为 p. □

命题 4.5.56 设 p 为素数, G 为 p^2 阶群, 则 G 为 Abel 群, 且 $G\simeq\mu_{p^2}$ 或 $G\simeq\mu_p\times\mu_p$.

证明 由命题 4.5.53, 可取 $g\in Z(G)\setminus\{1_G\}$. 由 $\mathrm{ord}(g)\mid |G|$ 知 $\mathrm{ord}(g)=p$ 或 p^2.

- ◇ 若 $\mathrm{ord}(g)=p^2$, 由命题 4.2.11 及命题 4.2.7, G 为循环群且 $G\simeq\mu_{p^2}$.
- ◇ 若 $\mathrm{ord}(g)=p$, $H=(g)\subset Z(G)$. 可取 $g'\in G\setminus H$, 并不妨设 $\mathrm{ord}(g')=p$ (否则, $\mathrm{ord}(p')=p^2$, $G\simeq\mu_{p^2}$). 记 $K=(g')$, 则由 $g\in Z(G)$ 可得 $KH=HK\leqslant G$. 由定理 4.1.18, $|HK|\mid|G|$, 但由 $H\subsetneq HK$ 知 $|HK|\geqslant p+1$, 因此 $|HK|=p^2$, $G=HK$ 为 Abel 群. 考虑群同态

$$H\times K\to G,\quad (h,k)\mapsto hk.$$

由 $HK=G$ 知这是满同态, 而 $|H\times K|=p^2=|G|$, 因此这是群同构, $G\simeq H\times K$. 而 $H\times K\simeq\mu_p\times\mu_p$, 故 $G\simeq\mu_p\times\mu_p$. □

练习 4.5.57 设 G 为群, p 是 $|G|$ 的最小素因子. 若 p 阶子群 $A\lhd G$, 则 $A\leqslant Z(G)$.

证明 因为 $A\lhd G$, 所以 G 在 A 上有共轭作用. 由此可得群同态

$$\rho: G\to S(A)=S_p.$$

注意到 $\mathrm{Im}\,\rho\leqslant\mathrm{Aut}(A)\simeq\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p)\simeq\mathbb{Z}_{p-1}$. 由定理 4.1.18, $|\mathrm{Im}\,\rho|\mid(p-1)$. 另一方面, 由定理 4.3.16, $G/\mathrm{Ker}\,\rho\simeq\mathrm{Im}\,\rho$, 因此 $|\mathrm{Im}\,\rho|\mid|G|$, 但 $|G|$ 的最小素因子是 p, 故 $|\mathrm{Im}\,\rho|=1$, 进而 $G=\mathrm{Ker}\,\rho$. 这表明 $A\subset Z(G)$.

$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p)\simeq\mathbb{Z}_{p-1}$ **补证** 注意到有群同构

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p)\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}_p^\times,\quad f\mapsto f(\bar{1}).$$

由定理 4.2.14 知 $\mathbb{Z}_p^\times$ 为循环群, 再由命题 4.2.7, $\mathbb{Z}_p^\times\simeq\mathbb{Z}_{p-1}$. 故 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p)\simeq\mathbb{Z}_{p-1}$. □

例 4.5.58 设 $H\leqslant G$, 记 $X_H=\{H'\leqslant G: H' \text{ 共轭于 } H\}\ni H$, 则有共轭作用

$$G\curvearrowright X_H:(g,H')\mapsto gH'g^{-1}.$$

定义 H 的正规化子 $N_G(H)$ 为 H 在 $G\curvearrowright X_H$ 下的稳定化子, 即

$$N_G(H)=\{g\in G: gHg^{-1}=H\}=\{g\in G: gH=Hg\}.$$

- ◇ $H\lhd N_G(H)\leqslant G$.

- ◇ 定理 4.5.32 在共轭作用 $G \curvearrowright X_H$ 下可表述为 $|G| = |N_G(H)||X_H|$.
- ◇ $N_G(H) = G \iff H \lhd G \iff X_H = \{H\}$.

例 4.5.59 共轭作用 $G \curvearrowright X = G$ 在 G 中元素 x 的轨道 (即共轭类) 上有限制作用 $G \curvearrowright C_x$. 例如 S_4 共轭作用于共轭类 (见表 4.2)

$$X = \{A = (12)(34), B = (13)(24), C = (14)(23)\}.$$

由此可得群同态

$$\rho : S_4 \to S(X) \simeq S_3.$$

由引理 4.4.12, 对 $\sigma \in S_4$,

$$\begin{aligned}\sigma A \sigma^{-1} &= (\sigma(1)\sigma(2))(\sigma(3)\sigma(4)),\\ \sigma B \sigma^{-1} &= (\sigma(1)\sigma(3))(\sigma(2)\sigma(4)),\\ \sigma C \sigma^{-1} &= (\sigma(1)\sigma(4))(\sigma(2)\sigma(3)).\end{aligned}$$

由此可计算得群同态 ρ 的如下信息:

像	纤维
Id	Id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)
(12)	(14), (23), (1243), (1342)
(13)	(13), (24), (1234), (1432)
(23)	(12), (34), (1324), (1423)
(123)	(124), (132), (143), (234)
(132)	(123), (134), (142), (243)

特别地, ρ 为满射, 且 $\operatorname{Ker}\rho = \{\mathrm{Id}, A, B, C\} = K_4$ (见注记 4.4.25). 由定理 4.3.16, 有群同构

$$S_4/K_4 \simeq S_3.$$

练习 4.5.60 设 $G \curvearrowright X$ 可迁, $N \lhd G$, 则 X 在 N 作用下的每个轨道有同样多的元素.

证明 由于 $G \curvearrowright X$ 可迁, 存在 $a \in X$ 使 $X = Ga$. 对任意 $x \in X$, 设 $x = ga, g \in G$, 则

$$\begin{aligned}N_x &= \{n \in N : nx = x\} = \{n \in N : nga = ga\}\\ &= \left\{n \in N : g^{-1}ng \in G_a\right\} = N \cap gG_a g^{-1}.\end{aligned}$$

由于 $N \lhd G, N_x = N \cap gG_a g^{-1} = g(N \cap G_a)g^{-1} = gN_a g^{-1}$. 由定理 4.5.32,

$$|Nx| = \frac{|N|}{|N_x|} = \frac{|N|}{|gN_a g^{-1}|} = \frac{|N|}{|N_a|} = |Na|.$$

即 X 在 N 作用下的每个轨道有同样多的元素. □

4.6 Sylow 定理

定义 4.6.1 设 G 为 n 阶有限群, p 为素数. 设 $p^r \| n$, 满足 $|H| = p^r$ 的子群 H 称为 G 的 Sylow p-子群.

定理 4.6.2 (Sylow 定理) 设 G 为有限群, p 为任意素数.

(1) G 含有 Sylow p-子群.

(2) G 的任两个 Sylow p-子群 P, P' 皆共轭 (从而同构).

(3) 设 $|G| = p^r m$, $p \nmid m$, 则 G 中 Sylow p-子群的个数是 m 的因子, 且形如 $kp+1$.

(4) 任意 p-子群 $H \leqslant G$ 皆包含于某个 Sylow p-子群.

注记 4.6.3 由 (2) 可知, G 中存在正规的 Sylow p-子群当且仅当 G 有唯一的 Sylow p-子群.

我们仅对 (1) 作出证明.

证明 (1) 设 $|G| = p^r m$, $p \nmid m$, 考虑

$$X = \{U \subset G : |U| = p^r\} \subset \mathcal{P}(G).$$

由例 4.5.12 (3) 的左正则作用与例 4.5.6, 有群作用 $G \curvearrowright \mathcal{P}(G) : (g, U) \mapsto gU$, 而 $|gU| = |U|$, 故此作用可限制在 X 上, 得到 $G \curvearrowright X : (g, U) \mapsto gU$. 由于

$$|X| = \binom{p^r m}{p^r} = \frac{p^r m(p^r m-1)\cdots(p^r m-p^r+1)}{p^r(p^r-1)\cdots 1},$$

注意到 i 与 $p^r m - p^r + i$ 所含 p 的幂次相同 ($1 \leqslant i \leqslant p^r$), 因此 $p \nmid |X|$. 设 X 有 G-轨道分解 $X = \bigsqcup_U \mathcal{O}_U$, 则存在 $U \in X$ 使得 $p \nmid |\mathcal{O}_U|$. 由定理 4.5.32, $|G_U||\mathcal{O}_U| = |G| = p^r m$, 因此 $|G_U| = p^r m'$, 其中 $m' \mid m$. 另一方面, 按定义 $G_U = \{g \in G : gU = U\}$, 因此另有群作用 $G_U \curvearrowright U : (g, u) \mapsto gu$. 由于此作用是自由的, 由注记 4.5.38, $|G_U| \mid |U| = p^r$. 故 $m' = 1$, $|G_U| = p^r$ 即为所求. □

以下再给出定理 4.6.2 (1) 的另一个证明, 此证明依赖于下述引理:

引理 4.6.4 设 G 为有限群, $H \leqslant G$. 若 G 有 Sylow p-子群 S, 则 H 亦有 Sylow p-子群. 更具体地, 存在 $g \in G$ 使 $gSg^{-1} \cap H$ 为 H 的 Sylow p-子群.

证明 考虑左诱导作用 $H \curvearrowright (G/S) : (h, gS) \mapsto hgS$. 由于 S 为 Sylow p-子群, 因此 $p \nmid |G/S|$, 此作用有某个轨道 $\mathcal{O}_{gS}$, 满足 $p \nmid |\mathcal{O}_{gS}|$. 由定理 4.5.32, $|H| = |\mathcal{O}_{gS}||H_{gS}|$, 因此 $|H|$ 与 $|H_{gS}|$ 所含 p 的幂次相同. 而

$$H_{gS} = \{h \in H : hgS = gS\} = \left\{h \in H : g^{-1}hg \in S\right\} = \left\{h \in H : h \in gSg^{-1}\right\} = gSg^{-1} \cap H,$$

由 $H_{gS} \leqslant gSg^{-1}$ 知 H_{gS} 为 p-群, 又 $|H|$ 与 $|H_{gS}|$ 所含 p 的幂次相同, 故 H_{gS} 为 H 的 Sylow p-子群. □

以下便是定理 4.6.2 (1) 的另证.

证明 设 $n = |G| = p^r m$. 由例 4.5.12 (3) 的左正则作用可得群嵌入 $G \hookrightarrow S(G) \simeq S_n$. 而 S_n 亦可嵌入 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ 中: $\sigma \in S_n$, $(\mathbf{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 是 $\mathbb{F}_p^n$ 的基, 我们将 σ 映为线性变换 $\mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{e}_{\sigma(i)}$ 对应的方阵. 注意到

$$|\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)| = (p^n-1)(p^n-p)\cdots\left(p^n-p^{n-1}\right) \quad (逐行考虑),$$

其中 p 的幂次为 $1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$. 考虑对角线上元素均为 1 的上三角方阵的集合 H, 则 $H\leqslant \mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_p)$ 且 $|H|=p^{\frac{n(n-1)}{2}}$, 因此 H 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_p)$ 的 Sylow p-子群. 由于 $G\hookrightarrow S_n\hookrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_p)$, 由引理 4.6.4 即知 G 有 Sylow p-子群. □

例 4.6.5 考虑 S_4, $|S_4|=3^1\cdot 2^3$.

(Sylow 3-子群) 由推论 4.2.12 与表 4.2 易见即为如下 4 个 3 阶子群.

$$\{\mathrm{Id},(123),(132)\},\quad \{\mathrm{Id},(124),(142)\},\quad \{\mathrm{Id},(134),(143)\},\quad \{\mathrm{Id},(234),(243)\}.$$

(Sylow 2-子群) 由例 4.4.33 可知 S_4 无 8 阶正规子群, 再由注记 4.6.3 即得 S_4 的 Sylow 2-子群个数 >1, 根据定理 4.6.2 (3) 即知 S_4 恰有 3 个 Sylow 2-子群. 由定理 4.6.2 (4), Klein 四元群 K_4 包含于某个 Sylow 2-子群, 而由练习 4.4.24 的解答 (4) 知 $K_4\lhd S_4$, 它对共轭封闭, 因此由定理 4.6.2 (2) 即知 K_4 包含于 S_4 的所有 Sylow 2-子群. 由定理 4.6.2 (2) 及定理 4.4.19, 这 3 个子群分别包含 K_4, 2 个 $1^2 2^1$ 型置换与 2 个 4^1 型置换. 注意到两个相交对换之积是 3-轮换, 但 8 阶群不含 3-轮换, 因此每个子群中恰含有 2 个不相交对换. 最后由 2^2 型置换与对换之积生成 4-轮换. 结果如下:

$$\begin{aligned}
&\{\mathrm{Id},(12)(34),(13)(24),(14)(23),(12),(34),(1324),(1423)\}=(K_4,(12)),\\
&\{\mathrm{Id},(12)(34),(13)(24),(14)(23),(13),(24),(1234),(1432)\}=(K_4,(13)),\\
&\{\mathrm{Id},(12)(34),(13)(24),(14)(23),(14),(23),(1243),(1342)\}=(K_4,(14)).
\end{aligned}$$

这与练习 4.4.24 一致.

例 4.6.6 考虑 A_4, $|A_4|=3^1\cdot 2^2$.

(Sylow 3-子群) 由推论 4.2.12 与表 4.3 易见即为如下 4 个 3 阶子群.

$$\{\mathrm{Id},(123),(132)\},\quad \{\mathrm{Id},(124),(142)\},\quad \{\mathrm{Id},(134),(143)\},\quad \{\mathrm{Id},(234),(243)\}.$$

(Sylow 2-子群) 由表 4.3 可知 K_4 是 A_4 的 2 个共轭类之并, 因此 $K_4\lhd A_4$. 由注记 4.6.3, K_4 是 A_4 唯一的 Sylow 2-子群.

命题 4.6.7 35 阶群必同构于 $\mathbb{Z}_{35}$.

证明 设 G 为 35 阶群, 由定理 4.6.2 (2) 即知 G 有唯一的 5 阶子群 P 和 7 阶子群 Q, 再由注记 4.6.3, $P\lhd G, Q\lhd G$. 由推论 4.2.12, $P\simeq\mathbb{Z}_5, Q\simeq\mathbb{Z}_7$, 进而 $P\cap Q=\{1_G\}$. 由练习 4.3.28, $pq=qp, \forall p\in P, q\in Q$. 由此可验证映射

$$P\times Q\to G,\quad (p,q)\mapsto pq$$

是群同态 (由可换性), 且是单的, 进而为群同构, $G\simeq P\times Q\simeq\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_7$. 由练习 4.1.35, 对 $(\overline{1},\overline{1})\in\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_7$, $\mathrm{ord}(\overline{1},\overline{1})=\mathrm{lcm}(5,7)=35$. 再由命题 4.2.11 知 G 为循环群, 由命题 4.2.7 即得 $G\simeq\mathbb{Z}_{35}$. □

命题 4.6.8 108 阶群总不是单群.

证明 设群 G 满足 $|G|=108=2^2\cdot 3^3$. 由定理 4.6.2 (1) 即知 G 有 27 阶子群 H. 由例 4.5.12 (1), 有左诱导作用 $G\curvearrowright(G/H):(g,aH)\mapsto gaH$, 因此存在群同态 $\rho:G\to S(G/H)$. 由定理 4.3.16, $G/\operatorname{Ker}\rho\simeq\operatorname{Im}\rho$, 而 $\operatorname{Im}\rho\neq\{\mathrm{Id}\}$, 因此 $\operatorname{Ker}\rho\ntrianglelefteq G$. 又 $|\operatorname{Im}\rho|\leqslant|S(G/H)|=|S_4|=24$, 因此 $|\operatorname{Ker}\rho|\neq 1$, $\operatorname{Ker}\rho\neq\{1_G\}$. 故 $\operatorname{Ker}\rho$ 是 G 的非平凡正规子群, 即 G 非单群. □

命题 4.6.9 设 G 为有限 Abel 群, $|G|=p_1^{s_1}\cdots p_r^{s_r}$, 其中 $p_1,\cdots,p_r$ 为互异的素数. 则 G 的 Sylow p_i-子群 P_i 唯一 $(1\leqslant i\leqslant r)$, 且 $G\simeq P_1\times\cdots\times P_r$.

证明 由于 G 的 Sylow p_i-子群是 Abel 群, 在共轭作用下不变, 由定理 4.6.2 (2) 即知唯一性. 由 P_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ 均为 Abel 群可知映射

$$P_1\times\cdots\times P_r\to G,\quad (g_1,\cdots,g_r)\mapsto g_1\cdots g_r$$

是群同态. 记 $H=P_1\cdots P_r\leqslant G$, 则 $P_i\leqslant H$ $(1\leqslant i\leqslant r)$, 由定理 4.1.18, $p_i^{s_i}\mid |H|$ $(1\leqslant i\leqslant r)$, 而 $|H|\mid |G|=p_1^{s_1}\cdots p_r^{s_r}$, 因此 $H=G$. 故上述群同态是满的, 进而为群同构, $G\simeq P_1\times\cdots\times P_r$. □

注记 4.6.10 有限 Abel 群的结构问题归结于 Abel p-群的结构问题.

定理 4.6.11 (Cauchy 定理) 设 G 为有限群, 素数 $p\mid |G|$, 则 G 中存在 p 阶元, 即 G 含有 p 阶子群.

证明 由定理 4.6.2 (1), G 含有 Sylow p-子群 P, 设 $|P|=p^r$. 任取 $g\in G\setminus\{1_G\}$, 则 $\operatorname{ord}(g)=p^s$, 其中 $1\leqslant s\leqslant r$. 此时 $\operatorname{ord}\left(g^{p^{s-1}}\right)=p$. □

练习 4.6.12 设 G 是一个 n 阶群, 素数 $p\mid n$. 证明：方程 $x^p=1$ 在群 G 中解的个数是 p 的倍数.

练习 4.6.13 设 N 是有限群 G 的一个正规子群. 若 p 和 $|G/N|$ 互素, 则 N 包含 G 的所有 Sylow p-子群.

练习 4.6.14 设 G 为有限群, $N\lhd G$, P 是 G 的一个 Sylow p-子群. 证明:

(1) $N\cap P$ 是 N 的 Sylow p-子群.

(2) PN/N 是 G/N 的 Sylow p-子群.

(3) $(N_G(P)N)/N\simeq N_{G/N}(PN/N)$.

练习 4.6.15 设 P 是 G 的 Sylow p-子群, $N_G(P)\lhd G$. 证明：$P\lhd G$.

4.7 自由群与群的展示

定义 4.7.1 考虑非空集合 X, 添加其形式逆 $X^{-1}=\{x^{-1}:x\in X\}$, 称 $X\sqcup X^{-1}$ 为字母集.

(1) 定义字 $w=x_1x_2\cdots x_n$, 其中 $x_i\in X\sqcup X^{-1}$. 称两个字相等, 若相应位置完全相等. 若 $n=0$ 则称为空字, 记为 1.

(2) 称字是既约的, 若 $x_i\neq x_{i+1}^{-1},\forall i$.

注记 4.7.2 每个字均能约化为唯一的既约字.

定义 4.7.3 定义集合 X 上的自由群 $\mathbf{F}(X)=\left\{\text{以 } X\sqcup X^{-1} \text{ 为字母表得到的字}\right\}$, 其上的乘法定义为字的连接并约化, 幺元为空字 1, 求逆操作为 $(x_1x_2\cdots x_n)^{-1}=x_n^{-1}\cdots x_2^{-1}x_1^{-1}$. 若 $|X|<+\infty$, 则称 $\mathbf{F}(X)$ 为有限生成自由群.

例 4.7.4 若 $X=\{a\}$, 则 $\mathbf{F}(X)=\left\{1,a^k,a^{-k},k\geqslant 1\right\}\simeq\mathbb{Z}$.

例 4.7.5 若 $X=\{a,b\}$, 则 $\mathbf{F}(X)$ 中长度为 0 的字有 1 个, 长度为 1 的字有 4 个, 长度为 2 的字有 $4\cdot 3$ 个, 长度为 3 的字有 $4\cdot 3^2$ 个……

约定 4.7.6 有时将 $\mathbf{F}(\{x_1,\cdots,x_n\})$ 简记为 $\mathbf{F}(x_1,\cdots,x_n)$.

命题 4.7.7 (自由群的泛性质) 设 G 为群, X 为集合, 则任意映射 $f: X \to G$ 可唯一延拓为群同态 $\widetilde{f}: \mathbf{F}(X) \to G$, 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} & G \\ X \arrow[ur, hook, "f"] \arrow[dr, hook, "\text{inc}"'] & \\ & \mathbf{F}(X) \arrow[uu, dashed, "\widetilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

命题 4.7.8 任何群 G 均为自由群的商群.

证明 在命题 4.7.7 中取 $X = G$ 即得群的满同态 $\rho: \mathbf{F}(G) \twoheadrightarrow G$. 由定理 4.3.16 即知 $\mathbf{F}(G)/\operatorname{Ker}\rho \simeq G$. □

定义 4.7.9 群 G 的有限展示是指

$$G = \langle x_1, \cdots, x_n \,|\, r_1, \cdots, r_m \rangle, \quad r_i \in \mathbf{F}(x_1, \cdots, x_n).$$

这里等号右边意指

$$\mathbf{F}(x_1, \cdots, x_n)/N(r_1, \cdots, r_m),$$

其中 $N(r_1, \cdots, r_m)$ 为包含 $r_1, \cdots, r_m$ 的 $\mathbf{F}(x_1, \cdots, x_n)$ 的最小正规子群. 称 x_i 为生成元, r_i 为生成关系.

注记 4.7.10 由于在商映射下 $r_1, \cdots, r_m$ 的像均为 1_G, 有时也记

$$G = \langle x_1, \cdots, x_n \,|\, r_1 = 1, \cdots, r_m = 1 \rangle.$$

命题 4.7.11 在定义 4.7.9 中, $N(r_1, \cdots, r_m)$ 是由 $\left\{\omega r_i \omega^{-1} : \omega \in \mathbf{F}(x_1, \cdots, x_n), 1 \leqslant i \leqslant m\right\}$ 生成的子群.

例 4.7.12 $\langle x \,|\, x^n \rangle \simeq \mu_n = \left\{1, \omega, \cdots, \omega^{n-1}\right\}$, 其中 $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}$. 这有两种看法:

(看法一) 由例 4.7.4 知 $\mathbf{F}(x) \simeq \mathbb{Z}$ 为循环群, 因此 $\mathbf{F}(x)$ 的子群均正规, $N(x^n) \simeq n\mathbb{Z}$. 故 $\langle x \,|\, x^n \rangle = \mathbf{F}(x)/N(x^n) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mu_n$.

(看法二) 设 $f: \{x\} \to \mu_n, x \mapsto \omega$. 由命题 4.7.7, f 可唯一延拓为群同态

$$\begin{aligned} \widetilde{f}: \mathbf{F}(x) &\twoheadrightarrow \mu_n \\ x^m &\mapsto \omega^m. \end{aligned}$$

由 $\widetilde{f}(x^n) = \omega^n = 1$ 可知 $N(x^n) \subset \operatorname{Ker}\widetilde{f}$. 由定理 4.3.16, $\mathbf{F}(x)/N(x^n) \twoheadrightarrow \mathbf{F}(X)/\operatorname{Ker}\widetilde{f} \simeq \mu_n$. 又 $|\mathbf{F}(x)/N(x^n)| = n = |\mu_n|$, 因此 $\langle x \,|\, x^n \rangle = \mathbf{F}(X)/N(x^n) \simeq \mu_n$.

命题 4.7.13 (泛性质) 设 $G = \langle x_1, \cdots, x_n \,|\, r_1, \cdots, r_m \rangle$, H 为群, 则映射 $f: X = \{x_1, \cdots, x_n\} \to H$ 可 (唯一) 延拓至群同态 $G \to H$ 当且仅当元素 $f(x_i) \in H$ 满足关系 r_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$.

证明 $(\Rightarrow)$ 是显然的, 下证 $(\Leftarrow)$. 由命题 4.7.7, f 可唯一延拓为群同态

$$\begin{aligned} \phi: \mathbf{F}(X) &\to H \\ x_i &\mapsto f(x_i). \end{aligned}$$

由于 $f(x_i) \in H$ 满足关系 r_i, 因此 $\phi(r_i) = 1_H$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, $N(r_1, \cdots, r_m) \leqslant \operatorname{Ker}\phi$. 由定理 4.3.16,

$$G = \mathbf{F}(X)/N(r_1, \cdots, r_m) \twoheadrightarrow \mathbf{F}(X)/\operatorname{Ker}\phi \simeq \operatorname{Im}\phi \xhookrightarrow{\text{inc}} H.$$

□

例 4.7.14 考虑 $S_3=\{\mathrm{Id},(12),(13),(23),(123),(132)\}$ 与 $G=\langle a,b\,|\,a^2,b^2,(ab)^3\rangle$. 注意到 $(12)(13)=(123)$, 因此由 $(12),(13)$ 生成的群阶为 6 的倍数, 进而 $S_3=((12),(13))$. 考虑映射

$$f:\{a,b\}\to S_3,\quad a\mapsto(12),\quad b\mapsto(13),$$

由命题 4.7.13, f 可延拓为群的满同态 $\widetilde{f}:G\twoheadrightarrow S_3$, 故 $|G|\geqslant|S_3|=6$. 观察到 G 中有如下辫子关系 (参考注记 4.4.28):

$$\boxed{a^2=1}\quad\boxed{b^2=1}$$
$$ababab=1\implies abab^{-1}a^{-1}b^{-1}=1\implies\boxed{aba=bab}$$

这里的 a,b 实为商群中的 $\overline{a},\overline{b}$. 因此 G 中的元素共有以下三类 (注意 $a^{-1}=a,b^{-1}=b$):

- ⋄ 1.
- ⋄ 第一位为 a: a,ab,aba (往后 $abab=babb=ba,\ \cdots\cdots$).
- ⋄ 第一位为 b: b,ba,bab (往后 $baba=abaa=ab,\ \cdots\cdots$).

于是 $|G|\leqslant 6$, 从而 $|G|=6$, $G\simeq S_3$.

练习 4.7.15 在例 4.7.14 中, G 另有展示 $G=\langle a,b\,|\,a^2,b^2,abab^{-1}a^{-1}b^{-1}\rangle$.

例 4.7.16 正 n 边形的对称群 D_n (称为二面体群) 阶为 $2n$ (n 个旋转与 n 个镜面对称), 有展示

$$D_n\simeq\langle x,y\,|\,x^n,y^2,(xy)^2\rangle.$$

练习 4.7.17 另有展示 $D_n\simeq\langle s,t\,|\,s^2,t^2,(st)^n\rangle$. 因此当 $n=3$ 时, 我们得到 $D_3\simeq S_3$ (参考例 4.7.14).

群的展示可用来构造群的同态, 以下是构造群同态 $D_4\hookrightarrow S_4$ 的例子 (参考例 4.4.23).

例 4.7.18 由例 4.7.16, $D_4=\langle x,y\,|\,x^4,y^2,(xy)^2\rangle$. 定义映射 ϕ 满足 $\phi(x)=(1234),\phi(y)=(13)$, 则

$$\phi(x)^4=\mathrm{Id},\quad\phi(y)^2=\mathrm{Id},\quad[\phi(x)\phi(y)]^2=[(14)(23)]^2=\mathrm{Id}.$$

由命题 4.7.13, ϕ 可延拓为群同态 $\widetilde{\phi}:D_4\to S_4$. 由 $(1234)\in\operatorname{Im}\widetilde{\phi}$ 可知 $\left|\operatorname{Im}\widetilde{\phi}\right|\geqslant 4$, 又 $(13)\in\operatorname{Im}\widetilde{\phi}\backslash((1234))$, 因此 $\left|\operatorname{Im}\widetilde{\phi}\right|>4$. 而 $\left|\operatorname{Im}\widetilde{\phi}\right|=\left|D_4/\operatorname{Ker}\widetilde{\phi}\right|$ 是 $|D_4|=8$ 的因子, 因此 $\left|\operatorname{Im}\widetilde{\phi}\right|=8$, $\left|\operatorname{Ker}\widetilde{\phi}\right|=1$. 从而 $D_4\simeq\operatorname{Im}\widetilde{\phi}\hookrightarrow S_4$.

例 4.7.19 (四元数代数) 考虑以 $1,\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}$ 为基的实向量空间 $\mathbb{H}:=\mathbb{R}1\oplus\mathbb{R}\mathrm{i}\oplus\mathbb{R}\mathrm{j}\oplus\mathbb{R}\mathrm{k}$. 其上具有良定的乘法使得 $\mathbb{H}$ 成环并满足:

- ⋄ 乘法 $(x,y)\mapsto xy$ 是 $\mathbb{H}$ 上的双线性映射.
- ⋄ 1 是乘法单位元.
- ⋄ $\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=-1$.
- ⋄ $\mathrm{ij}=\mathrm{k}=-\mathrm{ji}$.

由此可以推导出 $\mathrm{k}^2=-1$, $\mathrm{jk}=\mathrm{i}=-\mathrm{kj}$, $\mathrm{ki}=\mathrm{j}=-\mathrm{ik}$. $\mathbb{H}$ 是非交换可除环 (体). 考虑四元数群

$$Q_8=\{\pm1,\pm\mathrm{i},\pm\mathrm{j},\pm\mathrm{k}\}\leqslant\mathbb{H}^\times,$$

可知 $|Q_8| = |D_4|$, 但 $Q_8 \not\simeq D_4$, 因为 Q_8 中每个元素均为 4 阶元.

练习 4.7.20　$Q_8 \simeq \langle a, b \,|\, a^4, a^2b^{-2}, bab^{-1}a \rangle = \langle a, b \,|\, a^4 = 1, b^2 = a^2, ba = a^3b \rangle$.　提示 $a \mapsto \mathrm{j}, b \mapsto \mathrm{i}$.

练习 4.7.21　设 $D_\infty = \langle s, t \,|\, s^2, t^2 \rangle$. 问是否有 $|D_\infty| = +\infty$?

4.8　有限生成 Abel 群

约定 4.8.1　两加法群 A, B 的直积通常记为直和 $A \oplus B = A \times B$.

例 4.8.2　秩 n 的自由 Abel 群 $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ 有标准基 $(\mathbf{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

定义 4.8.3　设 A 是加法群, 有限集合 $S \subset A$ 称为 A 的有限基, 若

(1) S 生成 A.

(2) S 是 $\mathbb{Z}$-线性无关的.

注记 4.8.4　不是所有的加法群都有基, 如 $\mathbb{Z}_n$ 就没有基, 因为对任意 $v \in \mathbb{Z}_n$, $nv = \overline{0}$.

命题 4.8.5 ($\mathbb{Z}^n$ 的泛性质)　对任意加法群 A 与 $v_1, \cdots, v_n \in A$, 存在唯一的群同态 $f : \mathbb{Z}^n \to A$ 使得 $f(\mathbf{e}_i) = v_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

命题 4.8.6　$\mathbb{Z}^n \simeq \langle x_1, \cdots, x_n \,|\, x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1}, \forall i \neq j \rangle = \langle x_1, \cdots, x_n \,|\, x_i x_j = x_j x_i, \forall i \neq j \rangle$.

证明　构造映射 $f : \{x_1, \cdots, x_n\} \to \mathbb{Z}^n, x_i \mapsto \mathbf{e}_i$, 则 $f(x_i) + f(x_j) = f(x_j) + f(x_i), \forall i \neq j$. 由命题 4.7.13, f 可唯一延拓为群同态 $\widetilde{f} : G \to \mathbb{Z}^n$.

- 由于 $\widetilde{f}(x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}) = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n = (a_1, \cdots, a_n)$, $\widetilde{f}$ 是满射.
- 若 $\widetilde{f}(x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}) = \mathbf{0}$, 则 $a_1 = \cdots = a_n = 0$, 因此 $\widetilde{f}$ 为单射.

故 $\widetilde{f}$ 为群同构, $\mathbb{Z}^n \simeq \langle x_1, \cdots, x_n \,|\, x_i x_j = x_j x_i, \forall i \neq j \rangle$. □

注记 4.8.7　自由 Abel 群 $\mathbb{Z}^n$ 是自由群当且仅当 $n = 1$.

命题 4.8.8　有限生成 Abel 群 A 是自由 Abel 群当且仅当 A 有一组基.

命题 4.8.9　设 A 为有限生成 Abel 群, 则存在正整数 n 与 $K \leqslant \mathbb{Z}^n$, 使得 $A \simeq \mathbb{Z}^n/K$.

证明　取 A 的一个生成元集 $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$, 定义映射 $f : \{x_1, \cdots, x_n\} \to S, x_i \mapsto v_i$, 则 $f(x_i) + f(x_j) = f(x_j) + f(x_i), \forall i \neq j$. 由命题 4.7.13 与命题 4.8.6, f 可唯一延拓为群同态 $\widetilde{f} : \mathbb{Z}^n \twoheadrightarrow A$. 由定理 4.3.16, $\mathbb{Z}^n / \operatorname{Ker} \widetilde{f} \simeq A$. □

例 4.8.10　$\mathbb{Z}_n$ 可由 $\{\overline{1}\}$ 生成, $\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

命题 4.8.11　设 $K \leqslant \mathbb{Z}^n$, 则 K 是有限生成的.

证明　对 n 归纳.

- 当 $n = 1$ 时, 由命题 4.2.8 (1), $\mathbb{Z}$ 的子群形如 $d\mathbb{Z}$, 其中 $d \geqslant 0$, 它是循环群, 因此是有限生成的.
- 当 $n = 2$ 时, 由 $K \leqslant \mathbb{Z}^2$ 知 $(K \cap \mathbb{Z}\mathbf{e}_1) \leqslant \mathbb{Z}\mathbf{e}_1 \simeq \mathbb{Z}$, 由命题 4.2.8 (1), $K \cap \mathbb{Z}\mathbf{e}_1$ 为循环群. 由定理 4.3.23 (3) 得
$$K/(K \cap \mathbb{Z}\mathbf{e}_1) \simeq (\mathbb{Z}\mathbf{e}_1 + K)/\mathbb{Z}\mathbf{e}_1 \leqslant \mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}\mathbf{e}_1 \simeq \mathbb{Z}\mathbf{e}_2,$$
因此 $K/(K \cap \mathbb{Z}\mathbf{e}_1)$ 是循环群, 再由下面的练习 4.8.12 知 K 是有限生成的.

◇ 余下情形类似. □

练习 4.8.12 设 G 为群, $N \lhd G$ 是有限生成的, 且 G/N 也是有限生成的. 证明: G 是有限生成的.

证明 设 $\{\bar{g}_1, \cdots, \bar{g}_n\}$ 是 G/N 的生成元集, 其中 $g_1, \cdots, g_n \in G$, 又设 $\{h_1, \cdots, h_m\}$ 是 N 的生成元集. 由 $G = (g_1, \cdots, g_n)N = (g_1, \cdots, g_n)(h_1, \cdots, h_m)$ 知 $(g_i h_j : 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)$ 是 G 的生成元集. □

命题 4.8.13 存在双射

$$M_{n\times m}(\mathbb{Z}) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, \mathbb{Z}^n), \quad A \mapsto \phi_A,$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_A : \mathbb{Z}^m_{\text{col}} &\to \mathbb{Z}^n_{\text{col}} \\ \mathbf{v} &\mapsto A\mathbf{v}. \end{aligned}$$

命题 4.8.14 若 $\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{Z}^m$, 则 $n = m$.

证明 沿用命题 4.8.13 中的记号, 存在 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{Z})$ 与 $B \in M_{n\times m}(\mathbb{Z})$ 使得 $\phi_A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^m)$, $\phi_B \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, \mathbb{Z}^n)$, 且 $\phi_B \circ \phi_A = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}^n}$, $\phi_A \circ \phi_B = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}^m}$, 也即 $AB = I_m$, $BA = I_n$. 于是 $n = \mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB) = m$. □

定义 4.8.15 设 $f : A \to B$ 是 Abel 群之间的同态, 则称商群 $B/\operatorname{Im} f$ 为 f 的余核, 记作 $\operatorname{Coker} f$.

注记 4.8.16 与核是用来刻画同态的单性 ($\operatorname{Ker} f = 1 \iff f$ 是单射) 相对应, 余核是用来刻画同态的满性 ($\operatorname{Coker} f = 1 \iff f$ 是满射).

命题 4.8.17 设 G 为有限生成 Abel 群, 则存在整数矩阵 A, 使得 $G \simeq \operatorname{Coker}(\phi_A)$.

证明 由命题 4.8.9, 存在 $K \leqslant \mathbb{Z}^n$ 使得 $G \simeq \mathbb{Z}^n/K$, 再由命题 4.8.11, K 是有限生成的, 故存在 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m \in K$ 使得 $K = \mathbb{Z}\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbb{Z}\mathbf{v}_m$. 取 $A = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m) \in M_{n\times m}(\mathbb{Z})$, 则 $\operatorname{Im}(\phi_A) = K$, 得证. □

下面考虑可逆整方阵 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}) = \{A \in M_n(\mathbb{Z}) : \det(A) = \pm 1\}$.

练习 4.8.18 设 $A \in M_n(\mathbb{Z})$, 则 $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}) \iff \phi_A \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$.

定义 4.8.19 称 $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{Z})$ 为 $\mathbb{Z}$-相抵的, 若存在 $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ 与 $Q \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$ 使得 $B = PAQ$.

注记 4.8.20 $\mathbb{Z}$-相抵是 $M_{n\times m}$ 上的等价关系.

命题 4.8.21 设 $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{Z})$ 是 $\mathbb{Z}$-相抵的, 则 $\operatorname{Coker}(\phi_A) \simeq \operatorname{Coker}(\phi_B)$.

证明 设 $B = P^{-1}AQ$, 其中 $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}), Q \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$, 则有如下左半交换图 ($\phi_A \circ \phi_Q = \phi_P \circ \phi_B$):

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^m \arrow[r, "\phi_A"] & \mathbb{Z}^n \arrow[r, two heads, "\text{can}"] & \operatorname{Coker}(\phi_A) \\
\mathbb{Z}^m \arrow[u, "\phi_Q", "\wr"'] \arrow[r, "\phi_B"'] & \mathbb{Z}^n \arrow[u, "\phi_P", "\wr"'] \arrow[r, two heads, "\text{can}"'] & \operatorname{Coker}(\phi_B) \arrow[u, dashed, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

由此可见 $\phi_P(\operatorname{Im}(\phi_B)) = \operatorname{Im}(\phi_A)$, 由练习 4.3.25 即得 $\mathbb{Z}^n/\operatorname{Im}(\phi_B) \simeq \mathbb{Z}^n/\operatorname{Im}(\phi_A)$. □

定理 4.8.22 (Smith 标准形) 设 $A \in M_{n\times m}(\mathbb{Z})$, 则存在 $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ 与 $Q \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$ 使得

$$P^{-1}AQ = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_r, O),$$

其中 $r=\mathrm{rank}(A)$, 正整数 $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_r$.

例 4.8.23 $A := \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} =: B$. 由命题 4.8.21, $\mathrm{Coker}(\phi_A) \simeq \mathrm{Coker}(\phi_B)$, 即

$$\mathbb{Z}^2 \Big/ \left\{ \begin{pmatrix} 2a+4b \\ 6a+5b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\} \simeq \mathbb{Z}^2/(\mathbb{Z} \times 14\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}) \simeq \{0\} \times \mathbb{Z}_{14} \simeq \mathbb{Z}_{14}.$$

其中第二处同构用到了练习 4.8.24.

练习 4.8.24 设 G_1, G_2 为群, $N_1 \lhd G_1, N_2 \lhd G_2$, 则 $(N_1 \times N_2) \lhd (G_1 \times G_2)$, 且 $(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \simeq (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$.

定理 4.8.25 (有限生成 Abel 群结构定理) 设 G 为有限生成 Abel 群, 则存在群同构

$$G \simeq (\mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_r}) \oplus \mathbb{Z}^s,$$

其中 $s \geqslant 0$, 正整数 $d_1 \mid \cdots \mid d_r$ 称为 G 的不变因子. 特别地, 当 G 为有限群时, $s=0$, 从而

$$G \simeq \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_r}.$$

证明 由命题 4.8.17, 存在 $A \in M_{n\times m}(\mathbb{Z})$ 使得 $G \simeq \mathrm{Coker}(\phi_A)$. 设 A 相抵于 $B=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_r,O)$, 由命题 4.8.21 与练习 4.8.24,

$$\mathrm{Coker}(\phi_A) \simeq \mathrm{Coker}(\phi_B) = \mathbb{Z}^n/(d_1\mathbb{Z} \times \cdots d_r\mathbb{Z} \times 0\mathbb{Z} \cdots \times 0\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^{n-r},$$

记 $s=n-r$, 则

$$G \simeq (\mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_r}) \oplus \mathbb{Z}^s.$$

□

推论 4.8.26 设 $A \in M_n(\mathbb{Z})$, 则 $\mathrm{Coker}(\phi_A)$ 有限当且仅当 $\det(A) \neq 0$. 此时, $|\mathrm{Coker}(\phi_A)| = |\det(A)|$.

推论 4.8.27 设 $K \leqslant \mathbb{Z}^n$, 则

(1) 存在 $\mathbb{Z}^n$ 的一组基 $\{\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n\}$, 以及正整数 $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_r$, 使得 $\{d_1\mathbf{e}_1,\cdots,d_r\mathbf{e}_r\}$ 恰为 K 的基. 特别地, K 是自由 Abel 群, $\mathrm{rank}(A)=r \leqslant n$.

(2) $\mathbb{Z}^n/K \simeq \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_r} \oplus \mathbb{Z}^{n-r}$.

证明 取 K 的一个生成元集 $\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m\} \subset \mathbb{Z}^n$, 令 $A=(\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m)$, 其 Smith 标准形为 $B = P^{-1}AQ = \mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_r,O)$, 其中 $P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}), Q \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{Z})$. 在命题 4.8.21 证明的交换图中, 取 $\mathbb{Z}^n$ 的标准正交基 $\{\mathbf{f}_1,\cdots,\mathbf{f}_n\}$, 则 $\{d_1\mathbf{f}_1,\cdots,d_r\mathbf{f}_r\}$ 为的 $\mathrm{Im}(\phi_B)$ 的基. 而 $\phi_P(\mathrm{Im}(\phi_B)) = \mathrm{Im}(\phi_A) = K$, 令 $\mathbf{e}_i = \phi_P(\mathbf{f}_i)$, 则 $\{d_1\mathbf{e}_1,\cdots,d_r\mathbf{e}_r\}$ 为 K 的基. □

定义 4.8.28 定义 Abel 群 G 的扭子群 $t(G)=\{g \in G : g \text{ 有限阶}\} = \{g \in G: \text{ 存在 } n>0 \text{ 使 } ng=0_G\}$.

注记 4.8.29 $t(G) \leqslant G$.

用扭子群的概念可以将定理 4.8.25 内蕴表述为以下定理.

定理 4.8.30 设 G 为有限生成 Abel 群, 则存在内直和分解 $G=t(G)\oplus F$, 使得 F 为有限生成自由 Abel 群 (称其为 $t(G)$ 的补), $|t(G)| < +\infty$, 且 $t(G) \simeq \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_r}$.

证明 由定理 4.8.25, 设存在群同构 $\theta:(\mathbb{Z}_{d_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{d_r})\oplus\mathbb{Z}^s\xrightarrow{\sim}G$. 记 $U=\mathbb{Z}_{d_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{d_r}$, $V=\mathbb{Z}^s$, 则 $U\simeq\theta(U)\leqslant G, V\simeq\theta(V)\leqslant G$. 由 $|\theta(U)|<+\infty$ 即知 $\theta(U)\subset t(G)$, 而 $V\simeq\theta(V)$ 中的元素显然为无限阶的, 因此 $\theta(U)=t(G)$. 取 $F=\theta(V)$ 即得证. □

注记 4.8.31 (1) 此分解中 F 不唯一, 但在同构意义下唯一, $F\simeq G/t(G)$.

(2) 若 $F\simeq\mathbb{Z}^s$, 则称 s 为 G 的秩, 记为 $\operatorname{rank}(G)$.

不变因子与初等因子 在定理 4.8.25 中, 当 G 为有限群时, $G\simeq\mathbb{Z}_{d_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{d_r}$, 其中 $d_1\mid\cdots\mid d_r$ 为 G 的不变因子. 对这些不变因子进行标准素分解:

$$d_i=p_1^{s_{1i}}\cdots p_t^{s_{ti}},\quad s_{1i},\cdots,s_{ti}\geqslant 0.$$

对互异的素数 $p_1,\cdots,p_t$, 由定理 2.8.4 可得环同构 $\mathbb{Z}_{p_1^{s_{1i}}\cdots p_t^{s_{ti}}}\simeq\mathbb{Z}_{p_1^{s_{1i}}}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{p_t^{s_{ti}}}$, 仅保留加法结构便得到群同构 $\mathbb{Z}_{p_1^{s_{1i}}\cdots p_t^{s_{ti}}}\simeq\mathbb{Z}_{p_1^{s_{1i}}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p_t^{s_{ti}}}$. 因此

$$\begin{aligned}G&\simeq\left(\mathbb{Z}_{p_1^{s_{11}}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p_t^{s_{t1}}}\right)\oplus\cdots\oplus\left(\mathbb{Z}_{p_1^{s_{1r}}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p_t^{s_{tr}}}\right)\\&\simeq\underbrace{\left(\mathbb{Z}_{p_1^{s_{11}}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p_1^{s_{1r}}}\right)}_{\text{Sylow }p_1\text{-子群}}\oplus\cdots\oplus\underbrace{\left(\mathbb{Z}_{p_t^{s_{t1}}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p_t^{s_{tr}}}\right)}_{\text{Sylow }p_t\text{-子群}},\end{aligned}$$

其中 $s_{11}\leqslant\cdots\leqslant s_{1r},\cdots,s_{t1}\leqslant\cdots\leqslant s_{tr}$. 我们将第一个分解中的 $p_1^{s_{11}}\cdots p_t^{s_{t1}},\cdots,p_1^{s_{1r}}\cdots p_t^{s_{tr}}$ 称为 G 的初等因子. 回顾线性代数知识, 这里第一种分解可类比于 Jordan 块, 第二种分解可类比于根子空间分解.

例 4.8.32 分类 1500 阶 Abel 群.

解答 设群 G 满足 $|G|=1500=2^2\cdot 3^1\cdot 5^3$, 则

- ◇ G 的 Sylow 2-子群在同构意义下有 $\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ 共 2 种.
- ◇ G 的 Sylow 3-子群在同构意义下有 $\mathbb{Z}_3$ 共 1 种.
- ◇ G 的 Sylow 5-子群在同构意义下有 $\mathbb{Z}_{125},\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}_{25},\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}_5$ 共 3 种.

故 G 共有 $2\cdot 1\cdot 3=6$ 种可能. □

例 4.8.33 在例 4.8.32 中, 若 $G\simeq\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}_{25}$, 则 G 的初等因子 (按降序) 为 $2^2\cdot3^1\cdot5^2, 2^0\cdot3^0\cdot5^1$; 若 $G\simeq\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}_{25}$, 则 G 的初等因子 (按降序) 为 $2^1\cdot3^1\cdot5^2, 2^1\cdot3^0\cdot5^1$.

练习 4.8.34 设 Abel 群 $A\simeq B$, 整数 $m\mid n$, 则 $mA/nA\simeq mB/nB$. 特别地, $A/nA\simeq B/nB$.

下面的命题表明不变因子与初等因子均由群 G 唯一确定.

命题 4.8.35 设 p 为素数, $\mathbb{Z}_{p^{s_1}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p^{s_n}}\simeq\mathbb{Z}_{p^{t_1}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p^{t_m}}$, 其中 $1\leqslant s_1\leqslant\cdots\leqslant s_n, 1\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_m$, 则 $n=m, s_i=t_i\ (1\leqslant i\leqslant n)$.

证明 记 $A=\text{LHS}, B=\text{RHS}$. 由练习 4.8.24,

$$A/pA\simeq(\mathbb{Z}_{p^{s_1}}/p\mathbb{Z}_{p^{s_1}})\oplus\cdots\oplus(\mathbb{Z}_{p^{s_n}}/p\mathbb{Z}_{p^{s_n}}).$$

注意到对 $1\leqslant i\leqslant n$, $\mathbb{Z}_{p^{s_i}}/p\mathbb{Z}_{p^{s_i}}$ 是循环群的商群, 因此均为循环群, 且 $\operatorname{ord}(\overline{1})=p$, 因此 $\mathbb{Z}_{p^{s_i}}/p\mathbb{Z}_{p^{s_i}}\simeq\mathbb{Z}_p$, 从而 $A/pA\simeq(\mathbb{Z}_p)^n$. 同理可得 $B/pB\simeq(\mathbb{Z}_p)^m$, 由练习 4.8.34 即知 $(\mathbb{Z}_p)^n\simeq(\mathbb{Z}_p)^m$, 从而 $n=m$. 再次运

用练习 4.8.24 可得

$$pA/p^2A \simeq \left(p\mathbb{Z}_{p^{s_1}}/p^2\mathbb{Z}_{p^{s_1}}\right) \oplus \cdots \oplus \left(p\mathbb{Z}_{p^{s_n}}/p^2\mathbb{Z}_{p^{s_n}}\right) \simeq (\mathbb{Z}_p)^{\sharp\{1\leqslant i\leqslant n: s_i\geqslant 2\}}.$$

同理 $pB/p^2B \simeq (\mathbb{Z}_p)^{\sharp\{1\leqslant j\leqslant m: t_j\geqslant 2\}}$, 由练习 4.8.34 即知 $\sharp\{1 \leqslant i \leqslant n : s_i \geqslant 2\} = \sharp\{1 \leqslant j \leqslant m : t_j \geqslant 2\}$, 结合 $n = m$ 及 $1 \leqslant s_1 \leqslant \cdots \leqslant s_n, 1 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_m$ 即得 $s_1 = t_1$. 余下类似可证. □

练习 4.8.36 证明: 有限生成 Abel 群 G 是自由 Abel 群当且仅当 G 的每个非零元都是无限阶元素.

练习 4.8.37 设 A 为有限 Abel 群, 证明: 对于 $|A|$ 的每个正因子 d, A 均有 d 阶子群和 d 阶商群.

练习 4.8.38 设 H 是有限 Abel 群 A 的子群, 证明: A 有同构于 A/H 的子群.

练习 4.8.39 若有限 Abel 群 A 不是循环群, 则存在素数 p 使得 A 有同构于 $\mathbb{Z}_p^2 = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ 的子群.

练习 4.8.40 证明: 当 $(m, n) = 1$ 时, $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ 的不变因子为 $\{mn\}$; 而当 $(m, n) > 1$ 时, $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ 的不变因子为 $\{(m, n), [m, n]\}$.

练习 4.8.41 求 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{35}$ 的初等因子和不变因子.

4.9 群的合成列

定义 4.9.1 群 G 的递降子群链

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n = \{1_G\}$$

如满足 $G_{i+1} \lhd G_i, \forall 0 \leqslant i < n$, 则称之为正规列, 而群族

$$G_i/G_{i+1}, \quad i = 0, \cdots, n-1$$

称为该列的子商.

定义 4.9.2 若群 G 的正规列 $G = G_0 \supsetneq G_1 \supsetneq \cdots \supsetneq G_n = \{1_G\}$ 满足子商皆为单群, 则称之为合成列. 我们称整数 n 为该合成列的长度.

注记 4.9.3 在合成列中, 群 G 由子商 "拼成".

例 4.9.4 群 G 为单群当且仅当 $G \supset \{1_G\}$ 为合成列.

引理 4.9.5 有限群 G 必有合成列.

证明 若 $|G| = 1$, 取平凡合成列. 若 G 为非平凡单群, 取合成列 $G \supsetneq \{1_G\}$. 对余下情形, 对 $|G|$ 归纳: 取 G 的阶最大的正规的真子群 N, 则 G/N 为单群. 由于 $|N| < |G|$, 归纳假设给出了 N 的合成列 (N_i), 取 $(G, N_0, N_1, \cdots)$ 作为 G 的合成列即可. □

注记 4.9.6 无限群未必有合成列, 例如 $\mathbb{Z}$.

例 4.9.7 (合成列未必唯一) 由例 4.4.33 与例 4.3.12 可得合成列 $S_4 \supsetneq A_4 \supsetneq K_4 \supsetneq \{1, \sigma_i\} \supsetneq \{\mathrm{Id}\}$, 其中

$$\sigma_1 = (12)(34), \quad \sigma_2 = (13)(24), \quad \sigma_3 = (14)(23).$$

由于 i 可任选为 $1, 2$ 或 3, 因此上述合成列的选取并不唯一.

定义 4.9.8 设 $G = G_0 \supset \cdots$ 为正规列, 我们视其子商 $(G_i/G_{i+1})_{i\geqslant 0}$ 为不计顺序, 但计入重数的集合. 如果两个正规列长度相同, 而且其子商在上述意义下相等, 则称两正规列等价.

定义 4.9.9 考虑一列群同态

$$\cdots \xrightarrow{f_0} G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_i} G_{i+1} \to \cdots,$$

长度或有限或无限. 若对所有 i 都有

$$\mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1}),$$

则称此列正合. 我们经常把 $\{1\}$ 简写为 1, 或用加性符号记为 0.

例 4.9.10 (1) 对于任意同态 $\varphi : G \to G'$, 列 $G \to G' \to 1$ 正合当且仅当 φ 是满的, 列 $1 \to G \to G'$ 正合当且仅当 φ 是单的.

(2) 我们恒有正合列

$$1 \to \mathrm{Ker}(\varphi) \to G \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Im}(\varphi) \to 1$$

其中 $\mathrm{Ker}(\varphi) \to G$ 是自然的包含映射.

定理 4.9.11 (Jordan-Hölder 定理) 群 G 的任两个合成列皆等价.

证明 设 $(G_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ 为群 G 的合成列, 对每个单群 S, 记 $n(G, (G_i), S)$ 为在同构意义下 S 在 G 的全体子商中出现的次数, 只需证 $n(G, (G_i), S)$ 与合成列 (G_i) 的选取无关. 注意到若 $H \leqslant G$, 则通过定义 $H_i = G_i \cap H$, 正规列 (G_i) 诱导出 H 的正规列 (H_i). 类似地, 若 $N \lhd G$, 则 $(G/N)_i = G_i/(G_i \cap N)$ 定义出 G/N 的正规列 $((G/N)_i)$. 正合列 $1 \to N \to G \to G/N \to 1$ 诱导出正合列

$$1 \to N_i/N_{i+1} \to G_i/G_{i+1} \to (G/N)_i/(G/N)_{i+1} \to 1.$$

由于 (G_i) 为合成列, 从而 G_i/G_{i+1} 均为单群, 因此 N_i/N_{i+1} 必为 1 或 G_i/G_{i+1}. 据此, 我们将指标集 $I = \{0, \cdots, n-1\}$ 分为两部分

$$I_1 = \{i : N_i/N_{i+1} = G_i/G_{i+1}\}, \quad I_2 = \{i : N_i/N_{i+1} = 1\}.$$

分别利用 I_1 和 I_2 作为指标集, 我们得到 N 和 G/N 上的合成列, 且 $|I_1| + |I_2| = n$. 为证明定理, 我们对合成列的长度 n 进行归纳. 当 $n \leqslant 1$ 时, 不证自明. 现假定 $n \geqslant 2$, 则 G 不是平凡群也不是单群, 因此可取 G 的一个非平凡正规真子群 N. 根据上述讨论, $|I_1|$ 和 $|I_2|$ 都小于 n, 从而可以对 N 以及 G/N 用归纳假设, 这表明 $n(N, (N_i)_{i\in I_1}, S)$ 和 $n(G/N, ((G/N)_i)_{i\in I_2}, S)$ 与合成列的选取无关. 又因为

$$n(G, (G_i), S) = n(N, (N_i)_{i\in I_1}, S) + n(G/N, ((G/N)_i)_{i\in I_2}, S),$$

所以 $n(G, (G_i), S)$ 与合成列的选取无关. □

因此, 一旦群 G 有合成列, 则其子商在定义 4.9.8 的意义下无关合成列的选取.

定义 4.9.12 假设群 G 有合成列, 定义其合成因子或 Jordan-Hölder 因子集 $\mathrm{JH}(G)$ 为其任意合成列的全体子商 (不计顺序, 计入重数), 并将合成列的长度称为群 G 的长度, 记作 $\ell(G)$. 如果一个群没有合成列, 我们约定其长度为 ∞.

命题 4.9.13 设 G 为有限群, 则 G 为可解群当且仅当 $\mathrm{JH}(G)$ 中任一合成因子均为素数阶循环群.

证明 ($\Rightarrow$) 由练习 4.4.35 立得.

($\Leftarrow$) 循环群是 Abel 群. $\square$

练习 4.9.14 证明：若群 G 有合成列, $N \lhd G$, 则 N 亦有合成列. 若 $N \leqslant G$, 结论是否成立?

定义 4.9.15 设 G 为群, 对于 $x, y \in G$, 定义换位子 $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

注记 4.9.16 $xy = yx$ 当且仅当 $[x, y] = 1_G$.

定义 4.9.17 设 G 为群, 对任意子集 $A, B \subset G$, 定义 $[A, B] \lhd G$ 为由 $\{[a, b] : a \in A, b \in B\}$ 生成的最小正规子群. 我们称 $G_{\mathrm{der}} \coloneqq [G, G]$ 为 G 的导出子群或换位子群, 而 $G_{\mathrm{ab}} \coloneqq G/G_{\mathrm{der}}$ 称为 G 的 Abel 化.

注记 4.9.18 (1) G_{der} 亦可直接定义为由群 G 中换位子生成的子群, 可证它是正规子群.

(2) 若 G 是 Abel 群, 则 $G_{\mathrm{der}} = \{1_G\}$.

(3) G_{ab} 是 Abel 群.

按照定义, 我们有

命题 4.9.19 设 G 为群, $H \leqslant G$, 则以下等价:

(1) $H \supset G_{\mathrm{der}}$.

(2) $H \lhd G$ 且 G/H 为 Abel 群.

例 4.9.20 考虑例 4.7.19 中的 Q_8, 由练习 4.7.20, $[b, a] = bab^{-1}a^{-1} = \left(bab^{-1}a\right)a^{-2} = a^{-2}a^4 = a^2 \in (Q_8)_{\mathrm{der}}$. 而 $\left\{1, a^2\right\} \lhd Q_8$, 由命题 4.9.19, $(Q_8)_{\mathrm{der}} = \left\{1, a^2\right\}$.

例 4.9.21 设 G 为非 Abel 单群, 则 $G_{\mathrm{der}} = G$.

练习 4.9.22 对 $n \geqslant 3$, 有 $(S_n)_{\mathrm{der}} = A_n$.

证明 由命题 4.9.19, $(S_n)_{\mathrm{der}} \subset A_n$. 而由例 4.4.7, 当 $n \geqslant 3$ 时, S_n 是非 Abel 群, 因此 $(S_n)_{\mathrm{der}} \neq \{\mathrm{Id}\}$.

- 若 $n = 3$, 由例 4.4.31 中 S_3 的子群格, A_3 仅有平凡子群, 因此 $(S_3)_{\mathrm{der}} = A_3$.
- 若 $n = 4$, 由表 4.3 可见 A_4 的正规子群为 $\{\mathrm{Id}\}, K_4, A_4$. 由于 $(12)(13)(12)^{-1}(13)^{-1} = (123) \notin K_4$, 因此 $(S_4)_{\mathrm{der}} = A_4$.
- 若 $n \geqslant 5$, 由定理 4.4.36, A_n 为单群, 因此 $(S_n)_{\mathrm{der}} = A_n$. $\square$

定义 4.9.23 设 G 为群, 递归地定义 G 的导出列:

$$G^{(0)} = G, \quad G^{(i+1)} = \left[G^{(i)}, G^{(i)}\right], i \geqslant 0.$$

定理 4.9.24 群 G 为可解群当且仅当存在正整数 n, 使得 $G^{(n)} = \{1_G\}$.

证明 ($\Leftarrow$) 由于 $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ 是 $G^{(i)}$ 的 Abel 化, 因此正规列 $G = G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset \cdots \supset G^{(n)} = \{1_G\}$ 的每个子商均为 Abel 群, 从而 G 为可解群.

($\Rightarrow$) 设正规列 $G \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_n = \{1_G\}$ 中每个子商均为 Abel 群. 由命题 4.9.19, $G_1 \supset G^{(1)}, G_2 \supset G_1^{(1)} \supset \left(G^{(1)}\right)^{(1)} = G^{(2)}, \cdots, G_n \supset G^{(n)}$, 从而 $G^{(n)} = 1_G$. $\square$

定理 4.9.25 (Burnside) $p^a q^b$ 阶群是可解群, 其中 p, q 为素数, a, b 为非负整数.

定理 4.9.26 (Feit-Thompson) 奇数阶群是可解群.

4.10 半直积

定义 4.10.1 设 H, N 为群, 并给定同态 $\rho: H \to \mathrm{Aut}(N)$. 相应的半直积 $N \rtimes_\rho H$ 为如下定义的群 (下标 ρ 经常略去):

- 作为集合, $N \rtimes H$ 无非是积集 $N \times H$;
- 二元运算是 $(n,h)(n',h') = (n\rho(h)(n'), hh')$, 其中 $n, n' \in N$, $h, h' \in H$.

注记 4.10.2 (1) 若 $\rho(h) = \mathrm{Id}_N, \forall h \in H$, 则 $N \rtimes_\rho H = N \times H$.

(2) 幺元是 $(1_N, 1_H)$.

(3) $(n,h)^{-1} = \big(\rho(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1}\big)$.

(4) 透过单同态 $h \mapsto (1,h)$ 和 $n \mapsto (n,1)$ 可将 H 和 N 都视为 $N \rtimes H$ 的子群. 从二元运算的定义立得 $N \lhd (N \rtimes H)$.

定理 4.10.3 设 G 为群, $N \lhd G$, $H \leqslant G$, $N \cap H = \{1_G\}$, $NH = G$. 定义

$$\rho: H \to \mathrm{Aut}(N), \quad h \mapsto \big(n \mapsto hnh^{-1}\big),$$

则有群同构

$$N \rtimes_\rho H \xrightarrow{\sim} G, \quad (n,h) \mapsto nh.$$

例 4.10.4 考虑 $A_3 \lhd S_3$, $H = ((12)) \leqslant S_3$, 以及群同态 $\rho: H \to \mathrm{Aut}(A_3), h \mapsto \big(n \mapsto hnh^{-1}\big)$ (易验证这是群同态), 由于 $A_3 \cap H = \{\mathrm{Id}\}$, $A_3 \times H = S_3$, 由定理 4.10.3, $S_3 \simeq A_3 \rtimes_\rho H \simeq C_3 \rtimes_\rho C_2$.

练习 4.10.5 考虑练习 4.7.20 中的 Q_8, 证明不存在 Q_8 的真子群 H 与 $N \lhd Q_8$, 使得 $N \cap H = \{1\}$ 且 $Q_8 = N \rtimes H$.

证明 用反证法, 假设存在, 则 $|N| = 2$ 或 4.

- 若 $|N| = 4$, 则 $|H| = 2$, 而 Q_8 中只有一个 2 阶元 a^2, 因此 $H = \{1, a^2\}$. 而此时 Q_8/N 为 2 阶群, 即 $Q_8/N \simeq C_2$, 因此 $(aN)^2 = a^2N = N$, 即 $a^2 \in N$, 这与 $N \cap H = \{1\}$ 矛盾.
- 若 $|N| = 2$, 则 $|H| = 4$, $[Q_8 : H] = 2$, 由例 4.3.12 知 $H \lhd Q_8$. 又 $N \cap H = \{1\}$, 由练习 4.3.28 即知 $Q_8 = NH \simeq N \times H$ 为 Abel 群, 矛盾. □

第五章 Galois 理论

5.1 Galois 扩张

设 K 为域, $G \leqslant \operatorname{Aut}(K)$, 则有 $G \curvearrowright K : (\sigma, v) \mapsto \sigma(v)$, 其不动点集 $K^G = \{v \in K : \sigma(v) = v, \forall \sigma \in G\}$ 称为 G-不动子域. 我们有如下事实:

- K^G 是 K 的子域.
- 若 $H \leqslant G$, 则有 $K^G \hookrightarrow K^H \hookrightarrow K = K^{\{\mathrm{Id}_K\}}$. (群越小, 不动子域越大.)
- 考虑域扩张 K/k, 且 $H \leqslant \operatorname{Gal}(K/k)$, 则有 $k \hookrightarrow K^H \hookrightarrow K$. 特别地, $k \hookrightarrow K^{\operatorname{Gal}(K/k)} \hookrightarrow K$.
- $G \leqslant \operatorname{Gal}\big(K/K^G\big)$.

定理 5.1.1 若 $G \leqslant \operatorname{Aut}(K)$ 是有限子群, 则 $\big[K : K^G\big] = |G| < +\infty$ 且 $G = \operatorname{Gal}\big(K/K^G\big)$.

证明 令 $n = |G|, k = K^G$, 断言 $[K : k] \leqslant n$. 若断言已证, 则由

$$n = |G| \leqslant |\operatorname{Gal}(K/k)| \leqslant [K : k] \leqslant n$$

即得欲证. 下面采用反证法证明断言, 假设 $[K : k] \geqslant n + 1$, 则存在 $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\} \subset K$ 是 k-线性无关的. 设 $G = \{\sigma_0 = \mathrm{Id}, \sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}\}$, 令

$$A = \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_{n+1} \\ \sigma_1(e_1) & \cdots & \sigma_1(e_{n+1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n-1}(e_1) & \cdots & \sigma_{n-1}(e_{n+1}) \end{pmatrix} \in M_{n \times (n+1)}(K),$$

并记 $V = \big\{\mathbf{v} \in K^{n+1} : A\mathbf{v} = \mathbf{0}\big\}$ 为 K^{n+1} 的线性子空间, 由 $\operatorname{rank}(A) \leqslant n < n + 1$ 知 $V \neq \{\mathbf{0}\}$. 考虑群作用 $G \curvearrowright K^{n+1} : \Big(\sigma, (\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1})^\mathsf{T}\Big) \mapsto (\sigma(\lambda_1), \cdots, \sigma(\lambda_{n+1}))^\mathsf{T}$. 对任意 $\mathbf{v} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1})^\mathsf{T} \in V$, 由 $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \sigma_i(e_k) = 0, 0 \leqslant i \leqslant n-1 &\implies \sum_{k=1}^{n+1} \sigma_j(\lambda_k) \sigma_j \circ \sigma_i(e_k) = 0, 0 \leqslant i, j \leqslant n-1 \\ &\implies \sum_{k=1}^{n+1} \sigma_j(\lambda_k) \sigma_i(e_k) = 0, 0 \leqslant i, j \leqslant n-1 \xRightarrow{\tau = \sigma_j} \tau.\mathbf{v} \in V, \forall \tau \in G. \end{aligned}$$

取 $\mathbf{v}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1})^{\mathsf{T}}\in V\setminus\{\mathbf{0}\}$ 使其非 0 分量最少. 观察到 $\mathbf{v}$ 至少有 2 个非 0 分量 (否则, 不妨设仅有 $\lambda_1\neq 0$, 则由 $A\mathbf{v}=\mathbf{0}$ 得 $\lambda_1 e_1=0$, 但 $\lambda_1,e_1\neq 0$, 矛盾). 因此不妨设 $\lambda_1\lambda_2\neq 0$, 进而可不妨设 $\lambda_1=1$, 即 $\mathbf{v}=(1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1})^{\mathsf{T}}$, 其中 $\lambda_2\neq 0$. 注意到 $\mathbf{v}$ 的分量不全在 k 中, 否则由 $A\mathbf{v}=\mathbf{0}$ 知 $\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_{n+1}e_{n+1}=0$, 与 $e_1,\cdots,e_{n+1}$ 是 k-线性无关的矛盾. 不妨设 $\lambda_2\notin k=K^G$, 则存在 $\tau\in G$ 使 $\tau(\lambda_2)\neq\lambda_2$. 由 $\tau.\mathbf{v}\in V$ 知 $\mathbf{v}-\tau.\mathbf{v}\in V$, 但由 $\tau(0)=0,\tau(1)=1$ 可见 $\mathbf{v}-\tau.\mathbf{v}\in V$ 的非 0 分量比 $\mathbf{v}$ 更少, 矛盾. □

定义–定理 5.1.2 设 K/k 为有限维域扩张, $G=\mathrm{Gal}(K/k)$, 则以下等价:

(1) $k=K^G$.

(2) $|G|=[K:k]$.

(3) 对任意 $\alpha\in K$, α 在 k 上的最小多项式无重根, 且在 K 上分裂.

(4) 存在可分多项式 $f(x)\in k[x]$ 使得 $K=(k,f(x))$.

此时称 K/k 为有限 Galois 扩张.

证明 **(1) ⇔ (2)** 由定理 3.2.4 与定理 5.1.1 得

$$[K:k]=\left[K^G:k\right]\left[K:K^G\right]=\left[K^G:k\right]\cdot|G|,$$

因此 $|G|=[K:k] \iff \left[K^G:k\right]=1 \iff k=K^G$.

(2) ⇒ (3) 任取 $\alpha\in K$, 设 α 在 k 上的最小多项式为 $g(x)$. 由引理 3.3.1,

$$|G|=|\mathrm{Gal}(K/k)|\leqslant|\mathrm{Root}_K(g(x))|\cdot[K:k(\alpha)]\leqslant\deg(g(x))\cdot[K:k(\alpha)]=[K:k],$$

而由 (2), $|G|=[K:k]$, 因此上式中均取等号, 因此 $|\mathrm{Root}_K(g(x))|=\deg(g(x))$.

(3) ⇒ (4) 由定理 3.2.11, 可设 $K=k(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 其中 $\alpha_i\in K$ 在 k 上的最小多项式为 $g_i(x)$. 由 (3), $g_i(x)$ 无重根, 且在 K 上分裂. 令 $f(x)=g_1(x)\cdots g_n(x)\in k[x]$, 则 $f(x)$ 可分且 $K=(k,f(x))$.

(4) ⇒ (2) 这是定理 3.3.30. □

注记 5.1.3 (1)(2)(4) 是整体性质, (3) 是局部性质.

例 5.1.4 考虑 $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2},\omega\right)=E$.

- ⋄ $E/\mathbb{Q}$ 是 Galois 扩张, $E=\left(\mathbb{Q},x^3-2\right)$ (例 3.3.7).
- ⋄ $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)/\mathbb{Q}$ 不是 Galois 扩张 (例 3.3.29).
- ⋄ $E/\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ 是 Galois 扩张 (例 3.2.7).

定理 5.1.5 (绝对版本的有限 Galois 对应) 对任意域 K, 存在双射

$$\begin{aligned}\{\text{有限子群 } G\leqslant\mathrm{Aut}(K)\} &\xleftrightarrow{1:1} \{\text{子域 } k\subset K:\ K/k \text{ 为有限 Galois 扩张}\}\\ G &\longmapsto K^G\\ \mathrm{Gal}(K/k) &\longleftarrow\!\shortmid\ k\end{aligned}$$

证明 映射的良定性由定义-定理 5.1.2 (1)(2) 可见, 互逆性由定理 5.1.1 与定义-定理 5.1.2 (1) 可见. □

定理 5.1.6 (相对版本的有限 Galois 对应) 设 K/k 为有限 Galois 扩张, 则存在双射

$$\begin{aligned} \{\text{子群 } H \leqslant \mathrm{Gal}(K/k)\} &\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{K/k \text{ 的中间域}\} \\ H &\longmapsto K^H \\ \mathrm{Gal}(K/E) &\longleftarrow\!\shortmid\ E \end{aligned}$$

证明 互逆性在于:

- ⋄ 由定理 5.1.1, $H = \mathrm{Gal}\big(K/K^H\big)$.
- ⋄ 若 E 是 K/k 的中间域, 则由定义-定理 5.1.2 (4), K/E 亦为有限 Galois 扩张, 再由定义-定理 5.1.2 (1) 知 $E = K^{\mathrm{Gal}(K/E)}$. □

从例 5.1.4 可见, Galois 扩张的中间域关于底层的域不一定是 Galois 扩张:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q} \arrow[r, dash, "\text{非 Galois 扩张}"] \arrow[rr, dash, bend right, "\text{Galois 扩张}"'] & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \arrow[r, dash, "\text{Galois 扩张}"] & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) \end{tikzcd}$$

关于这一现象, 我们有如下命题.

命题 5.1.7 设 K/k 是有限 Galois 扩张, E 是 K/k 的中间域, 则 E/k 是 Galois 扩张当且仅当 $\sigma(E) = E, \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$.

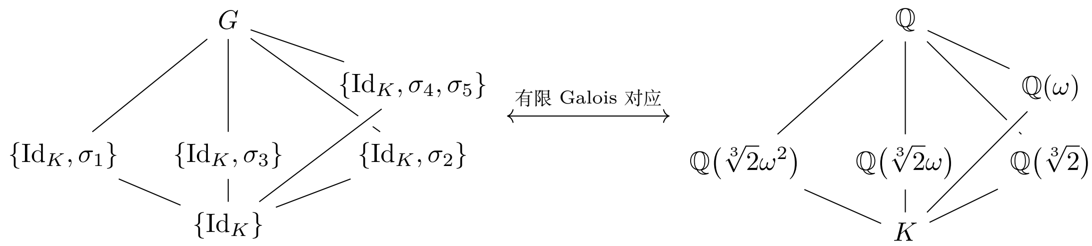
证明 ($\Rightarrow$) 由定义-定理 5.1.2 (4), 可设 $E = k(\beta_1, \cdots, \beta_n)$, $g(x) = (x-\beta_1)\cdots(x-\beta_n) \in k[x]$. 对任意 $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$, 有 $\sigma(E) = k(\sigma(\beta_1), \cdots, \sigma(\beta_n))$, 而由 $g(x) \in k[x]$ 知 $\sigma(\beta_i)_E \in \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 因此 $\sigma(E) \subset E$. 同理可得 $\sigma^{-1}(E) \subset E$, 即 $E \subset \sigma(E)$. 故 $\sigma(E) = E$.

($\Leftarrow$) 任取 $b \in E$, 设 b 在 k 上的最小多项式为 $g(x) \in k[x]$. 由于 K/k 是有限 Galois 扩张, 由定义-定理 5.1.2 (3), 可设 $g(x) = (x-\beta_1)\cdots(x-\beta_n)$, 其中 $\beta_1 = b, \beta_2, \cdots, \beta_n \in K$ 两两不同. 由引理 3.3.1, 对 $1 \leqslant i \leqslant n$, 存在域同构 $\sigma_i : k(b) \xrightarrow{\sim} k(\beta_i)$ 使得 $\sigma_i(b) = \beta_i$. 再由定理 3.3.13, σ_i 可进一步延拓为 $\delta : K \xrightarrow{\sim} K$, 即 $\delta \in \mathrm{Gal}(K/k)$. 由条件, $\beta_i = \delta(b) \in \delta(E) = E$, 从而 $g(x)$ 无重根且在 E 上分裂, 由定义-定理 5.1.2 (3), E/k 是 Galois 扩张. □

例 5.1.8 考虑 $\mathbb{Q} \subset K = \mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{2}, \omega\big) = \big(\mathbb{Q}, x^3 - 2\big)$, 记 $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, 例 3.2.7 已得 $[K : \mathbb{Q}] = 6$, 因此 $|G| = 6$. 考虑 $G \curvearrowright \mathrm{Root}_K\big(x^3 - 2\big)$, 由练习 4.5.8, 存在群的单同态 $G \hookrightarrow S\big(\mathrm{Root}_K\big(x^3 - 2\big)\big) \simeq S_3$, 而 $|S_3| = 6 = |G|$, 因此这是群同构. 记 $a = \sqrt[3]{2}, b = \sqrt[3]{2}\omega, c = \sqrt[3]{2}\omega^2$, 利用 S_3 可得 G 中元素:

S_3	G
Id	Id_K
(ab)	$\sigma_1 : \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}\omega,\ \sqrt[3]{2}\omega \mapsto \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{2}\omega^2 \mapsto \sqrt[3]{2}\omega^2$
(bc)	$\sigma_2 : \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{2}\omega \mapsto \sqrt[3]{2}\omega^2,\ \sqrt[3]{2}\omega^2 \mapsto \sqrt[3]{2}\omega$
(ca)	$\sigma_3 : \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}\omega^2,\ \sqrt[3]{2}\omega \mapsto \sqrt[3]{2}\omega,\ \sqrt[3]{2}\omega^2 \mapsto \sqrt[3]{2}$
(abc)	$\sigma_4 : \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}\omega,\ \sqrt[3]{2}\omega \mapsto \sqrt[3]{2}\omega^2,\ \sqrt[3]{2}\omega^2 \mapsto \sqrt[3]{2}$
(acb)	$\sigma_5 : \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}\omega^2,\ \sqrt[3]{2}\omega \mapsto \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{2}\omega^2 \mapsto \sqrt[3]{2}\omega$

结合例 4.4.31, 可得 G 的子群格, 并由定理 5.1.6 得到 K 的子域格:



现重述定理 3.4.21 如下.

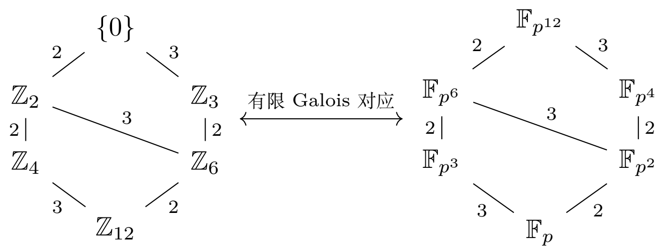
例 5.1.9 (有限域的 Galois 对应) 设 E 为有限域, $|E| = p^n$. 由注记 3.4.16 知 $E/\mathbb{F}_p$ 是 Galois 扩张. 再由注记 3.4.20 可知 $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{F}_p)$ 子群的形式. 故存在双射

$$\begin{array}{ccc} \{\text{子群 } H \leqslant \mathrm{Gal}(E/\mathbb{F}_p)\} & \xleftrightarrow{1:1} & \{E/\mathbb{F}_p \text{ 的中间域}\} \\ (\sigma^d) & \rightleftarrows & \mathrm{Root}_E\left(x^{p^d} - x\right) \end{array}$$

由于 $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{F}_p) = \mathrm{Aut}(E)$, 对于有限域, 定理 5.1.5 与定理 5.1.6 两个版本的 Galois 对应是统一的.

练习 5.1.10 画出 $\mathbb{F}_{p^{12}}/\mathbb{F}_p$ 的 Hasse 图, 这里 p 为素数.

解答 由定理 3.4.19, $\mathrm{Gal}\big(\mathbb{F}_{p^{12}}/\mathbb{F}_p\big) = \big\{\mathrm{Id}, \sigma, \sigma^2 \cdots, \sigma^{11}\big\} \simeq \mathbb{Z}_{12}$.



□

例 5.1.11 (任何有限群均可视为 Galois 扩张的 Galois 群) 对任意有限群 G, 由定理 4.5.13, 存在正整数 n 使得 G 同构于 S_n 的子群, 考虑 $S_n \curvearrowright K = k(t_1, \cdots, t_n), (\sigma, t_i) \mapsto t_{\sigma(i)}$, 则 G 可视为 $\mathrm{Aut}(K)$ 的子群. 由定理 5.1.1, $G \simeq \mathrm{Gal}\big(K/K^G\big)$. 故任何有限群 (在同构意义下) 都是某一 Galois 扩张的 Galois 群.

5.2 Galois 对应

定义 5.2.1 偏序集意指资料 $(L, \leqslant)$, 其中 L 是集合而 $\leqslant$ 是 L 上的二元关系 (偏序), 满足

- ▷ **反身性** $x \leqslant x, \forall x \in L$;
- ▷ **传递性** $(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \implies x \leqslant z$;
- ▷ **反称性** $(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant x) \implies x = y$.

例 5.2.2 记 $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$, 有如下两个偏序集:

(1) $(\mathbb{N}_+, \leqslant)$, 其中 $\leqslant$ 为自然数间的正常大小关系.

(2) $(\mathbb{N}_+, \preccurlyeq)$, 其中 $a \preccurlyeq b \iff a \mid b$.

例 5.2.3 设 G 为群, 则 $\mathrm{Sub}(G) \coloneqq \{H : H \leqslant G\}$ 在集合的包含关系下构成偏序集.

例 5.2.4 对于域扩张 K/k, $\mathrm{Lat}(K/k) \coloneqq \{K/k \text{ 的中间域}\}$ 在集合的包含关系下构成偏序集.

例 5.2.5 (反偏序集) 设 $(L, \leqslant)$ 为偏序集, 则称 $L^{\mathrm{op}} = (L, \leqslant^{\mathrm{op}})$ 为 L 的反偏序集, 其中 $a \leqslant^{\mathrm{op}} b \iff b \leqslant a$.

定义 5.2.6 设 $(L, \leqslant)$ 为偏序集.

(1) 对任意 $a, b \in L$, 称 $a \vee b \in L$ 为 a, b 的最小上界, 若

- ◇ $a \leqslant (a \vee b)$ 且 $b \leqslant (a \vee b)$.
- ◇ 若 $c \in L$ 使得 $a \leqslant c$ 且 $b \leqslant c$, 则 $(a \vee b) \leqslant c$.

(2) 对任意 $a, b \in L$, 称 $a \wedge b \in L$ 为 a, b 的最大下界, 若

- ◇ $(a \wedge b) \leqslant a$ 且 $(a \wedge b) \leqslant b$.
- ◇ 若 $c \in L$ 使得 $c \leqslant a$ 且 $c \leqslant b$, 则 $c \leqslant (a \wedge b)$.

注记 5.2.7 最小上界与最大下界若存在, 则唯一.

定义 5.2.8 偏序集 $(L, \leqslant)$ 称为格, 若对任意 $a, b \in L$, $a \vee b$ 与 $a \wedge b$ 均存在.

例 5.2.9 集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 在整除关系下构成偏序集, 但不构成格, 例如 $2 \vee 3$ 不存在.

例 5.2.10 设 G 为群, 则 $\mathrm{Sub}(G)$ 是格.

- ◇ 若 $H_1, H_2 \leqslant G$, 则 $H_1 \vee H_2 = (H_1 \cup H_2)$, $H_1 \wedge H_2 = H_1 \cap H_2$.
- ◇ 若 $H \leqslant G, N \lhd G$, 则 $H \vee N = HN = NH$.

例 5.2.11 考虑域扩张 K/k, 则 $\mathrm{Lat}(K/k)$ 是格. 若 E, F 均为 K/k 的中间域, 则 $E \wedge F = E \cap F$, $E \vee F$ 即由 $E \cup F$ 生成的域.

例 5.2.12 设 L 是格, 则其反格 L^{op} 也是格, 因为 $a \vee^{\mathrm{op}} b = a \wedge b$, $a \wedge^{\mathrm{op}} b = a \vee b$.

定义 5.2.13 设 L, L' 为偏序集, 称 $f : L \to L'$ 为 (偏序集) 同态, 若 $f(a) \leqslant f(b), \forall a \leqslant b$. 若 $f : L \to L'$ 为同态, 且为双射, f^{-1} 亦为同态, 则称 f 为 (偏序集) 同构.

注记 5.2.14 偏序集同态即 "保序映射".

例 5.2.15 记 $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathrm{Id} : ([5], \preccurlyeq) \to ([5], \leqslant)$ 是同态, 且是双射, 但不是同构. 这里 $\preccurlyeq$ 表示整除关系, $\leqslant$ 表示正常大小关系.

引理 5.2.16 设 L, L' 是格, $f : L \to L'$ 为同构, 则

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b), \quad f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), \quad \forall a, b \in L.$$

例 5.2.17 对正整数 n, $L_n = \{n \text{ 的正因子}\}$ 在整除关系下构成格. 对 $d_1, d_2 \in L_n$, $d_1 \vee d_2 = \mathrm{lcm}(d_1, d_2)$, $d_1 \wedge d_2 = \gcd(d_1, d_2)$. 考虑 n 阶循环群 $C_n = \langle g \mid g^n = 1 \rangle = \left\{1, g, \cdots, g^{n-1}\right\}$, 有格同构

$$L_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sub}(C_n), \quad d \mapsto \left(g^{\frac{n}{d}}\right).$$

定理 5.2.18 (Galois 理论基本定理) 设 K/k 为有限 Galois 扩张, $G = \mathrm{Gal}(K/k)$, 则存在格同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Sub}(G) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Lat}(K/k)^{\mathrm{op}} \\ H &\longmapsto K^H \\ \mathrm{Gal}(K/E) &\longleftarrow\!\!\shortmid E \end{aligned}$$

证明 在定理 5.1.6 的基础上, 再注意到

$$H \leqslant H' \implies K^{H'} \subset K^H, \quad E \subset F \implies \mathrm{Gal}(K/F) \subset \mathrm{Gal}(K/E). \qquad \square$$

注记 5.2.19 对任意 $H \leqslant G$, 由定理 4.1.18, $|G| = |H|[G:H]$; 由定理 3.2.4, $[K:k] = [K:K^H][K^H:k]$; 由定义-定理 5.1.2 (2), $|G| = [K:k]$; 由定理 5.1.1, $|H| = [K:K^H]$, 因此 $[G:H] = [K^H:k]$.

推论 5.2.20 设 K/k 为有限 Galois 扩张, $G = \mathrm{Gal}(K/k)$, 则

(1) 若 $H_1, H_2 \leqslant G$, 则 $K^{H_1 \vee H_2} = K^{H_1} \cap K^{H_2}$, $K^{H_1 \wedge H_2} = K^{H_1} \vee K^{H_2}$.

(2) 若 E_1, E_2 均为 K/k 的中间域, 则 $\mathrm{Gal}(K/E_1 \vee E_2) = \mathrm{Gal}(K/E_1) \cap \mathrm{Gal}(K/E_2)$, $\mathrm{Gal}(K/E_1 \cap E_2) = \mathrm{Gal}(K/E_1) \vee \mathrm{Gal}(K/E_2)$.

(3) 有限 Galois 扩张 K/k 仅有有限个中间域.

格结构上的群作用 在定理 5.2.18 中同构的两个格上, 各存在如下群作用:

- ◇ $G \curvearrowright \mathrm{Sub}(G), (\sigma, H) \mapsto \sigma H \sigma^{-1}$.
- ◇ $G \curvearrowright \mathrm{Lat}(K/k), (\sigma, E) \mapsto \sigma(E)$.

事实上, 这两个作用是相容的, 我们有如下命题.

命题 5.2.21 定理 5.2.18 的 Galois 对应保持上述 G-作用, 即对任意 $\sigma \in G$, $H \leqslant G$, 以及 K/k 的中间域 E, 有

$$K^{\sigma H \sigma^{-1}} = \sigma(K^H), \quad \sigma \,\mathrm{Gal}(K/E)\sigma^{-1} = \mathrm{Gal}(K/\sigma(E)).$$

证明 我们有

$$\begin{aligned} K^{\sigma H \sigma^{-1}} &= \{\lambda \in K : \sigma h \sigma^{-1}(\lambda) = \lambda, \forall h \in H\} = \{\lambda \in K : h\sigma^{-1}(\lambda) = \sigma^{-1}(\lambda), \forall h \in H\} \\ &= \{\lambda \in K : \sigma^{-1}(\lambda) \in K^H\} = \sigma(K^H), \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} \mathrm{Gal}(K/\sigma(E)) &= \{\delta \in \mathrm{Aut}(K) : \delta \circ \sigma(e) = \sigma(e), \forall e \in E\} = \{\delta \in \mathrm{Aut}(K) : \sigma^{-1} \circ \delta \circ \delta|_E = \mathrm{Id}_E\} \\ &= \sigma \,\mathrm{Gal}(K/E)\sigma^{-1}. \end{aligned} \qquad \square$$

注记 5.2.22 $\mathrm{Sub}(G)$ 与 $\mathrm{Lat}(K/k)$ 在 G-作用下的不动点集是相对应的, 它们分别为

$$\mathrm{Sub}(G)^G = \{H \leqslant G : \sigma H \sigma^{-1} = H\} = \{H \lhd G\},$$

与

$$\begin{aligned}\mathrm{Lat}(K/k)^G &= \{K/k \text{ 的中间域 } E : \sigma(E) = E, \forall \sigma \in G\} \\ &\xlongequal{\text{命题 } 5.1.7} \{K/k \text{ 的中间域 } E:\ E/k \text{ 为有限 Galois 扩张}\}.\end{aligned}$$

我们将注记 5.2.22 表述为如下命题.

命题 5.2.23 设 K/k 为有限 Galois 扩张, E 为 K/k 的中间域, 则 E/k 为有限 Galois 扩张当且仅当 $\mathrm{Gal}(K/E) \lhd G$. 此时, 存在群同构 $G/\mathrm{Gal}(K/E) \simeq \mathrm{Gal}(E/k)$.

证明 仅需证明最后的断言. 由命题 5.1.7, $\sigma(E) = E, \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$, 因此有群同态

$$G \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(E/k), \quad \sigma \mapsto \sigma|_E,$$

满性在于 $\mathrm{Gal}(E/k) \leqslant \mathrm{Gal}(K/k)$ (利用引理 3.3.1 进行延拓), 而其核为 $\mathrm{Gal}(K/E)$, 由定理 4.1.18 即得 $G/\mathrm{Gal}(K/E) \simeq \mathrm{Gal}(E/k)$. □

例 5.2.24 在例 4.4.31 的 Hasse 图中, $\{\{\mathrm{Id}, (12)\}, \{\mathrm{Id}, (13)\}, \{\mathrm{Id}, (23)\}\}$ 是 S_3-作用下的一个轨道, A_3 是 S_3 作用下的不动点. 在例 5.1.8 中的 Hasse 图中, $\left\{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega^2), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\right\}$ 是 $\mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q}\big)$-作用下的一个轨道, $\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$ 为有限 Galois 扩张.

定理 5.2.25 (Steinitz) 设 K/k 为有限维域扩张, 则 K/k 为单扩张当且仅当 K/k 仅有有限个中间域.

证明 ($\Rightarrow$) 设 $K = k(\alpha)$, α 在 k 上的最小多项式为 $f(x) \in k[x]$. 对任意 K/k 的中间域 E, 设 α 在 E 上的最小多项式为 $g(x) = x^m + c_1 x^{m-1} + \cdots + c_m \in E[x]$. 记 $B = k(c_1, \cdots, c_m) \subset E$, 则 $g(x)$ 在 E 上亦不可约, 因此 $g(x)$ 是 α 在 B 上的最小多项式. 由定理 3.2.4, $[K : E] = \deg(g(x)) = [K : B]$, 因此 $B = E$. 故 K/k 的中间域 E 被 $g(x)$ 完全确定, 但 $f(x)$ 仅有有限个因式, 因此 K/k 仅有有限个中间域.

($\Leftarrow$) 若 k 为有限域, 由命题 3.4.13 即得 K/k 为单扩张. 下设 $|k| = +\infty$, $K = k(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$. 由归纳法, 只需证 $K = k(\alpha, \beta)$ 是单扩张. 对任意 $\lambda \in k$, 考虑 $E_\lambda = k(\alpha + \lambda\beta)$, 由于 K/k 仅有有限个中间域, 必存在互异的 $\lambda_1, \lambda_2 \in k$ 使得 $E_{\lambda_1} = E_{\lambda_2}$, 于是 $(\alpha+\lambda_1\beta) - (\alpha+\lambda_2\beta) = (\lambda_1 - \lambda_2)\beta \in E_{\lambda_1}$, 由 $\lambda_1 - \lambda_2 \in k^\times$ 即得 $\beta \in E_{\lambda_1}$, 进而 $\alpha = (\alpha + \lambda_1\beta) - \beta \in E_{\lambda_1}$, $k(\alpha, \beta) \subset E_{\lambda_1}$. 故 $K = k(\alpha, \beta) = k(\alpha + \lambda_1\beta)$ 为单扩张. □

推论 5.2.26 (1) 若 K/k 为有限维单扩张, E 是 K/k 的中间域, 则 E/k 为单扩张.

(2) 有限 Galois 扩张是单扩张.

练习 5.2.27 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + \omega)$. 提示 由例 5.1.8 的 Hasse 图可见, 包含 $\sqrt[3]{2} + \omega$ 的最小子域只能为 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$.

定义 5.2.28 称代数扩张 K/k 为可分扩张, 若 K 中每个元素在 k 上的最小多项式均可分.

定义 5.2.29 设 K/k 为有限维域扩张, 若 $u \in K$ 满足 $K = k(u)$, 则称 u 为 K/k 的本原元.

定理 5.2.30 (本原元定理) 设 K/k 为有限维可分扩张, 则 K/k 为单扩张.

证明 设 $K = k(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, α_i 在 k 上的最小多项式为 $g_i(x)$, 则 $g_1(x), \cdots, g_n(x)$ 均可分. 设 $g(x) = g_1(x) \cdots g_n(x) \in k[x]$, 则 $g(x)$ 亦可分. 考虑 $k \subset K \subset (K, g(x)) = E$, 由定义-定理 5.1.2 (3), E/k 为有限 Galois 扩张, 再由推论 5.2.26 (2) 与 (1) 知 K/k 为单扩张. □

作为 Galois 理论的应用, 我们证明代数基本定理.

定理 3.2.20 $\mathbb{C}$ 是代数闭域.

证明 在假定分析中的中值定理成立的前提下, 我们有如下事实:

(1) 每个正实数 r 有实平方根. (设 $f(x)=x^2-r$, 则 $f(1+r)>0$ 且 $f(0)<0$.)

(2) 任意 2 次多项式 $g(x)\in\mathbb{C}[x]$ 有复根. (我们有求根公式.)

(3) $\mathbb{C}$ 无二次扩张, 即若有域扩张 $\mathbb{C}\subset K$, 则 $[K:\mathbb{C}]\neq 2$. (否则 K 中有元素在 $\mathbb{C}$ 上的最小多项式为 2 次, 与 (2) 矛盾.)

(4) 奇数次多项式 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ 必有实根. ($f(-\infty)=-\infty, f(+\infty)=+\infty$.)

(5) 若有域扩张 $\mathbb{R}\subsetneq K$, 则 $[K:\mathbb{R}]$ 非奇数. (由 (4), 对任意 $\alpha\in K\setminus\mathbb{R}$, $[\mathbb{R}(\alpha):\mathbb{R}]$ 为偶数.)

下面证明任意非常值多项式 $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ 有复根. 对 $f(x)=\sum a_ix^i\in\mathbb{C}[x]$, 定义 $\bar{f}(x)=\sum\overline{a_i}x^i$. 设 $f(x)\bar{f}(x)=\sum c_kx^k$, 则 $c_k=\sum\limits_{i+j=k}a_i\overline{a_j}$, 由此可见 $\overline{c_k}=c_k$ 即 $c_k\in\mathbb{R}$, 因此 $f(x)\bar{f}(x)\in\mathbb{R}[x]$. 由于 $f(x)$ 有复根当且仅当 $f(x)\bar{f}(x)$ 有复根, 只需证每个实多项式有复根.

设 $p(x)\in\mathbb{R}[x]$ 不可约, 并设 $E/\mathbb{R}$ 为 $\big(x^2+1\big)p(x)$ 的分裂域, 则 $E\supset\mathbb{C}$. 由 $\operatorname{char}(R)=0$ 知 $E/\mathbb{R}$ 为有限 Galois 扩张, 记 $G=\operatorname{Gal}(E/\mathbb{R})$. 若 $|G|=2^mk$, 其中 k 为奇数, 则由定理 4.6.2 (1), G 有 2^m 阶子群 H, 令 $B=E^H$. 由注记 5.2.19, $[B:\mathbb{R}]=[G:H]=k$, 这与前述事实 (3) 矛盾. 故 $k=1$ 即 G 为 2-群. 假设 $E\supsetneq\mathbb{C}$, 则 $\operatorname{Gal}(E/\mathbb{C})\leqslant G$ 为非平凡 2-群, 由定理 4.5.55, 存在 $F\leqslant\operatorname{Gal}(E/\mathbb{C})$ 使得 $[\operatorname{Gal}(E/\mathbb{C}):F]=2$. 由注记 5.2.19, $\big[E^F:\mathbb{C}\big]=2$, 这与前述事实 (3) 矛盾. 故 $E=\mathbb{C}$, 即 $p(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 中有根. □

5.3 根式扩张

定义 5.3.1 称域扩张 E/k 为 m 型根式扩张, 若 $E=k(\alpha)$, 其中 $\alpha^m\in k$, 这里 m 为正整数.

定义 5.3.2 称域扩张塔 $k=E_0\subset E_1\subset\cdots\subset E_n$ 为根式扩张塔, 若每个 E_{i+1}/E_i 均为根式扩张.

定义 5.3.3 称 $f(x)\in k[x]$ 为根式可解的, 若存在根式扩张塔 $k=E_0\subset E_1\subset\cdots\subset E_n$, 使得 $f(x)$ 在 E_n 中分裂, 即 $E_n\supset(k,f(x))$.

例 5.3.4 设 $f(x)=x^2+bx+c\in\mathbb{C}[x]$, $k=\mathbb{Q}(b,c)$, $E=k\big(\sqrt{b^2-4c}\big)$, 则 E/k 为 2-型根式扩张, 且 $E=(k,f(x))$, 因此 $f(x)$ 为根式可解的.

讨论一 当根式扩张不是 Galois 扩张时略显棘手, 我们先讨论如下情形. 设 $E=k(\alpha),\alpha^m=a\in k$.

- 若 k 中有 m 次本原单位根 ω, 则由 $x^m-a=(x-\alpha)(x-\omega\alpha)\cdots\big(x-\omega^{m-1}\alpha\big)$ 知 $E=(k,x^m-a)$ 是 k 上可分多项式的分裂域, 因此 E/k 为 Galois 扩张, 且有群嵌入

$$\operatorname{Gal}(E/k)\hookrightarrow(\mathbb{Z}_m,+),\quad \sigma_i\mapsto\bar{i},$$

其中 $\sigma_i(\alpha)=\alpha\omega^i$ $(0\leqslant i\leqslant m-1)$, 因此 $\operatorname{Gal}(E/k)$ 为 Abel 群.

◇ 若 $\mathrm{char}(k)=0$, 取 $E'=(E,x^m-1)$. 由定理 4.2.14, $\mathrm{Root}_{E'}(x^n-1)\leqslant(E')^{\times}$ 为循环群, 且由 $\mathrm{char}(k)=0$ 知其阶恰为 m (参考引理 3.3.25 的证明), 故 E' 中存在 m 次本原单位根 ω.

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r, hook, "m\text{ 型根式扩张}"] \arrow[d, hook, "x^m-1\text{ 的分裂域}"'] & E=k(\alpha) \arrow[d, hook, "x^m-1\text{ 的分裂域}"] \\
k'=k(\omega) \arrow[r, hook, "m\text{ 型根式扩张}"] & E'=k'(\alpha)
\end{tikzcd}$$

由上一种情形知 $\mathrm{Gal}(E'/k')\hookrightarrow(\mathbb{Z}_m,+)$ 为 Abel 群. 而由 $k'=(k,x^m-1)$ 知 $\mathrm{Gal}(k'/k)\hookrightarrow U(\mathbb{Z}_m)$ 亦为 Abel 群. 注意到 $E'=(k,x^m-a)$, 因此 E'/k 为 Galois 扩张, 又 k'/k 亦为 Galois 扩张, 由命题 5.2.23 知 $\mathrm{Gal}(E'/k')\lhd\mathrm{Gal}(E'/k)$, 且 $\mathrm{Gal}(E'/k)/\mathrm{Gal}(E'/k')\simeq\mathrm{Gal}(k'/k)$.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Abel 群} & \\
\mathrm{Gal}(E'/k') \arrow[r, hook, "\text{正规子群}"] \arrow[ur, dash, dashed, bend left] & \mathrm{Gal}(E'/k) \arrow[r, two heads] & \mathrm{Gal}(k'/k) \arrow[ul, dash, dashed, bend right] \\
 & \{\sigma\in\mathrm{Gal}(E'/k):\sigma(E)=E\} \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads] & \\
 & \mathrm{Gal}(E/k) &
\end{tikzcd}$$

讨论二 我们再进行如下观察.

◇ 若 $\mathrm{char}(k)=0$, 则从 k 出发的任何根式扩张塔 $k=E_0\subset E_1\subset\cdots\subset E_n$ 均可扩充为新的根式扩张塔 $k=E_0\subset E_1\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots\subset E_m$, 使得 E_m/E_0 为 Galois 扩张.

证明 设 $E_n=k(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)$, 其中 α_i 在 k 上的最小多项式为 $f_i(x)$. 令 $f(x)=f_1(x)\cdots f_l(x)\in k[x]\subset E_n[x]$, 取 $K=(E_n,f(x))$. 由根式扩张定义可知 $f(x)$ 为 E_n 上的可分多项式, 因此 K/E_n 为 Galois 扩张, 设 $\mathrm{Gal}(K/E_n)=\{\sigma_0=\mathrm{Id}_K,\sigma_1,\cdots,\sigma_p\}$, 则有根式扩张塔

$$\begin{aligned}
k\subset &\boxed{E_n\subset E_n\vee\sigma_1(E_n)}\subset E_n\vee\sigma_1(E_n)\vee\sigma_2(E_n)\subset\cdots\\
&\subset E_n\vee\sigma_1(E_n)\vee\cdots\vee\sigma_p(E_n)=K=:E_m.
\end{aligned}$$

以框中部分为例说明这是根式扩张:

$$\boxed{E_n}\overset{①}{\subset}E_n\vee\sigma_1(E_1)\overset{②}{\subset}E_n\vee\sigma_1(E_2)\subset\cdots\boxed{\subset E_n\vee\sigma_1(E_n)},$$

由 $k\subset E_1$ 为根式扩张知 ① 为根式扩张, 由 $E_1\subset E_2$ 为根式扩张知 ② 为根式扩张, 以此类推. $\square$

◇ 现假设 k 有充分多的单位根. 根据上一点, 可设根式扩张塔 $k=E_0\subset\cdots\subset E_{n-1}\subset E_n$ 满足 E_n/k 为 Galois 扩张, 且由于 k 有充分多的单位根, 根据讨论一的第一点, 每个 E_i/E_{i-1} 均为 Galois 扩张, 每个 $\mathrm{Gal}(E_i/E_{i-1})$ 均为 Abel 群. 结合定理 5.1.6 与命题 5.2.23 即得

$$\mathrm{Gal}(E_n/E_0)\ \underbrace{\lhd}_{\mathrm{Gal}(E_1/E_0)\text{ 为 Abel 群}}\ \mathrm{Gal}(E_n/E_1)\ \underbrace{\lhd}_{\mathrm{Gal}(E_2/E_1)\text{ 为 Abel 群}}\ \mathrm{Gal}(E_n/E_2)\ \lhd\ \cdots\ \lhd\ \mathrm{Gal}(E_n/E_{n-1})\text{ 为 Abel 群}$$

若 $f(x)$ 根式可解, $(k, f(x)) \subset E_n$, 则有满射 $\mathrm{Gal}(E_n/k) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}((k, f(x))/k) = \mathrm{Gal}_k(f)$.

◇ 下面解释上一点 “k 有充分多的单位根” 这一技术性条件并不难达成. 设 $\mathrm{char}(k) = 0$, 且有根式扩张塔 $k = E_0 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset E_n$, 其中 E_n/k 为 Galois 扩张. 设 E_i/E_{i-1} 为 m_i 型根式扩张 $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 令 $M = \mathrm{lcm}(m_1, \cdots, m_n)$, 取 $E' = \big(E, x^M - 1\big)$. 同讨论一的第二点可知 E' 中存在 M 次本原单位根 ω, 进而 E' 中有 $m_1, \cdots, m_n$ 次本原单位根, 这就实现了 “有充分多的单位根”.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}(E_n'/k') \arrow[r, hook, "\text{正规子群}"] \arrow[rr, bend left, dashed, no head, "\text{Abel 群}"] & \mathrm{Gal}(E_n'/k) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, "\star"] & \mathrm{Gal}(k'/k) \\
& \mathrm{Gal}(E_n/k) = \mathrm{Gal}_k(f) &
\end{tikzcd}$$

$\star$ 处满射得自 E_n/k 为 Galois 扩张, 由命题 5.1.7, $\sigma(E_n) = E_n, \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(E_n'/k)$.

定义 5.3.5 设 G 为群, 若存在正规列 $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n = \{1_G\}$ 使得每个子商均为 Abel 群, 则称 G 为可解群.

例 5.3.6 (1) 若 $G_1 \lhd G$, G_1 与 G/G_1 均为 Abel 群, 则 G 为可解群, 因为 $G \supset G_1 \supset \{1_G\}$.

(2) Abel 群 G 是可解群, 因为 $G \supset \{1_G\}$.

(3) 若 G 是可解群, 则 $H \leqslant G$ 也是可解群.

证明 由 G 是可解群, 存在正规列 $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n = \{1_G\}$, 使得每个子商均为 Abel 群, 由定理 4.3.23 (2) 知 $H \supset H \cap G_1 \supset H \cap G_2 \supset \cdots \supset H \cap G_n$ 是正规列, 且每个子商均为 Abel 群.□

(4) 设 $N \lhd G$, 则 G 是可解群当且仅当 N 与 G/N 均为可解群. 故可解群的子群和商群均为可解群.

证明 $(\Rightarrow)$ 由 (3), 仅需证 G/N 为可解群. 由 G 是可解群, 存在正规列 $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n = \{1_G\}$, 使得每个子商均为 Abel 群. 由 $N \lhd G$ 可得正规列 $G/N \supset G_1N/N \supset G_2N/N \supset \cdots \supset G_nN/N$, 且由定理 4.3.22, $(G_iN/N)/(G_{i+1}N/N) \simeq G_iN/G_{i+1}N$ 为 Abel 群.

$(\Leftarrow)$ 设正规列 $G/N = G^* = G_0^* \supset G_1^* \supset \cdots \supset G_n^* = \{1_{G^*}\}$ 满足每个子商均为 Abel 群, 由定理 4.3.21, 存在正规列 $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_m = N$ 满足每个子商均为 Abel 群. 由于 N 是可解群, 存在正规列 $H = H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset H_m = \{1_H\}$ 满足每个子商均为 Abel 群. 将这两个正规列相接即得 G 为可解群. □

(5) p-群 G 是可解群.

证明 对 $|G|$ 归纳. 若 $|G| \neq 1$, 由命题 4.5.53, $Z(G) \neq \{1_G\}$. 若 $Z(G) = G$, 则 G 是 Abel 群, 由 (2) 知 G 是可解群. 若 $Z(G) \neq G$, 则 $G/Z(G)$ 是阶 $< |G|$ 的 p 群, 由归纳假设知其为可解群. 由于 $Z(G) \lhd G$, $Z(G)$ 与 $G/Z(G)$ 均为可解群, 由 (4) 即得 G 为可解群. □

(6) S_3 是可解群, 因为 $S_3 \supset A_3 \supset \{\mathrm{Id}\}$.

(7) S_4 是可解群, 因为 $S_4 \supset A_4 \supset K_4 \supset \{\mathrm{Id}\}$ (例 4.4.33).

(8) S_n $(n \geqslant 5)$ 不是可解群, 否则由 (3), $A_n \lhd S_n$ 亦为可解群, 但由定理 4.4.36, A_n $(n \geqslant 5)$ 是单群, 而 A_n 非 Abel 群, 矛盾.

引理 5.3.7 设 A 为 Abel 群, 素数 $p \mid |A|$, 则存在 $A' \leqslant A$ 使得 $A/A' \simeq C_p$.

证明 由练习 4.8.37, 存在 $A' \leqslant A$ 使得 $|A/A'| = p$, 再由推论 4.2.12 即得证. □

引理 5.3.8 设 K/k 为有限 Galois 扩张, $\mathrm{Gal}(K/k) \simeq C_p = (\sigma)$, 其中 p 为素数. 若 k 中有 p 次本原单位根, 则 K/k 为 p 型根式扩张.

证明 如练习 3.1.7, $\sigma : K \to K$ 可视为 k-线性自同构. 由 $(\sigma) = C_p$ 可知 $x^p - 1$ 是 σ 的最小多项式, 而 $[K:k] = |\mathrm{Gal}(K/k)| = p$, 因此 $x^p - 1$ 是 σ 的特征多项式. 由于 p 次本原单位根 $\omega \in k$ 满足 $\omega^p - 1 = 0$, 因此 ω 是 σ 的特征值, 设 β 是 ω 对应的特征向量, 则 $\sigma(\beta) = \omega\beta$, 因此 $\beta \notin k$ 且 $\sigma(\beta^p) = [\sigma(\beta)]^p = (\omega\beta)^p = \beta^p$, 由命题 5.1.7 即知 $\beta^p \in k$. 考虑域扩张塔 $k \subsetneq k(\beta) \subset K$, 由定理 3.2.4, $[k(\beta):k] \mid [K:k]$, 而 $[k(\beta):k] > 1$, $[K:k] = p$, 因此 $K = k(\beta)$. 故 K/k 为 p 型根式扩张. □

定理 5.3.9 (Galois 大定理) 设 k 为域, $\mathrm{char}(k) = 0$, $f(x) \in k[x]$, 则 $f(x)$ 根式可解当且仅当 $\mathrm{Gal}_k(f)$ 为可解群.

证明 ($\Rightarrow$) 在前面讨论二的第二点中已经看到, 若 $f(x)$ 根式可解, 则 $\mathrm{Gal}(E_n'/k)$ 的正规子群 $\mathrm{Gal}(E_n'/k')$ 与相应的商群 $\mathrm{Gal}(k'/k)$ 均为 Abel 群, 从而为可解群, 由例 5.3.6 (4) 知 $\mathrm{Gal}(E_n'/k)$ 为可解群. 而 $\mathrm{Gal}_k(f)$ 同构于可解群 $\mathrm{Gal}(E_n'/k)$ 的商群, 由例 5.3.6 (4) 即知 $\mathrm{Gal}_k(f)$ 为可解群.

($\Leftarrow$) 若 $G = \mathrm{Gal}_k(f)$ 为可解群, 取 $G_1 \trianglelefteq G$ 使得 G/G_1 为 Abel 群. 设素数 $p \mid |G|$, 则由引理 5.3.7, 存在 G/G_1 的子群 H/G_1, 使得 $(G/G_1)/(H/G_1) \simeq C_p$, 进而由定理 4.3.22 知 $H \lhd G$ 且 $G/H \simeq C_p$. 令 $K = (k, f(x))$, 由于 $\mathrm{Gal}\big(K/K^H\big) = H \lhd G$, 由命题 5.2.23, K^H/k 为 Galois 扩张, 且 $\mathrm{Gal}\big(K^H/k\big) \simeq G/H \simeq C_p$. 而由例 5.3.6 (4), $\mathrm{Gal}\big(K/K^H\big) = H \lhd G$ 为可解群, 如上操作可得 $H' \lhd H$, 使得 $H/H' \simeq C_{p'}$, 其中 $p' \mid |H|$ 为素数.

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r, dash, "\text{Galois 扩张}"] \arrow[d, equal] & K^H \arrow[r, dash, "\text{Galois 扩张}"] \arrow[d, equal] & K^{H'} \arrow[r, dotted, "\text{如前}"] \arrow[d, equal] & K \\
E_0 \arrow[r, dash, "\mathrm{Gal}(E_1/E_0)\simeq C_p"] & E_1 \arrow[r, dash, "\mathrm{Gal}(E_2/E_1)\simeq C_{p'}"] & E_2 \arrow[ur, dotted, bend right] &
\end{tikzcd}$$

- ◇ 若 k 有 $|G|$ 次本原单位根 (存在性由 $\mathrm{char}(k) = 0$ 确保), 则对任意素数 $p \mid |G|$, k 亦有 p 次本原单位根. 由引理 5.3.8, 上图中每个 E_{i+1}/E_i 均为根式扩张, 最终便得到根式扩张塔 $k = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset K = (k, f(x))$, 即 $f(x)$ 根式可解.

- ◇ 对于一般情形, 记 ω 为 $|G|$ 次本原单位根, 令 $k^* = k(\omega), K^* = K(\omega)$, 其中 ω 为 $|G|$ 次本原单位根. 由 $K = (k, f(x))$ 知 $K^* = \Big(k, \big(x^{|G|} - 1\big) f(x)\Big)$, 因此 K^*/k 为 Galois 扩张, 进而 K^*/k^* 亦为 Galois 扩张. 令 $G^* = \mathrm{Gal}(K^*/k^*)$, 考虑群同态的复合

$$\rho : G^* = \mathrm{Gal}(K^*/k^*) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(K^*/k) \twoheadrightarrow G = \mathrm{Gal}(K/k),$$

其中第二个箭头的良定性来自命题 5.1.7: 由于 K^*/k 为 Galois 扩张, K/k 亦为 Galois 扩张, 因此 $\sigma(K) = K, \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(K^*/k)$. 由于

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\,\rho &= \{\sigma \in \mathrm{Aut}(K^*) : \sigma|_K = \mathrm{Id}_K, \sigma|_{k^*} = \mathrm{Id}_{k^*}\} \\
&= \{\sigma \in \mathrm{Aut}(K^*) : \sigma|_K = \mathrm{Id}_K, \sigma|_{k^*} = \mathrm{Id}_{k^*}, \sigma(\omega) = \omega\} \\
&= \big\{\sigma \in \mathrm{Aut}(K^*) : \sigma|_{K(\omega)} = \mathrm{Id}_{K(\omega)}\big\} = \{\mathrm{Id}_{K^*}\},
\end{aligned}$$

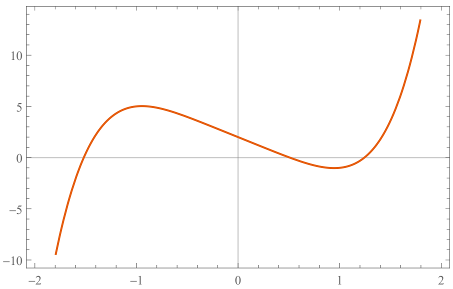
由定理 4.3.16, G^* 同构于可解群 G 的子群, 由例 5.3.6 (3), G^* 为可解群. 由于 $|G^*| \mid |G|$, k^*

中有 $|G^*|$ 次本原单位根, 根据上一类情形, 结合 k^*/k 为根式扩张, 可得根式扩张塔

$$k \subset k^* = E_0^* \subset E_1^* \subset E_2^* \subset \cdots \subset K^*.$$

由于 $K^* \supset K = (k, f(x))$, $f(x)$ 根式可解. □

例 5.3.10 考虑 $f(x) = x^5 - 4x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$, 易知 $f(x)$ 有 3 个实根, 2 个虚根.



记 $\mathrm{Root}_{\mathbb{C}}(f) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2 \notin \mathbb{R}$. 由练习 4.5.8 可得群的单同态 $\theta : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f) \hookrightarrow S_5$. 由于 f 恰有 2 个虚根, 复共轭 $\sigma \in \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$, 因此 $(12) \in \mathrm{Im}\,\theta$. 由 Eisenstein 判别法知 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 不可约, 因此 $[\mathbb{Q}(\alpha_1) : \mathbb{Q}] = \deg(f) = 5$, 从而由定理 3.2.4 与定义-定理 5.1.2 (2) 知 $5 \mid [(\mathbb{Q}, f) : \mathbb{Q}] = |\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)|$. 由定理 4.6.11 即知 $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$ 中有 5 阶元, 即 $\mathrm{Im}\,\theta$ 中有 5-轮换. 故由练习 5.3.11 知 $\mathrm{Im}\,\theta = S_5$, 即 $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f) \simeq S_5$ 非可解群.

练习 5.3.11 设 p 为素数, 则 S_p 可由 (12) 与任一 p-轮换生成.

证明 这等价于证明 S_p 可由 $\tau = (1a)$ 与 $c = (12\cdots p)$ 生成, 其中 $a \in \{2, \cdots, p\}$. 首先, 由引理 4.4.12,

$$c\tau c^{-1} = (c(1)c(a)) = (2, a+1) \quad (\text{这里 } a+1 \text{ 在模 } p \text{ 意义下考虑}),$$

重复此操作可得所有形如 $(k, k+a)$ 的对换, 因此可以生成 $(p, a), (a, 2a), (2a, 3a), \cdots, \big((a^{-1}-1)a, 1\big)$, 这里 a^{-1} 在模 p 意义下考虑. 再次利用引理 4.4.12 可得

$$\begin{gathered}
(a, 2a)(p, a)(a, 2a) = (p, 2a), \\
(2a, 3a)(p, 2a)(2a, 3a) = (p, 3a), \\
\vdots \\
\big((a^{-1}-1)a, 1\big)\big(p, (a^{-1}-1)a\big)\big((a^{-1}-1)a, 1\big) = (p, 1), \\
c(p, 1)c^{-1} = (c(p)c(1)) = (12), \\
c(12)c^{-1} = (c(1)c(2)) = (23), \\
\vdots \\
c(p-2, p-1)c^{-1} = (c(p-2)c(p-1)) = (p-1, p).
\end{gathered}$$

由引理 4.4.27, $(12), (23), \cdots, (p-1, p)$ 可生成 S_p. □

定理 5.3.12 (Abel-Ruffini) 考虑域 k 上的 n 元有理函数域 $F = k(t_1, \cdots, t_n)$, 则多项式

$$f(x) = x^n - t_1 x^{n-1} + t_2 x^{n-2} + \cdots + (-1)^n t_n \in F[x]$$

不可约, 且 $\mathrm{Gal}_F(f) \simeq S_n$. 特别地, 当 $n \geqslant 5$ 时 f 无法用根式求解.

注记 5.3.13 这里取系数 $t_1, \cdots, t_n$ 为独立变元, 意蕴在于考虑 F 上 "一般的" n 次首一多项式. 在这个意义下, "一般的" 五次以上多项式方程无根式解.

证明 考虑 n 元多项式环 $k[x_1, \cdots, x_n]$, 其上有左 S_n-作用: $(\sigma, f) \mapsto f\big(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}\big)$. 由 Vieta 定理, n 元初等对称多项式

$$e_k \coloneqq \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

由

$$\prod_{i=1}^{n} (X - x_i) = X^n - e_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^n e_n$$

刻画, 这里 X 为变元. 对称多项式基本定理给出同构

$$F = k(t_1, \cdots, t_n) \xrightarrow{\sim} k(x_1, \cdots, x_n)^{S_n} = k(e_1, \cdots, e_n), \quad t_i \mapsto e_i.$$

借此视 $k(x_1, \cdots, x_n)$ 为 $k(t_1, \cdots, t_n)$ 的扩张. 由 $k(x_1, \cdots, x_n)^{S_n} = F$ 及定义-定理 5.1.2 (1) 知 $k(x_1, \cdots, x_n)/F$ 为 Galois 扩张, Galois 群实现为 S_n 在 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 上的自然作用. 而 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 恰为 f 的根集, 因此 $k(x_1, \cdots, x_n)$ 是 f 的分裂域, $\mathrm{Gal}_F(f) \simeq S_n$, 再结合引理 4.5.22 即知 f 不可约. 当 $n \geqslant 5$ 时, 由例 5.3.6 (8) 知 f 无法用根式求解. □

5.4 判别式

定义 5.4.1 设 $\mathrm{char}(k) = 0$, $f(x) \in k[x]$, $\deg(f) = n$. 若 $f(x)$ 在 $K = (k, f(x))$ 上分裂为

$$f(x) = c(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n),$$

定义其判别式

$$D(f) = \Delta^2 \coloneqq \left(\prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j) \right)^2 \in k.$$

注记 5.4.2 (1) $D(f) = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{c} \mathrm{Res}(f, f')$.

(2) $D(f) \neq 0 \iff f$ 无重根.

例 5.4.3 若 $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, 则 $D(f) = -\dfrac{1}{a} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & \\ & 2a & b \end{vmatrix} = b^2 - 4ac$.

例 5.4.4 若 $f(x) = x^3 + qx + r$, 则

$$D(f) = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & q & r & \\ & 1 & 0 & q & r \\ 3 & 0 & q & & \\ & 3 & 0 & q & \\ & & 3 & 0 & q \end{vmatrix} = -4q^3 - 27r^2.$$

引理 5.4.5 设 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 无重根, $\deg(f) = n$, $E = (\mathbb{Q}, f(x))$, $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$, 由练习 4.5.8, $G \hookrightarrow S_n$. 令 $H = G \cap A_n$, 由定理 4.3.23 (2), $H \lhd G$ 且 $G/H \hookrightarrow S_n/A_n \simeq C_2$. 我们有以下结论:

(1) $E^H = \mathbb{Q}(\Delta)$, 这里 $\Delta = \sqrt{D}$.

(2) $\Delta = \sqrt{D} \in \mathbb{Q}$ 当且仅当 $H = G$ (即 $G \hookrightarrow A_n$, G 中元素均为偶置换).

证明 对任意 $\sigma \in S_n$, $\sigma(\Delta) = \mathrm{sgn}(\sigma)\Delta$, 而 $H \leqslant A_n$, 因此 $\Delta \in E^H$, 进而 $\mathbb{Q}(\Delta) \subset E^H$, $\left[E^H : \mathbb{Q}\right] = [G : H] \leqslant 2$.

- 若 $[G : H] = 1$, 则 $G = H$, $\mathbb{Q}(\Delta) \subset E^H = E^G = \mathbb{Q}$, 因此 $\Delta \in \mathbb{Q}$, $E^H = \mathbb{Q}(\Delta)$.
- 若 $[G : H] = 2$, 则存在 $\sigma \in G \setminus A_n$, 使得 $\sigma(\Delta) = -\Delta$. 由 $\sigma|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$ 即知 $\Delta \notin \mathbb{Q}$, 考虑 $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}(\Delta) \subset E^H$, 由 $\left[E^H : \mathbb{Q}\right] \leqslant 2$ 与 $[\mathbb{Q}(\Delta) : \mathbb{Q}] \geqslant 2$ 即知 $E^H = \mathbb{Q}(\Delta)$. □

定理 5.4.6 设 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 不可约, $\deg(f) = 3$, $G = \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$, $D = D(f) \neq 0$, 则

(1) $f(x)$ 恰有 1 个实根当且仅当 $D(f) < 0$, 此时 $G \simeq S_3$.

(2) $f(x)$ 恰有 3 个实根当且仅当 $D(f) > 0$, 此时若 $\sqrt{D} \in \mathbb{Q}$, 则 $G \simeq A_3 \simeq \mathbb{Z}_3$, 若 $\sqrt{D} \notin \mathbb{Q}$, 则 $G \simeq S_3$.

证明 令 $E = (\mathbb{Q}, f(x))$. 由 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 不可约即知 $D \neq 0$. 由练习 4.5.8, $G \hookrightarrow S_3$, 再设 $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$, 则由 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha_1) \subset E$ 可知 $3 = \deg(f) = [\mathbb{Q}(\alpha_1) : \mathbb{Q}] \mid [E : \mathbb{Q}] = |G|$, 因此 $G \simeq A_3$ 或 S_3.

(1) 若 $f(x)$ 恰有 1 个实根 α 与两个虚根 $\beta = u + \mathrm{i}v, \bar{\beta} = u - \mathrm{i}v$, 则

$$\Delta = (\alpha-\beta)\big(\alpha-\bar{\beta}\big)\big(\beta-\bar{\beta}\big) = (\alpha-\beta)\big(\overline{\alpha-\beta}\big)\big(\beta-\bar{\beta}\big) = 2\mathrm{i}v|\alpha-\beta|^2,$$

从而 $D = \Delta^2 = -4v^2|\alpha-\beta|^4 < 0$. 此时 $E \neq \mathbb{Q}(\alpha)$, 因此 $|G| > 3$, 即 $G \simeq S_3$.

(2) 若 $f(x)$ 有 3 个实根, 则 $\Delta \in \mathbb{R}$, 从而 $D = \Delta^2 > 0$, $\sqrt{D} \in \mathbb{R}$. 由引理 5.4.5, 若 $\sqrt{D} \in \mathbb{Q}$, 则 $G \hookrightarrow A_3$, 即 $G \simeq A_3 \simeq \mathbb{Z}_3$; 若 $\sqrt{D} \notin \mathbb{Q}$, 则 $G \simeq S_3$. □

例 5.4.7 (1) $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}\big(x^3-2\big) \simeq S_3$.

(2) $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}\big(x^3-4x+2\big) \simeq S_3$.

(3) $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}\big(x^3-x+\frac{1}{3}\big) \simeq A_3 \simeq \mathbb{Z}_3$.

第二部分

往年真题

第六章 期中考试题目

6.1 2020 春期中考试

1. 考虑 Gauss 整数环 $R=\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.

(1) 设 p 为奇素数. 试证明：$x^n-p\in R[x]$ 总是不可约的.

(2) 在 R 中将 $81+8\mathrm{i}$ 分解为不可约元的乘积.

(3) 求不定方程 $x^2+y^2=585$ 的所有整数解.

(4) 考虑商环 $R_1=R/(3)$ 以及 $R_2=R/(5)$. 计算 $\mathrm{Aut}(R_1)$ 与 $\mathrm{Aut}(R_1)$ 的阶.

2. 考虑多项式环 $\mathbb{Q}[x]$, 设 S 为其包含 $\mathbb{Q}$ 以及 x^2,x^3 的最小子环.

(1) 证明：$S\simeq\mathbb{Q}[y,z]/\big(y^2-z^3\big)$.

(2) 证明：$S\not\simeq\mathbb{Q}[x]$.

(3) 证明：$\mathrm{Frac}(S)\simeq\mathbb{Q}(x)$.

3. 设 E 为 $f(x)=x^4-2\in\mathbb{Q}[x]$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂域.

(1) 计算 $[E:\mathbb{Q}]$.

(2) 列出 $\mathrm{Aut}(E)$ 中的元素.

(3) 设 $K=\mathbb{Q}\big(\sqrt[4]{2}\big)$. 试给出 $\mathrm{Aut}(K)$ 中的元素, 并给出 K 的所有非平凡子域.

(4) 设 $u=\sqrt[4]{2}+\mathrm{i}$. 试求 u 在 $\mathbb{Q}$ 上的最小多项式.

4. 设 (R,ϕ) 的 Euclid 整环, $a\in R$ 是 R 中所有非零非单位元素中 $\phi(a)$ 取值最小的.

(1) 试证明：$R/(a)=\{\bar r:r=0\text{ 或 }r\in U(R)\}$, 这里 $\bar r=r+(a)$ 表示其模 (a) 同余类.

(2) 试证明：$R=\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right]$ 不是 Euclid 整环.

6.2 2022 春期中考试

1. 设 $R=\mathbb{Z}[\mathrm{i}], K=\mathbb{Q}(\mathrm{i})$, 域扩张 E/K 使得 E 为 $x^4+x^3+x^2+x+1\in K[x]$ 的分裂域.

(1) 证明：$K\simeq \mathrm{Frac}(R)$.

(2) 列出 R 的所有子环, 并指出哪些是 UFD.

(3) 在 R 中计算 $\gcd(4+7\mathrm{i}, 4-3\mathrm{i})$.

(4) 计算商环 $R/(4+7\mathrm{i}, 4-3\mathrm{i})$ 的阶.

(5) 分类商环 $R/(4-3\mathrm{i})$ 的所有理想, 并指出哪些是素理想.

(6) 判断并论证 $x^4+x^3+x^2+x+1\in K[x]$ 的可约性.

(7) 计算 $[E:\mathbb{Q}]$.

(8) 判断并论证 $\mathrm{Aut}(E)$ 是否为 Abel 群.

解答 (1) 由 $R\subset\mathbb{Q}(\mathrm{i})\subset\mathrm{Frac}(R)$ 再取分式域即得 $K\simeq\mathrm{Frac}(R)$.

(2) 由练习 2.2.34, R 的子环恰为 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}[n\mathrm{i}]$, 其中 n 为正整数. 由于 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ 均为 ED, 它们都是 UFD. 对 $n\geqslant 2$, 注意到 $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[n\mathrm{i}])=\mathbb{Q}(\mathrm{i})$, $\mathrm{i}\in\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ 是首一整系数方程 $x^2+1=0$ 的解, 但 $\mathrm{i}\notin\mathbb{Z}[n\mathrm{i}]$, 由命题 2.5.16, UFD 是整闭环, 因此 $\mathbb{Z}[n\mathrm{i}]$ $(n\geqslant 2)$ 不是 UFD.

(3) 有素分解 $4+7\mathrm{i}=-(1-2\mathrm{i})(2-3\mathrm{i}), 4-3\mathrm{i}=\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})^2$, 因此 $\gcd(4+7\mathrm{i},4-3\mathrm{i})$ 相伴于 $1-2\mathrm{i}$.

(4) 由 (3), $R/(4+7\mathrm{i},4-3\mathrm{i})=R/(1-2\mathrm{i})$. 由练习 2.6.26, $R/(1-2\mathrm{i})\simeq\mathbb{F}_5$, 故其阶为 5.

(5) 由例 2.2.27 对应定理, $\{R/(4-3\mathrm{i})$ 的理想$\}\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ R 中包含 $(4-3\mathrm{i})$ 的理想, 而 R 为 PID, 若 $(4-3\mathrm{i})\subset(a)$, 则 $a\mid(4-3\mathrm{i})$. 由素分解 $4-3\mathrm{i}=\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})^2$ 即知 R 中包含 $(4-3\mathrm{i})$ 的理想恰为 $(\mathrm{i})=R,(1-2\mathrm{i}),(4-3\mathrm{i})$. 故 $R/(4-3\mathrm{i})$ 的理想恰为 $R/(4-3\mathrm{i}),(1-2\mathrm{i})/(4-3\mathrm{i}),\{0\}$. 由练习 2.3.35 (3), 其中素理想为 $(1-2\mathrm{i})/(4-3\mathrm{i})$.

(6) 由练习 2.7.46 (2) 与命题 2.7.34, 等价于判定

$$(x+1)^4+(x+1)^3+(x+1)^2+(x+1)+1=x^4+5x^3+10x^2+5x\in R[x]$$

的可约性. 利用 Gauss 素数 $1-2\mathrm{i}$ 的 Eisenstein 判别法即知其不可约.

(7) 由于 $E=K(\zeta_5,\zeta_5^2,\zeta_5^3,\zeta_5^4)=K(\zeta_5)$, 由定理 3.1.23 (1), $[E:K]=4$. 由定理 3.2.4, $[E:\mathbb{Q}]=[E:K][K:\mathbb{Q}]=4\cdot 2=8$.

(8) $E=\mathbb{Q}(\mathrm{i},\zeta_5)=\mathbb{Q}(\zeta_{\mathrm{lcm}(4,5)})=\mathbb{Q}(\zeta_{20})$. 由定理 3.5.21, $\mathrm{Aut}(E)=\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta_{20}))\simeq U(\mathbb{Z}_{20})$ 是 Abel 群. □

2. 考虑八元域 $\mathbb{F}_8=\mathbb{F}_2[x]/(x^3+x+\overline{1})$, 记 $u=\overline{x}$. 于是 $\mathbb{F}_8$ 中元素均形如 $a+bu+cu^2$, 其中 $a,b,c\in\mathbb{F}_2$. 自然视 $\mathbb{F}_2$ 为 $\mathbb{F}_8$ 的子域.

(1) 分类 $\mathbb{F}_8$ 的所有子环.

(2) $\mathbb{F}_8$ 中共有多少个首一 2 次不可约多项式?

(3) 将多项式 $x^3+x+\overline{1}$ 在 $\mathbb{F}_8[x]$ 中进行不可约分解.

(4) 将多项式 $x^{16}+x$ 在 $\mathbb{F}_8[x]$ 中进行不可约分解.

(5) 计算 $\left(u^2+\overline{1}\right)^{-1}$.

(6) 考虑商环 $R=\mathbb{F}_2[y]/\big(y^3+y^2+\overline{1}\big)$, 论证并具体构造环同构 $R\simeq\mathbb{F}_8$.

解答 (1) 由练习 2.1.26, $\mathbb{F}_8$ 的子环即 $\mathbb{F}_8$ 的子域. 由命题 3.4.10, $\mathbb{F}_8$ 的子域即 $\mathbb{F}_2$ 与 $\mathbb{F}_8$.

(2) $\mathbb{F}_8[x]$ 中首一 2 次多项式共有 $8\cdot 8=64$ 个, 其中可约多项式形如 $(x-\alpha)(x-\beta)$, 共有 $\binom{8}{2}+8=36$ 个. 因此 $\mathbb{F}_8$ 中首一不可约 2 次多项式共有 $64-36=28$ 个.

(3) 由于 u 是根, 由命题 3.4.15, $x^3+x+\overline{1}=(x-u)\big(x-u^2\big)\big(x-u^4\big)=(x+u)\big(x+u^2\big)\big(x+u^2+u\big)$.

(4)

(5) 待定系数得 $u\big(u^2+\overline{1}\big)=\overline{1}\implies\big(u^2+\overline{1}\big)^{-1}=u$.

(6) 由于 $y^3+y^2+\overline{1}\in\mathbb{F}_2[y]$ 不可约, 因此 E 是八元域. 记 $v=\overline{y}$, 则 $R=\mathbb{F}_2(v)$. 设 $\theta:R\to\mathbb{F}_8$ 为环同态, 则 θ 由 $\theta(v)$ 唯一决定. 由于 $v\in R$ 是 $x^3+x^2+\overline{1}\in R[x]$ 的根, 因此 $\theta(v)\in\mathbb{F}_8$ 是 $x^3+x^2+\overline{1}$ 的根, 从而 $\theta(v)=u+\overline{1}$ 或 $u^2+\overline{1}$ 或 $u^2+u+\overline{1}$. 考虑赋值同态

$$\mathrm{ev}_{u+\overline{1}}:\mathbb{F}_2[y]\to\mathbb{F}_8,\quad f(y)\mapsto f\big(u+\overline{1}\big).$$

由于 $\big(y^3+y^2+\overline{1}\big)\subset\mathrm{Ker}\big(\mathrm{ev}_{u+\overline{1}}\big)$. 因此 $\mathrm{ev}_{u+\overline{1}}$ 诱导环嵌入 $\theta:R\hookrightarrow\mathbb{F}_8$ 使得 $v\mapsto u+\overline{1}$. 又因为 $|R|=|\mathbb{F}_8|$, θ 为环同构. □

3. 设 $K=\mathbb{Q}(t), E=\mathbb{Q}\big(t^4\big)$ 为 K 中包含 t^4 的最小子域.

(1) 证明 $E\simeq K$.

(2) 计算 $[K:E]$.

(3) 计算 $\mathrm{Aut}(K/E)$ 的阶.

(4) 判断并论证 $\mathbb{Q}\big(t^2\big)$ 上的任何自同构是否均可延拓为 K 上的自同构.

4. 设 R 为整环, 记 $R^\times=R\setminus\{0_R\}$. 试证明以下等价:

(1) 环 R 为 PID.

(2) 存在映射 $\phi:R^\times\to\mathbb{N}$ 满足如下条件: 对任意 $a,b\in R^\times$, 要么 $b\mid a$, 要么存在适当的 $\delta,\gamma\in R$ 使得 $\phi(a\delta-b\gamma)<\phi(b)$. (注: 两种情况可能同时发生.)

6.3　2023 春期中考试

1. 设 $R=\mathbb{Z}[\mathrm{i}], S=\mathbb{Z}[2\mathrm{i}], K=\mathbb{Q}(\mathrm{i})$.

(1) 求不定方程 $x^2+y^2=325$ 的所有整数解.

(2) 在 R 中计算 $\gcd(9+2\mathrm{i},15-20\mathrm{i})$.

(3) 判定并论证 $x^4-2\in K[x]$ 的可约性.

(4) 分类商环 $R/5R$ 的所有子环与所有理想. 这里 $5R$ 表示元素 5 在 R 中生成的主理想.

(5) 计算 $\mathrm{Aut}(R/5R)$ 的阶.

(6) 计算商环 $S/(3+2\mathrm{i})$ 的阶, 判定其是否为域.

(7) 判断商环 $S/2S, \mathbb{Z}_4$ 与 $\mathbb{F}_2[y]/\big(y^2+\overline{1}\big)$ 三者之间是否有环同构.

(8) 判断整环 S 是否为 UFD.

解答 (1) $(\pm1,\pm18),(\pm6,\pm17),(\pm10,\pm15)$.

(2) 有素分解 $9+2\mathrm{i}=(1-2\mathrm{i})(1+4\mathrm{i}), 15-20\mathrm{i}=-5(1+2\mathrm{i})^2$, 因此 $\gcd(9+2\mathrm{i},15-20\mathrm{i})$ 相伴于 1.

(3) 由于 $K=\mathrm{Frac}(R)$, $x^4-2\in K[x]$ 本原, 由命题 2.7.34, 这等价于判断 $x^4-2\in R[x]$ 的可约性.

(法一) 由于 x^4-2 在 R 中无根, 若它可约, 只能分解为两个 2 次多项式乘积, 设为 $x^4-2=\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right)$, 其中 $a,b,c,d\in\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. 整理得

$$\begin{cases} a+c=0,\\ b+ac+d=0,\\ ad+bc=0,\\ bd=2.\end{cases} \implies \begin{cases} c=-a,\\ a^2=b+d,\\ a(d-b)=0,\\ bd=2.\end{cases}$$

若 $a=0$, 则 $d=-b, b^2=-2$, 无解; 若 $a\neq 0$, 则 $b=d, b^2=2$, 无解. 故 $x^4-2\in R[x]$ 不可约, 从而在 $K[x]$ 中也不可约.

(法二) 由练习 2.6.26, $R/(1+2\mathrm{i})\simeq\mathbb{F}_5$. 由模 p 约化, 为证 $x^4-2\in R[x]$ 不可约, 只需证 $x^4-\overline{2}\in\mathbb{F}_5[x]$ 不可约. 再由命题 3.4.8, 只需证 $\gcd_{\mathbb{F}_5[x]}\left(x^{5^2}-x, x^4-\overline{2}\right)=\overline{1}$, 这来自

$$\begin{aligned}\left(x^4-\overline{2},x^{25}-x\right)&=\left(x^4-\overline{2},\overline{2}x^{21}-x\right)=\left(x^4-\overline{2},\overline{4}x^{17}-x\right)=\left(x^4-\overline{2},\overline{3}x^{13}-x\right)\\&=\left(x^4-\overline{2},x^9-x\right)=\left(x^4-\overline{2},\overline{2}x^5-\overline{2}\right)=\left(x^4-\overline{2},\overline{4}x-\overline{2}\right)\\&=\left(x^4-\overline{2},x+\overline{2}\right)=\overline{1}.\end{aligned}$$

(4) ① 由练习 2.2.30, $\{R/5R$ 的子环$\}\overset{1:1}{\longleftrightarrow}\{R$ 中包含 $5R$ 的子环$\}$, 而由练习 2.2.34 (2), R 中包含 $5R$ 的子环即 R 与 $\mathbb{Z}[5\mathrm{i}]$, 故 $R/5R$ 的所有子环恰为 $R/5R$ 与 $\mathbb{Z}[5\mathrm{i}]/5R$. ② 由例 2.2.27 对应定理, $\{R/5R$ 的理想$\}\overset{1:1}{\longleftrightarrow}\{R$ 中包含 $5R$ 的理想$\}$, 而 R 为 PID, 若 $5R\subset(a)$, 则 $a\mid 5$. 由素分解 $5=(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})$ 即知 R 中包含 $5R$ 的理想恰为 $(1)=R,(1+2\mathrm{i}),(1-2\mathrm{i}),(5)=5R$. 故 $R/5R$ 的理想恰为 $R/5R,(1+2\mathrm{i})/5R,(1-2\mathrm{i})/5R,\{0\}$.

(5) 有环同构 (参考练习 2.6.9)

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(5)&\simeq\left(\mathbb{Z}[x]/\left(x^2+1\right)\right)/\left(\overline{5}\right)\simeq\mathbb{Z}[x]/\left(5,x^2+1\right)\simeq(\mathbb{Z}[x]/(5))/\left(\overline{x^2+1}\right)\\&\simeq(\mathbb{Z}/(5))[x]/\left(x^2+\overline{1}\right)\simeq\mathbb{F}_5[x]/\left(x^2+\overline{1}\right)\simeq\mathbb{F}_5[x]/((x-2)(x-3))\\&\overset{\star}{\simeq}(\mathbb{F}_5[x]/(x-2))\times(\mathbb{F}_5[x]/(x-3))\simeq\mathbb{F}_5\times\mathbb{F}_5,\end{aligned}$$

其中 $\star$ 处的同构来自定理 2.8.4. 由注记 2.2.10 (3), $\mathrm{Aut}(R/5R)\simeq\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_5\times\mathbb{F}_5)$. 设 $\theta\in\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_5\times\mathbb{F}_5)$, $\theta((1,0))=(a,b)$, 则

$$\left(a^2,b^2\right)=\theta((1,0))^2=\theta((1,0))=(a,b)\implies a=0\text{ 或 }1, b=0\text{ 或 }1.$$

若 $(a,b)=(0,0)$ 或 $(1,1)$, θ 均非单射, 排除. 而 $\phi:\mathbb{F}_5\times\mathbb{F}_5\to\mathbb{F}_5\times\mathbb{F}_5,(x,y)\mapsto(y,x)$ 与 $\mathrm{Id}_{\mathbb{F}_5\times\mathbb{F}_5}$ 均为同构, 因此 $|\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_5\times\mathbb{F}_5)|=2$, 即 $|\mathrm{Aut}(R/5R)|=2$.

(6) 有环同构

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[2\mathrm{i}]/(3+2\mathrm{i})&\simeq\left(\mathbb{Z}[x]/\left(x^2+4\right)\right)/\left(\overline{3+x}\right)\simeq\mathbb{Z}[x]/\left(3+x,x^2+4\right)\\&\overset{\star}{\simeq}(\mathbb{Z}[x]/(13))/\left(\left(3+x,x^2+4\right)/(13)\right)\simeq\mathbb{F}_{13}[x]/\left(x+\overline{3},x^2+\overline{4}\right),\end{aligned}$$

其中 $\star$ 处的同构来自例 2.2.27, 这里用到了 $(13) \subset \big(3+x, x^2+4\big)$, 这是因为

$$x(x+3)-\big(x^2+4\big)=3x-4, \quad 3(x+3)-(3x-4)=13.$$

而 $x^2+\overline{4}=\big(x+\overline{3}\big)\big(x+\overline{10}\big)$, 由练习 2.4.26, $\big(x+\overline{3}, x^2+\overline{4}\big)=\big(x+\overline{3}\big)$, 进而

$$S/(3+2\mathrm{i}) \simeq \mathbb{F}_{13}[x]/\big(x+\overline{3}, x^2+\overline{4}\big) \simeq \mathbb{F}_{13}[x]/\big(x+\overline{3}\big) \simeq \mathbb{F}_{13}.$$

故 $S/(3+2\mathrm{i})$ 为域, 其阶为 13.

(7) 有环同构

$$\begin{aligned} S/2S &\simeq \big(\mathbb{Z}[x]/(x^2+4)\big)/\overline{2}\big(\mathbb{Z}[x]/(x^2+4)\big) \simeq \mathbb{Z}[x]/\big(2, x^2+4\big) \simeq \mathbb{Z}[x]/\big(2, x^2\big) \\ &\simeq \mathbb{F}_2[x]/\big(x^2\big) \xrightarrow[y=x+\overline{1}]{\sim} \mathbb{F}_2[y]/\big(y^2+\overline{1}\big). \end{aligned}$$

由此可知 $\operatorname{char}(S/2S)=2 \neq 4$, 故 $S/2S \not\simeq \mathbb{Z}_4$.

(8) 假设 S 是 UFD, 由命题 2.5.16, S 是整闭环. 注意到 $\operatorname{Frac}(S)=\mathbb{Q}(\mathrm{i})$, $\mathrm{i} \in \mathbb{Q}(\mathrm{i})$ 是首一整系数方程 $x^2+1=0$ 的解, 由整闭性, $\mathrm{i} \in S$, 矛盾. 故 S 不是 UFD. □

2. 考虑商域 $K=\mathbb{F}_2[y]/\big(y^3+y+\overline{1}\big)$, 记 $u=\overline{y}$, 则 K 中元素均形如 $a+bu+cu^2$, 其中 $a,b,c \in \mathbb{F}_2$. 自然视 $\mathbb{F}_2$ 为 K 的子域.

(1) 将多项式 $x^3+x^2+\overline{1}$ 在 $K[x]$ 中进行不可约分解.

(2) 在 K 中, 计算 $\big(u^4+\overline{1}\big)^{-1}$.

(3) 分类 K 的所有子环.

(4) 判断 $K[x]/\big(x^2+\big(u+\overline{1}\big)x+u^2\big)$ 是否为域.

(5) 考虑域 $E=\mathbb{F}_2[z]/\big(z^3+z^2+\overline{1}\big)$. 试具体建立从 E 到 K 的环同构.

(6) 分别求从 $\mathbb{Z}_8$ 到 K, 以及从 K 到 $\mathbb{Z}_8$ 的 (保单位的) 环同态的个数.

解答　(1) $x^3+x^2+\overline{1}=\big(x+u^2+\overline{1}\big)\big(x+u+\overline{1}\big)\big(x+u^2+u+\overline{1}\big)$.

(2) 待定系数得 $u^2\big(u^4+\overline{1}\big)=\big(u^3\big)^2+u^2=\big(u+\overline{1}\big)^2+u^2=\overline{1} \implies \big(u^4+\overline{1}\big)^{-1}=u^2$.

(3) 由于 K 的子环必包含 $\mathbb{F}_2$, 而域上的有限维整环是域, K 的子环即 K 的子域. 由命题 3.4.10, K 的子域即 $\mathbb{F}_2$ 与 K.

(4) 是. 只需证 $x^2+\big(u+\overline{1}\big)x+u^2 \in K[x]$ 不可约, 这由 Vieta 定理及表 6.1 易得.

(5) 由 (1) 知 $z^3+z^2+\overline{1} \in \mathbb{F}_2[z]$ 不可约, 因此 E 是八元域. 记 $v=\overline{z}$, 则 $E=\mathbb{F}_2(v)$. 设 $\theta: E \to K$ 为环同态, 则 θ 由 $\theta(v)$ 唯一决定. 由于 $v \in E$ 是 $x^3+x^2+\overline{1} \in E[x]$ 的根, 因此 $\theta(v) \in K$ 是 $x^3+x^2+\overline{1}$ 的根, 由 (1), $\theta(v)=u+\overline{1}$ 或 $u^2+\overline{1}$ 或 $u^2+u+\overline{1}$. 考虑赋值同态

$$\mathrm{ev}_{u+\overline{1}}: \mathbb{F}_2[z] \to K, \quad f(z) \mapsto f\big(u+\overline{1}\big).$$

由 (1) 知 $\big(z^3+z^2+\overline{1}\big) \subset \operatorname{Ker}\big(\mathrm{ev}_{u+\overline{1}}\big)$. 因此 $\mathrm{ev}_{u+\overline{1}}$ 诱导环嵌入 $\theta: E \hookrightarrow K$ 使得 $v \mapsto u+\overline{1}$. 又因为 $|E|=|K|$, θ 为环同构.

(6) ① 从 $\mathbb{Z}_8$ 到 K 的环同态 (若存在), 只能为

$$\mathbb{Z}_8 \to K, \quad \overline{0},\overline{2},\overline{4},\overline{6} \mapsto \overline{0}, \quad \overline{1},\overline{3},\overline{5},\overline{7} \mapsto \overline{1}.$$

可验证这的确是环同态. ② 为求从 K 到 $\mathbb{Z}_8$ 的环同态 ϕ, 只需确定 $u \in K$ 的像. 由于 $\phi(u)$ 是方程 $x^3+x+\bar{1}$ 的解, 但计算可知此方程在 $\mathbb{Z}_8$ 中无解, 故不存在从 K 到 $\mathbb{Z}_8$ 的环同态. □

表 6.1: $\mathbb{F}_8=\mathbb{F}_2[y]/\big(y^3+y+\bar{1}\big)$ 的乘法表

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	u	$u+\bar{1}$	u^2	$u^2+\bar{1}$	u^2+u	$u^2+u+\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	u	$u+\bar{1}$	u^2	$u^2+\bar{1}$	u^2+u	$u^2+u+\bar{1}$
u	$\bar{0}$	u	u^2	u^2+u	$u+\bar{1}$	$\bar{1}$	$u^2+u+\bar{1}$	$u^2+\bar{1}$
$u+\bar{1}$	$\bar{0}$	$u+\bar{1}$	u^2+u	$u^2+\bar{1}$	$u^2+u+\bar{1}$	u^2	$\bar{1}$	u
u^2	$\bar{0}$	u^2	$u+\bar{1}$	$u^2+u+\bar{1}$	u^2+u	u	$u^2+\bar{1}$	$\bar{1}$
$u^2+\bar{1}$	$\bar{0}$	$u^2+\bar{1}$	$\bar{1}$	u^2	u	$u^2+u+\bar{1}$	$u+\bar{1}$	u^2+u
u^2+u	$\bar{0}$	u^2+u	$u^2+u+\bar{1}$	$\bar{1}$	$u^2+\bar{1}$	$u+\bar{1}$	u	u^2
$u^2+u+\bar{1}$	$\bar{0}$	$u^2+u+\bar{1}$	$u^2+\bar{1}$	u	$\bar{1}$	u^2+u	u^2	$u+\bar{1}$

3. 考虑商域 $F=\mathbb{Q}[y]/\big(y^3+y+1\big)$, 记 $u=\bar{y}$. 自然视 $\mathbb{Q}$ 为 F 的子域.

(1) 将 x^3+x+1 在 $F[x]$ 上进行不可约分解.

(2) 计算 $\mathrm{Aut}(F)$ 的阶.

(3) 将 x^3+x^2+1 在 $F[x]$ 上进行不可约分解.

(4) 设 R 为 F 的子环, 且 $\mathbb{Q}\subset R$. 证明: $R=\mathbb{Q}$ 或 $R=F$.

(5) 是否存在正整数 n, 使得 $u^n=1_F$?

(6) 考虑 $E=F[x]/\big(x^2+5\big)$. 判断 E 是否为域. 求 $\mathrm{Aut}(E)$ 的阶.

解答 (1) $x^3+x+1=(x-u)\big(x^2+ux+u^2+1\big)$. 下证 $x^2+ux+u^2+1\in F[x]$ 不可约.

- ◇ 由于 $\big(y^3+y+1\big)'=3y^2+1>0, \forall y\in\mathbb{R}$, y^3+y+1 在 $\mathbb{R}$ 上有且仅有一个根 y_0. 由命题 2.4.13, 存在环同态 $\theta:\mathbb{Q}[y]\twoheadrightarrow\mathbb{Q}[y_0]$ 使 $\theta(y)=y_0$ 而 $\theta|_{\mathbb{Q}}=\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$. 由于 y_0 在 $\mathbb{Q}$ 上代数, $\mathbb{Q}[y_0]=\mathbb{Q}(y_0)$. 又 y^3+y+1 在 $\mathbb{Z}$ 上无根, 即在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, $\big(y^3+y+1\big)\subset\operatorname{Ker}\theta$, 而由命题 2.4.23, $\mathbb{Q}[y]$ 是 PID, 因此 $\operatorname{Ker}\theta=\big(y^3+y+1\big)$. 由定理 2.2.20, $F=\mathbb{Q}[y]/\big(y^3+y+1\big)\simeq\mathbb{Q}(y_0)$.
- ◇ 假设 $x^2+ux+u^2+1\in F[x]$ 可约, 则其根可表为 u 的多项式, 即存在 $P,Q\in\mathbb{Q}[x]$, 使得 $x^2+ux+u^2+1=[x-P(u)][x-Q(u)]$. 在上述环同构下, 此等式化为

$$x^2+y_0x+y_0^2+1=[x-P(y_0)][x-Q(y_0)],$$

从而在 $\mathbb{R}[x]$ 中成立等式

$$x^3+x+1=(x-y_0)[x-P(y_0)][x-Q(y_0)],$$

但这与 x^3+x+1 在 $\mathbb{R}$ 上有且仅有一个根矛盾. 故 $x^2+ux+u^2+1\in F[x]$ 不可约.

(2) 由注记 2.2.10 (3), $\mathrm{Aut}(F)\simeq\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(y_0))$. 由引理 3.3.1, $|\mathrm{Aut}(F)|=\big|\mathrm{Root}_F\big(y^3+y+1\big)\big|\overset{(1)}{=\!=}1$.

(3) 作替换 $t=\dfrac{1}{x}$, 则 $t^3\big(x^3+x^2+1\big)=t^3+t+1\overset{(1)}{=\!=}(t-u)\big(t^2+ut+u^2+1\big)$, 因此

$$\begin{aligned}x^3+x^2+1&=x^3(t-u)\big(t^2+ut+u^2+1\big)=(1-ux)\big[1+ux+\big(u^2+1\big)x^2\big]\\&=\big(u^{-1}-x\big)\big[u+u^2x+\big(u^3+u\big)x^2\big]=\big(x+u^2+1\big)\big(x^2-u^2x-u\big).\end{aligned}$$

(4) 由 $R \subset F$ 知 R 为整环, 而域上的有限维整环是域, 即 R 为域. 由定理 3.2.4,

$$[F:R][R:\mathbb{Q}] = [F:\mathbb{Q}] = 3.$$

因此 $[F:R]=3, [R:\mathbb{Q}]=1$ 或 $[F:R]=1, [R:\mathbb{Q}]=3$, 即 $R=\mathbb{Q}$ 或 $R=F$.

(5) 不存在. 用反证法, 假设存在正整数 n 使得 $u^n = 1_F$, 由引理 3.5.14, $x^n - 1 = \prod_{d\mid n}\Phi_d(x)$, 因此存在 $d \mid n$, 使得 $\Phi_d(u)=0$. 由于 $\Phi_d(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 首一不可约, $y^3+y+1 \in \mathbb{Q}[x]$ 亦首一不可约且零化 u, 因此 $\Phi_d(x) = x^3+x+1$. 但 $\phi(d) = \begin{cases} 1, & d=2, \\ \text{偶数}, & d \geqslant 3, \end{cases}$ 因此 $\deg(\Phi_d(x)) \neq 3$, 矛盾.

(6) ① 为证 E 为域, 只需证 $x^2+5 \in F[x]$ 不可约. 用反证法, 假设 $x^2+5 \in F[x]$ 可约, 则有域扩张塔

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[x]/\big(x^2+5\big) \subset F,$$

由定理 3.2.4, $3 = [F:\mathbb{Q}] = \big[F:\mathbb{Q}[x]/\big(x^2+5\big)\big]\big[\mathbb{Q}[x]/\big(x^2+5\big):\mathbb{Q}\big] = 2$, 矛盾. ② 先证明对任意 $\sigma \in \operatorname{Aut}(E)$, 均有 $\sigma|_F = \operatorname{Id}_F$. 由于 σ_F 被 $\sigma(u)$ 唯一确定, 只需证 $\sigma(u)=u$, 进而只需证 y^3+y+1 在 E 上仅有 u 一个根. 假设 y^3+y+1 在 E 上的根多于 1 个, 则它在 E 上恰有 3 个根, 设为 α, β, γ. 由于

$$\Delta^2 = (\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2 = -4\cdot 1^3 - 27\cdot 1^2 = -31,$$

必有 $\sqrt{-31} \in E$, 进而有域扩张塔

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}\big(\sqrt{-5}, \sqrt{-31}\big) \subset E.$$

由定理 3.2.4, $[E:\mathbb{Q}] = \big[E:\mathbb{Q}\big(\sqrt{-5},\sqrt{-31}\big)\big]\big[\mathbb{Q}\big(\sqrt{-5},\sqrt{-31}\big):\mathbb{Q}\big]$. 但 $[E:\mathbb{Q}] = 2\cdot 3 = 6$, $\big[\mathbb{Q}\big(\sqrt{-5},\sqrt{-31}\big):\mathbb{Q}\big] = 4$, $4 \nmid 6$, 矛盾. 故 $\sigma|_F = \operatorname{Id}_F$ 得证, 从而

$$|\operatorname{Aut}(E)| = |\operatorname{Aut}(E/F)| = \big|\operatorname{Root}_E\big(x^2+5\big)\big| = 2. \qquad \square$$

6.4 2024 春期中考试

1. 考虑 $\mathbb{C}$ 的子域 $E = \mathbb{Q}(\mathrm{i}, \xi)$, 其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ 且 $\xi = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{5}}$. 回顾 $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

(1) 证明 $E/\mathbb{Q}$ 是多项式 $x^9 - x^5 - x^4 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ 的分裂域.

(2) 计算 ξ 在 $\mathbb{Q}\big(\sqrt{5}\big)$ 上的最小多项式, 计算 ξ 在 $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ 上的最小多项式.

(3) 将多项式 $x^4+6x^2+5 \in \mathbb{Q}(\xi)[x]$ 分解成不可约多项式之积, 给出充分论证.

(4) 计算维数 $\dim_{\mathbb{Q}} E$, 计算维数 $\dim_{\mathbb{Q}}(E \cap \mathbb{R})$, 给出充分论证.

(5) 简要论证并具体构造 $\operatorname{Aut}(E)$ 中的全部元素, 判断其是否为 Abel 群.

2. 考虑域 $K = \mathbb{F}_3[y]/\big(y^2+\bar{1}\big)$. 记 $u = \bar{y}$. 于是, K 中元素均形如 $a+bu$, 其中 $a, b \in \mathbb{F}_3$. 自然视 $\mathbb{F}_3$ 为 K 的子域. 同理, 考虑域 $L = \mathbb{F}_3[z]/\big(z^2+z-\bar{1}\big)$, 记 $v = \bar{z}$. 请论证并给出全部的环同态 $K \to L$.

3. 考虑主理想整环 R 以及 (非零) 极大理想 $\mathfrak{m}$. 假设有环同构 $R/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{F}_p$. 试计算商环 $R/\mathfrak{m}^2$ 的阶数 (大小), 计算环自同构群 $\operatorname{Aut}\big(R/\mathfrak{m}^2\big)$ 的阶数 (大小).

4. 考虑 Gauss 整数环 $R = \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. 对于任何正素数 p, 我们定义 R 的子环 $S_p = \{m + (pn)\mathrm{i} : m, n \in \mathbb{Z}\}$.

(1) 在 R 中将 $17-7\mathrm{i}$ 进行不可约分解.

(2) 考虑商环 $\overline{R}=R/(17-7\mathrm{i})$. 计算该环的阶数, 计算环自同构群 $\mathrm{Aut}\big(\overline{R}\big)$ 的阶数, 充分论证.

(3) 判断并论证：商环 $S_5/(5)$ 和 $S_5/(5\mathrm{i})$ 是否同构？对于不同的正素数 p,q, 环 S_p 与 S_q 是否同构?

第七章 期末考试题目

7.1 2020 春期末考试

1. 考虑 S_4 中的共轭类 $C=\{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$ 以及 S_4 在 C 上的共轭作用.

(1) 计算 C 中三个元素的稳定化子及其交集.

(2) 记 $\mathrm{SHom}(S_4,S_3)$ 为所有 $S_4\to S_3$ 的满同态, 计算 $\mathrm{SHom}(S_4,S_3)$ 和 $\mathrm{Hom}(S_4,S_3)$ 的阶数.

(3) 是否存在单同态 $S_3\hookrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), S_3\hookrightarrow \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$?

2. 考虑 $R=\mathbb{Z}[\mathrm{i}], K=\mathbb{Q}(\mathrm{i})$.

(1) 计算 $\gcd(4+7\mathrm{i},3+4\mathrm{i})$.

(2) 把 $81+8\mathrm{i}$ 分解成 R 中不可约元的乘积.

(3) 求 $u^2+v^2=585$ 的所有整数解.

(4) 计算 $\mathrm{Aut}(R/(13))$.

(5) x^5-5 和 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 是否为 K 中的不可约多项式?

(6) 分类 R 的子环, 并指出哪些是 UFD.

(7) 设 K' 是 x^5-5 在 $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ 上的分裂域. 计算 $[K':K]$, 并判断 $\mathrm{Gal}(K'/K)$ 是否为 Abel 群.

3. 设 $f(x)=x^4+x+\overline{2}\in\mathbb{F}_3[x]$, 考虑 $\mathbb{F}_{81}=\mathbb{F}_3[x]/(f(x))$, 记 $u=x+(f(x))$.

(1) 证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}_3$ 上不可约.

(2) 在 $\mathbb{F}_{81}$ 中分解 $f(x)$.

(3) 求 $\mathbb{F}_{81}$ 的九元子域.

(4) 计算 $\left(u^2+u+\overline{1}\right)^{-1}$.

(5) 求 $u^2+u+\overline{1}$ 在 $\mathbb{F}_3$ 上的最小多项式.

(6) 计算 $u^2+u+\overline{1}$ 在 $\mathbb{F}_{81}^{\times}$ 中的阶数.

7.2 2021 春期末考试

1. 考虑 A_4 在 (123) 上的共轭作用, 记 C 为其轨道.

(1) 求 (123) 的稳定化子及 $|C|$.

(2) 求 C. 判断此作用在 C 上是否忠实.

(3) 计算 $|\mathrm{Hom}(A_4, S_3)|$.

(4) 是否存在群的单同态 $A_4 \hookrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), A_4 \hookrightarrow \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$?

2. 考虑 $E = \mathbb{Q}\big(\sqrt[4]{2}, \mathrm{i}\big), K = E \cap \mathbb{R}$.

(1) 判断 $x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ 是否可约, $x^4 - 2 \in \mathbb{Q}(\mathrm{i})[x]$ 是否可约.

(2) 计算 $[E : \mathbb{Q}]$ 和 $[E : K]$.

(3) $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ 在集合

$$\mathfrak{X} = \Big\{a = \sqrt[4]{2}, b = \mathrm{i}\sqrt[4]{2}, c = -\sqrt[4]{2}, d = -\mathrm{i}\sqrt[4]{2}\Big\}$$

上有一自然作用, 它诱导群同态 $\rho : \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \to S(\mathfrak{X})$, 求 $\mathrm{Ker}\,\rho$ 与 $\mathrm{Im}\,\rho$.

(4) 求 $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathrm{i}))$ 和 $\mathrm{Gal}(E/K)$ 在 ρ 下的像.

3. 考虑 $E = \big(\sqrt{2}, \sqrt{5}\big)$, 求所有的 $u \in E$, 使得 $E = \mathbb{Q}(u)$. 提示 求 E 的线性基和所有域扩张的中间域.

4. 考虑 $A = \mathbb{Q}^{\times} \setminus \{1\}$ 和 A 上的双射 $\sigma(a) = \dfrac{1}{a}, \tau(a) = \dfrac{1}{1-a}$. 设 G 为由 σ 和 τ 生成的群, 乘法为映射的复合. 判断 G 是否为有限群. 若有限, 求 $|G|$.

7.3 2023 春期末考试

1. 考虑 $K = \mathbb{Q}\big(\sqrt[4]{3}, \mathrm{i}\big)$ 以及 $E = K \cap \mathbb{R}$. 以下, 维数均指 $\mathbb{Q}$ 上的维数.

(1) 计算域 E 的维数与 $|\mathrm{Aut}(E)|$.

(2) 求 $\sqrt[4]{3} + \mathrm{i}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的最小多项式.

(3) 考虑 $F = \mathbb{Q}\big(\sqrt{2}, \mathrm{i}\big)$. 证明: $x^4 - 3 \in F[x]$ 不可约.

(4) 考虑 $x^4 - 3$ 的根集 $\mathfrak{X} = \Big\{a = \sqrt[4]{3}, b = \sqrt[4]{3}\mathrm{i}, c = -\sqrt[4]{3}, d = -\sqrt[4]{3}\mathrm{i}\Big\}$ 以及群作用 $\mathrm{Aut}(K) \curvearrowright K$ 诱导的群同态 $\rho : \mathrm{Aut}(K) \to S(\mathfrak{X})$, 计算并描述 ρ 的像.

(5) 分类 K 的全体维数为 4 的子域.

2. 考虑 n 元集合 $\{1, \cdots, n\}$ 的对称群 S_n.

(1) 证明: S_n 可由 (12) 和 $(12\cdots n)$ 生成.

(2) 对 $2,3,4$ 的任一排列 a,b,c, 定义 $H_{(a,b,c)} = ((12),(1abc)) \leqslant S_4$, 试分类所有的排列 a,b,c 使得 $H_{(a,b,c)} = S_4$.

(3) 设 $H \leqslant S_5$ 满足 $(12) \in H$ 且 $5 \mid |H|$. 证明: $H = S_5$.

(4) 考虑 $f(x) = x^5 - 4x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$, 证明: $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f) \simeq S_5$.

3. 将 $\mathbb{Z}^3$ 中的元素写成行向量, 考虑由 $(4,-6,0)$ 和 $(0,6,-4)$ 生成的子群 H.

(1) 在同构意义下, 计算商群 $\mathbb{Z}^3/H$ 的扭子群.

(2) 证明: 不存在群同态 $f : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$ 使得 $\mathrm{Ker}\, f = H$.

7.4　2024 春期末考试

1. 考虑 $E=\mathbb{Q}\big(\sqrt[4]{18},\mathrm{i}\big)$, 以及 $K=E\cap\mathbb{Q}\big(\sqrt{3}+\sqrt{2}\big)$. 以下, 维数均指 $\mathbb{Q}$ 上维数.

(1) 计算域 E 的维数, 给出充分论证.

(2) 判断并论证：多项式 $x^4-18\in\mathbb{Q}(\mathrm{i})[x]$ 是否可约?

(3) 计算域 K 的维数, 给出充分论证.

(4) 考虑 x^4-18 的根集 $\mathscr{X}=\Big\{a=\sqrt[4]{18}, b=\sqrt[4]{18}\mathrm{i}, c=-\sqrt[4]{18}, d=-\sqrt[4]{18}\mathrm{i}\Big\}$, 以及群作用 $\mathrm{Aut}(E)\curvearrowright\mathscr{X}$ 诱导的群同态 $\rho:\mathrm{Aut}(E)\to S(\mathscr{X})$. 试给出 ρ 像中的全部元素.

(5) 试分类 E 的全部子域, 给出充分论证.

2. 考虑一元有理函数域 $E=\mathbb{C}(x)$. 对于任意正整数 n, 考虑其子域 $L_n=\mathbb{C}\big(x^n+x^{-n}\big)$.

(1) 计算域扩张 E/L_n 的维数, 给出充分论证.

(2) 判断并论证：断言 “$L_n\subset L_m$ 当且仅当 $m|n$”, 是否成立?

(3) 试给出域扩张 E/L_4 的所有中间域, 给出充分论证.

3. 设 G 为有限群, $H\leqslant G$ 为真子群. 试证明：$G\neq\bigcup\limits_{g\in G} gHg^{-1}$. 试问：该结论对于无限群 G 是否也成立?

4. 设 A 为有限生成 Abel 群, 秩为 2. 设有群的满同态 $\theta: A\to\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. 证明：$\mathrm{Ker}\,\theta$ 恰等于 A 的扭 (torsion) 子群.