

代数拓扑作业

林晓烁 2024 秋

<https://xiaoshuo-lin.github.io>

习题 1 证明: $F_k(K; R) \xrightarrow{\partial_k} F_{k-1}(K; R) \xrightarrow{\partial_{k-1}} F_{k-2}(K; R)$ 满足 $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$.

证明 我们有

$$\begin{aligned}
& \partial_{k-1} \circ \partial_k (\langle x_0, \dots, x_k \rangle) \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial_{k-1} (\langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k \rangle) \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \left(\sum_{j<i} (-1)^j \langle x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k \rangle + \sum_{j>i} (-1)^{j+1} \langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_k \rangle \right) \\
&= \sum_{i=0}^k \sum_{j<i} (-1)^{i+j} \langle x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k \rangle + \sum_{j=1}^k \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} \langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_k \rangle \\
&= \sum_{i=1}^k \sum_{j<i} (-1)^{i+j} \langle x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k \rangle - \sum_{j=1}^k \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_k \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

习题 2 证明: $\{A \subset |K| : \forall \sigma \in K, A \cap \sigma \text{ 在 } \sigma \text{ 中闭}\}$ 作为一族闭集给出了 $|K|$ 的一个拓扑, 称为多面体拓扑.

证明 (1) 由定义, $\emptyset, |K|$ 是 $|K|$ 中闭集.

(2) 若 A_1, A_2 均为 $|K|$ 中闭集, 则对任意 $\sigma \in K$, $A_1 \cap \sigma, A_2 \cap \sigma$ 均在 σ 中闭, 从而 $(A_1 \cup A_2) \cap \sigma = (A_1 \cap \sigma) \cup (A_2 \cap \sigma)$ 在 σ 中闭, 即 $A_1 \cup A_2$ 在 $|K|$ 中闭.

(3) 若 $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是 $|K|$ 中的闭集族, 则由 $\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \cap \sigma = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap \sigma)$ 可知 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 在 $|K|$ 中闭. □

习题 3 证明: $|K|$ 的多面体拓扑比 $|K| \subset \mathbb{R}^N$ ($N \gg 1$) 的子空间拓扑更细.

证明 任取 $|K|$ 在 \mathbb{R}^N 子空间拓扑下的闭集 A , 即 $A = |K| \cap B$, 其中 B 是 \mathbb{R}^N 中的闭集. 对任意 $\sigma \in K$,

$$A \cap \sigma = (|K| \cap B) \cap \sigma = B \cap \sigma$$

是 σ 中的闭集, 从而 A 在 $|K|$ 的多面体拓扑下闭. 故 $|K|$ 的多面体拓扑比 $|K| \subset \mathbb{R}^N$ 的子空间拓扑更细. □

习题 4 证明: 当 K 是有限单纯复形时, $|K|$ 的多面体拓扑与子空间拓扑一致.

证明 由习题 3, 只需证明当 K 是有限单纯复形时, $|K| \subset \mathbb{R}^N$ ($N \gg 1$) 的子空间拓扑比 $|K|$ 的多面体拓扑更细. 任取 $|K|$ 的多面体拓扑下的闭集 A , 则对任意 $\sigma \in K$, $A \cap \sigma$ 在 σ 中闭, 再有 σ 为 \mathbb{R}^N 中的闭集可得 $A \cap \sigma$ 在 \mathbb{R}^N 中闭, 从而 $A = \bigcup_{\sigma \in K} (A \cap \sigma)$ 是 \mathbb{R}^N 中闭集的有限并, 仍为闭集. 故 $|K| \subset \mathbb{R}^N$ 的子空间拓扑比 $|K|$ 的多面体拓扑更细, 进而两者一致. □

习题 5 设 $K = \left\{ \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right], \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \right\}$, 则作为集合 $|K| = (0, 1]$.

(1) 作为拓扑空间, $(|K|, \text{多面体拓扑}) = ((0, 1], \mathbb{R} \text{ 的子空间拓扑})$.

(2) 计算同调 $H(K; R)$.

证明 (1) 由习题 3, 只需证 $|K|$ 的多面体拓扑比 $(0, 1] \subset \mathbb{R}$ 的子空间拓扑更细. 任取 $|K|$ 在多面体拓扑下的闭集 A , 下证 $A \cup \{0\}$ 为 \mathbb{R} 中闭集. 只需证对任意点列 $\{x_n\} \subset A \cup \{0\}$, 若有 $x_n \rightarrow x_0 \in [0, 1]$, 则 $x_0 \in A \cup \{0\}$. 不妨设 $x_0 > 0$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, $|x_n - x_0| < \frac{x_0}{2}$. 取 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{n_0} < \frac{x_0}{2}$, 则 $\{x_n\}_{n=N+1}^\infty \subset \left[\frac{1}{n_0}, 1\right] \cap A$. 而由多面体拓扑的定义,

$$\left[\frac{1}{n_0}, 1\right] \cap A = \bigcup_{n=1}^{n_0-1} \left(\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \cap A\right)$$

为 \mathbb{R} 中有有限个闭集之并, 仍为闭集, 从而 $x_0 \in \left[\frac{1}{n_0}, 1\right] \cap A \subset A$. 故 $A \cup \{0\}$ 为 \mathbb{R} 中闭集, 进而 $A = (A \cup \{0\}) \cap (0, 1]$ 为 $(0, 1]$ 在 \mathbb{R} 的子空间拓扑下的闭集, 即 $(|K|, \text{多面体拓扑}) = ((0, 1], \mathbb{R} \text{ 的子空间拓扑})$.

(2) 考虑增广链复形

$$0 \longrightarrow C_1(K; R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K; R) \xrightarrow{\varphi} R$$

① 先求 $\ker \partial_1$. 若

$$\partial_1 \left(\sum_{n_1 \leq n \leq n_2} a_n \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \right) = 0, \quad a_n \in R,$$

则

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n_1 \leq n \leq n_2} a_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= a_{n_1} \frac{1}{n_1} + (a_{n_1+1} - a_{n_1}) \frac{1}{n_1+1} + \cdots + (a_{n_2} - a_{n_2-1}) \frac{1}{n_2} - a_{n_2} \frac{1}{n_2+1}. \end{aligned}$$

因此

$$a_{n_1} = 0, \quad a_{n_1+1} - a_{n_1} = 0, \quad \cdots, \quad a_{n_2} - a_{n_2-1} = 0, \quad a_{n_2} = 0,$$

即

$$a_{n_1} = a_{n_1+1} = \cdots = a_{n_2} = 0.$$

故 $H_1(K; R) = \ker \partial_1 = 0$.

② 再证 $\ker \varphi \subset \text{im } \partial_1$. 若

$$\sum_{m_1 \leq n \leq m_2} a_n \frac{1}{n} \in \ker \varphi,$$

即

$$\sum_{m_1 \leq n \leq m_2} a_n = 0,$$

则

$$\begin{aligned} \sum_{m_1 \leq n \leq m_2} a_n \frac{1}{n} &= \sum_{m_1 \leq n \leq m_2-1} a_n \frac{1}{n} - \sum_{m_1 \leq n \leq m_2-1} a_n \frac{1}{m_2} \\ &= \sum_{m_1 \leq n \leq m_2-1} a_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m_2} \right) \\ &= \sum_{m_1 \leq n \leq m_2-1} a_n \partial_1 \left(\left[\frac{1}{m_2}, \frac{1}{m_2+1} \right] + \cdots + \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \right) \\ &= \partial_1 \sum_{m_1 \leq n \leq m_2-1} a_n \left(\left[\frac{1}{m_2}, \frac{1}{m_2+1} \right] + \cdots + \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \right) \end{aligned}$$

$$\in \text{im } \partial_1.$$

故 $\ker \varphi \subset \text{im } \partial_1$, 进而 $\ker \varphi = \text{im } \partial_1$. 因此

$$H_0(K; R) = C_0(K; R) / \text{im } \partial_1 = C_0(K; R) / \ker \varphi \simeq \text{im } \varphi = R. \quad \square$$

习题 6 映射 $f: |K| \rightarrow X$ 连续当且仅当对任意 $\sigma \in K$, $f|_\sigma$ 连续.

证明 (\Rightarrow) 连续映射 f 限制在子空间 $\sigma \subset |K|$ 仍为连续映射.

(\Leftarrow) 任取 X 中闭集 A , 则对任意 $\sigma \in |K|$, 由 $f|_\sigma$ 的连续性, $f^{-1}(A) \cap \sigma = (f|_\sigma)^{-1}(A)$ 为 σ 中闭集, 再由多面体拓扑的定义知 $f^{-1}(A)$ 为 $|K|$ 中闭集, 故 f 连续. \square

习题 7 设 $f: |K| \rightarrow |L|$ 连续. 证明: 若 s 单纯逼近 f , 则 s 与 f 同伦.

证明 考虑映射

$$F: |K| \times [0, 1] \rightarrow |L|, \quad (x, t) \mapsto (1-t)s(x) + tf(x).$$

此映射是良定的, 因为 s 单纯逼近 f 确保了 $s(x)$ 在 $f(x)$ 的承载单形中, 二者可进行凸组合. 由于 $F(x, 0) = s(x)$, $F(x, 1) = f(x)$, 为证 s 与 f 同伦, 只需证 F 连续. 为此, 只需证对任意 $\sigma \in K$ 均有 $F|_{\sigma \times [0, 1]}$ 连续 (理同习题 6 之 (\Leftarrow)).

任取 $\sigma \in K$, 对任意 $x \in \sigma$, 记 $f(x)$ 的承载单形为 τ_x , 则 $\{(\tau_x)^\circ : x \in \sigma\}$ 构成 $f(\sigma)$ 的一个开覆盖. 由于 $f(\sigma)$ 为紧集, 必存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得

$$f(\sigma) \subset \bigcup_{i=1}^k \tau_{x_i}^\circ.$$

记 \tilde{L} 为由单形 $\{\tau_{x_i} : 1 \leq i \leq k\}$ 及其面构成的 L 的子复形, 则 \tilde{L} 为有限单纯复形. 由习题 4, $|L|$ 的多面体拓扑与 \mathbb{R}^N ($N \gg 1$) 的子空间拓扑一致, 因此 $F|_{\sigma \times [0, 1]}: \sigma \times [0, 1] \rightarrow |L|$ 两个分量均连续, 从而连续. 将其与嵌入映射 $|L| \hookrightarrow |L|$ (自然是连续的) 复合即得 $F|_{\sigma \times [0, 1]}: \sigma \times [0, 1] \rightarrow |L|$ 连续, 结论得证. \square

习题 8 令 $|K| = |L| = [0, 1]$, $K^{(0)} = \{0, \frac{1}{3}, 1\}$, $L^{(0)} = \{0, \frac{2}{3}, 1\}$. 定义映射 $f: |K| \rightarrow |L|, x \mapsto x^2$. 证明: 不存在 f 的单纯逼近.

证明 假设存在 f 的单纯逼近 s , 则由单纯逼近的定义, s 与 f 在 $f^{-1}(L^{(0)}) = \{0, \sqrt{\frac{2}{3}}, 1\}$ 上取值一致:

$$s(0) = 0, \quad s\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}, \quad s(1) = 1.$$

由于 $s(\frac{1}{3}) \in L^{(0)}$ 需在 $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$ 的承载单形 $[0, \frac{2}{3}]$ 中, 因此 $s(\frac{1}{3}) \in L^{(0)} \cap [0, \frac{2}{3}] = \{0, \frac{2}{3}\}$. 若 $s(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$, 则由 $\sqrt{\frac{2}{3}} \in (\frac{1}{3}, 1)$ 且 $s(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}, s(1) > \frac{2}{3}$ 可知 $s\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) > \frac{2}{3}$, 矛盾, 因此 $s(\frac{1}{3}) = 0$. 设 $\lambda \in (0, 1)$ 使得

$$s\left(\lambda \frac{1}{3} + (1-\lambda)1\right) = \lambda s\left(\frac{1}{3}\right) + (1-\lambda)s(1) = \frac{2}{3},$$

则 $\lambda = \frac{1}{3}$, 从而 $\lambda \frac{1}{3} + (1-\lambda)1 = \frac{7}{9}$, $s(\frac{7}{9}) = \frac{2}{3}$. 由 $s(\frac{1}{3}) = 0, s(\frac{7}{9}) = \frac{2}{3}, s(1) = 1$ 即知

$$s(x) > \frac{2}{3}, \quad \forall x \in \left(\frac{7}{9}, 1\right).$$

但这与 $\sqrt{\frac{2}{3}} \in (\frac{7}{9}, 1)$ 而 $s\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}$ 矛盾. 故不存在 f 的单纯逼近. \square

习题 9 利用以下引理, 重新证明习题 8 的结论.

映射 $s: K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ 为 $f: |K| \rightarrow |L|$ 的一个单纯逼近当且仅当

$$f(\text{star}(v, k)) \subset \text{star}(s(v), L), \quad \forall v \in K^{(0)}.$$

证明 假设 s 是 f 的单纯逼近, 则 $s(1) = 1$. 由 $\text{star}(1, K) = (\frac{1}{3}, 1]$ 得 $f(\text{star}(1, K)) = (\frac{1}{9}, 1]$. 但 $\text{star}(s(1), L) = \text{star}(1, L) = (\frac{2}{3}, 1] \not\subset (\frac{1}{9}, 1]$, 这与 s 是 f 的单纯逼近矛盾. \square

习题 10 若 $s: K \rightarrow L$ 是 $f: |K| \rightarrow |L|$ 的单纯逼近, $t: L \rightarrow M$ 是 $g: |L| \rightarrow |M|$ 的单纯逼近, 证明: $t \circ s: K \rightarrow M$ 是 $g \circ f: |K| \rightarrow |M|$ 的单纯逼近.

证明 对任意 $v \in K^{(0)}$, 有

$$g \circ f(\text{star}(v, K)) \subset g(\text{star}(s(v), L)) \subset \text{star}(t \circ s(v), M),$$

因此 $t \circ s$ 是 $g \circ f$ 的单纯逼近. \square

习题 11 定义映射

$$T: F_q(v * K; R) \rightarrow F_{q+1}(v * K; R), \quad \langle v_0, \dots, v_q \rangle \mapsto \begin{cases} \langle v, v_0, \dots, v_q \rangle, & \text{若 } v \neq v_i, 0 \leq i \leq q, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

则 T 诱导了映射 (仍记为 T)

$$T: C_q(v * K; R) \rightarrow C_{q+1}(v * K; R), \quad [v_0, \dots, v_q] \mapsto [v, v_0, \dots, v_q].$$

证明: 当 $q > 0$ 时, $\partial T + T\partial = \text{id}_{C_q(v * K; R)}$.

证明 当 $q > 0$ 时, 对任意 $[v_0, \dots, v_q] \in C_q(v * K; R)$, 有

$$\begin{aligned} (\partial T + T\partial)[v_0, \dots, v_q] &= \partial[v, v_0, \dots, v_q] + T \sum_{i=0}^q (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_q] \\ &= [v_0, \dots, v_q] + \sum_{i=0}^q (-1)^{i+1} [v, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_q] + \sum_{i=0}^q (-1)^i [v, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_q] \\ &= [v_0, \dots, v_q]. \end{aligned} \quad \square$$

习题 12 设 K 是单纯复形. 称 $p+1$ 元数组 (v_0, \dots, v_p) 为 K 的一个有序 p -单形, 若 v_0, \dots, v_p 张成 K 中某个单形 (这些 v_i 不必两两不同). 记 $C_p^{\text{ord}}(K; R)$ 为由 K 中有序 p -单形生成的自由模, 并定义 $\partial_p^{\text{ord}}: C_p^{\text{ord}}(K; R) \rightarrow C_{p-1}^{\text{ord}}(K; R)$ 如下:

$$\partial_p^{\text{ord}}(v_0, \dots, v_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p).$$

(1) 证明: $\partial_p^{\text{ord}} \circ \partial_{p+1}^{\text{ord}} = 0$.

(2) 为 K 的顶点选取一个偏序, 使其诱导 K 的每个单形的顶点的全序. 定义

$$\phi: C_p(K; R) \rightarrow C_p^{\text{ord}}(K; R), \quad [v_0, \dots, v_p] \mapsto (v_0, \dots, v_p),$$

这里 $v_0 < v_1 < \cdots < v_p$ 是对 K 中某个单形取定的顺序. 再定义

$$\psi : C_p^{\text{ord}}(K; R) \rightarrow C_p(K; R), \quad (w_0, \cdots, w_p) \mapsto \begin{cases} [w_0, \cdots, w_p], & \text{若 } w_i \text{ 两两不同,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

证明: ϕ 与 ψ 是保持增广映射的链映射, 且 $\psi \circ \phi = \text{id}_{C_p(K; R)}$.

(3) 证明: 存在

$$D_p : C_p^{\text{ord}}(K; R) \rightarrow C_{p+1}^{\text{ord}}(K; R)$$

使得

$$\phi \circ \psi - \text{id}_{C_p^{\text{ord}}(K; R)} = \partial_{p+1}^{\text{ord}} \circ D_p + D_{p-1} \circ \partial_p^{\text{ord}}.$$

证明 (1) 我们有

$$\begin{aligned} & \partial_p^{\text{ord}} \circ \partial_{p+1}^{\text{ord}}((v_0, \cdots, v_p)) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_p^{\text{ord}}((v_0, \cdots, \widehat{v}_i, \cdots, v_p)) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \left(\sum_{j < i} (-1)^j (x_0, \cdots, \widehat{x}_j, \cdots, \widehat{x}_i, \cdots, x_p) + \sum_{j > i} (-1)^{j+1} (x_0, \cdots, \widehat{x}_i, \cdots, \widehat{x}_j, \cdots, x_p) \right) \\ &= \sum_{i=0}^p \sum_{j < i} (-1)^{i+j} (x_0, \cdots, \widehat{x}_j, \cdots, \widehat{x}_i, \cdots, x_p) + \sum_{j=1}^p \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} (x_0, \cdots, \widehat{x}_i, \cdots, \widehat{x}_j, \cdots, x_p) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j < i} (-1)^{i+j} (x_0, \cdots, \widehat{x}_j, \cdots, \widehat{x}_i, \cdots, x_p) - \sum_{j=1}^p \sum_{i < j} (-1)^{i+j} (x_0, \cdots, \widehat{x}_i, \cdots, \widehat{x}_j, \cdots, x_p) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(2) 由

$$\begin{aligned} \phi \circ \partial_p([v_0, \cdots, v_p]) &= \phi \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, \cdots, \widehat{v}_i, \cdots, v_p] \right) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (v_0, \cdots, \widehat{v}_i, \cdots, v_p) \\ &= \partial_p^{\text{ord}}(v_0, \cdots, v_p) = \partial_p^{\text{ord}} \circ \phi([v_0, \cdots, v_p]) \end{aligned}$$

及

$$\varphi \circ \phi \left(\sum_i a_i [v_i] \right) = \varphi \left(\sum_i a_i (v_i) \right) = \sum_i a_i = \varphi \left(\sum_i a_i [v_i] \right)$$

知 ϕ 是保持增广映射的链映射. 当 w_0, \cdots, w_p 两两不同时,

$$\begin{aligned} \psi \circ \partial_p^{\text{ord}}((w_0, \cdots, w_p)) &= \psi \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i (w_0, \cdots, \widehat{w}_i, \cdots, w_p) \right) = \sum_{i=0}^p (-1)^i [w_0, \cdots, \widehat{w}_i, \cdots, w_p] \\ &= \partial_p[w_0, \cdots, w_p] = \partial_p \circ \psi((w_0, \cdots, w_p)), \end{aligned}$$

而当 w_0, \cdots, w_p 中有相同元素 (不妨设 $w_0 = w_1$) 时,

$$\partial_p^{\text{ord}}((w_0, \cdots, w_p)) = (w_1, w_2, \cdots, w_p) - (w_0, w_2, \cdots, w_p) + \sum_{i=2}^p (-1)^i (w_0, \cdots, \widehat{w}_i, \cdots, w_p)$$

$$= \sum_{i=2}^p (-1)^i (w_0, \dots, \widehat{w}_i, \dots, w_p),$$

求和式中每项均有重复元素 ($w_0 = w_1$), 因此

$$\psi \circ \partial_p^{\text{ord}}((w_0, \dots, w_p)) = 0 = \partial_p(0) = \partial_p \circ \psi((w_0, \dots, w_p)).$$

再结合

$$\varphi \circ \psi \left(\sum_i a_i(w_i) \right) = \varphi \left(\sum_i a_i[w_i] \right) = \sum_i a_i = \varphi \left(\sum_i a_i(w_i) \right)$$

即知 ψ 是保持增广映射的链映射. 最后, 由

$$\psi \circ \phi([v_0, \dots, v_p]) = \psi((v_0, \dots, v_p)) = [v_0, \dots, v_p]$$

知 $\psi \circ \phi = \text{id}_{C_p(K; R)}$.

(3) 先证明锥复形 $w * K$ 在有序同调中是零调的:

引理 $\tilde{H}_p^{\text{ord}}(w * K; R) = 0, \forall p \geq 0$.

证明 定义映射

$$T : C_p^{\text{ord}}(w * K; R) \rightarrow C_{p+1}^{\text{ord}}(w * K; R), \quad (w_0, \dots, w_p) \mapsto (w, w_0, \dots, w_p).$$

对任意 $c_p := \sum_i a_i(w_{i_0}, \dots, w_{i_p}) \in C_p^{\text{ord}}(w * K; R)$, 当 $p = 0$ 时,

$$\partial_1^{\text{ord}} \circ T(c_0) = \partial_1^{\text{ord}} \left(\sum_i a_i(w, w_{i_0}) \right) = \sum_i a_i(w_{i_0}) - \sum_i a_i(w) = c_0 - \varphi(c_0)(w),$$

当 $p > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \partial_{p+1}^{\text{ord}} \circ T(c_p) &= \partial_{p+1}^{\text{ord}} \left(\sum_i a_i(w, w_{i_0}, \dots, w_{i_p}) \right) \\ &= \sum_i a_i \left((w_{i_0}, \dots, w_{i_p}) - \sum_{j=0}^p (w, w_{i_0}, \dots, \widehat{w}_{i_j}, \dots, w_{i_p}) \right) \\ &= c_p - T \circ \partial_p^{\text{ord}}(c_p). \end{aligned}$$

由此可见, 若 $c_p \in \ker \partial_p^{\text{ord}}$ ($p > 0$), 则

$$c_p = \partial_{p+1}^{\text{ord}} \circ T(c_p) \in \text{im } \partial_{p+1}^{\text{ord}}.$$

若 $c_0 \in \ker \varphi$, 则

$$c_0 = \partial_1^{\text{ord}} \circ T(c_0) \in \text{im } \partial_1^{\text{ord}}.$$

故 $\ker \partial_p^{\text{ord}} = \text{im } \partial_{p+1}^{\text{ord}}$ ($\forall p > 0$) 且 $\ker \varphi = \text{im } \partial_1^{\text{ord}}$, 从而 $\tilde{H}_p^{\text{ord}}(w * K; R) = 0, \forall p \geq 0$.

下面通过对 p 归纳证明原问题. 当 $p = 0$ 时, 对 $\sigma = (v) \in C_0^{\text{ord}}(K; R)$, 令 $D_0(v) = (v, v)$, 则

$$\partial_1^{\text{ord}} \circ D_0((v)) = \partial_1^{\text{ord}}((v, v)) = 0 = \phi \circ \psi((v)) - \text{id}_{C_0^{\text{ord}}(K; R)}((v)),$$

即 D_0 满足 $p = 0$ 时的构造. 下面假设已对每个 $0 \leq i \leq p-1$ ($p \geq 1$) 构造了一系列同态

$$D_i : C_i^{\text{ord}}(K; R) \rightarrow C_{i+1}^{\text{ord}}(K; R)$$

使得

$$\textcircled{1} \quad \phi \circ \psi - \text{id}_{C_i^{\text{ord}}(K; R)} = \partial_{i+1}^{\text{ord}} \circ D_i + D_{i-1} \circ \partial_i^{\text{ord}}.$$

$\textcircled{2}$ $D_i(\sigma)$ 是 σ 的承载复形上的链.

则对任意有序 p -单形 τ , 由 (2) ϕ 与 ψ 是链映射, (1) $\partial_{p-1}^{\text{ord}} \circ \partial_p^{\text{ord}} = 0$, 以及归纳假设, 有

$$\begin{aligned} & \partial_p^{\text{ord}} \left(\phi \circ \psi(\tau) - \text{id}_{C_p^{\text{ord}}(K; R)}(\tau) - D_{p-1} \circ \partial_p^{\text{ord}}(\tau) \right) \\ &= \phi \circ \psi \circ \partial_p^{\text{ord}}(\tau) - \partial_p^{\text{ord}}(\tau) - \partial_p^{\text{ord}} \circ D_{p-1} \circ \partial_p^{\text{ord}}(\tau) \\ &= \left(\phi \circ \psi - \text{id}_{C_{p-1}^{\text{ord}}(K; R)} \right) \circ \partial_p^{\text{ord}}(\tau) - \left(\phi \circ \psi - \text{id}_{C_{p-1}^{\text{ord}}(K; R)} - D_{p-2} \circ \partial_{p-1}^{\text{ord}} \right) \circ \partial_p^{\text{ord}}(\tau) \\ &= \left(\phi \circ \psi - \text{id}_{C_{p-1}^{\text{ord}}(K; R)} \right) \circ \partial_p^{\text{ord}}(\tau) - \left(\phi \circ \psi - \text{id}_{C_{p-1}^{\text{ord}}(K; R)} \right) \circ \partial_p^{\text{ord}}(\tau) \\ &= 0. \end{aligned}$$

由于 $\phi \circ \psi(\tau) - \text{id}_{C_p^{\text{ord}}(K; R)}(\tau) - D_{p-1} \circ \partial_p^{\text{ord}}(\tau)$ 是 τ 的承载复形上的链, 而承载复形是锥复形, 由引理, 存在 τ 的承载复形上的链 c , 使得

$$\phi \circ \psi(\tau) - \text{id}_{C_p^{\text{ord}}(K; R)}(\tau) - D_{p-1} \circ \partial_p^{\text{ord}}(\tau) = \partial_{p+1}^{\text{ord}}(c).$$

现定义 $D_p(\tau) = c$, 则有

$$\phi \circ \psi(\tau) - \text{id}_{C_p^{\text{ord}}(K; R)}(\tau) = \partial_{p+1}^{\text{ord}} \circ D_p(\tau) + D_{p-1} \circ \partial_p^{\text{ord}}(\tau),$$

即结论对 p 亦成立. 由归纳原理, 结论得证. \square

习题 13 设 K, K' 为单纯复形, K' 为 K 的重分. 证明: $|K'|$ 和 $|K|$ 作为拓扑空间相同.

证明 (1) 任取 $|K|$ 中闭集 A , 由于 K' 为 K 的重分, 对任意 $\tau \in K'$, 均存在 $\sigma \in K$ 使得 $\sigma \supset \tau$, 从而

$$A \cap \tau = (A \cap \sigma) \cap \tau$$

为 τ 中闭集 (因 $A \cap \sigma$ 为 σ 中闭集). 因此 A 为 $|K'|$ 中闭集, 即 $|K'|$ 的拓扑比 $|K|$ 的拓扑细.

(2) 任取 $|K'|$ 中闭集 B , 对任意 $\sigma \in K$, 由于 K 的每个单形均为 K' 的有限个单形之并, 可设 $\sigma = \bigcup_{i=1}^n \tau_i$, 其中 $\tau_i \in K'$, 则

$$B \cap \sigma = \bigcup_{i=1}^n (B \cap \tau_i).$$

而每个 $B \cap \tau_i$ 均为 τ_i 中闭集, τ_i 又为 σ 中闭集, 因此 $B \cap \tau_i$ 为 σ 中闭集, 从而 $B \cap \sigma$ 为 σ 中闭集. 故 B 为 $|K|$ 中闭集, $|K|$ 的拓扑比 $|K'|$ 的拓扑细.

由 (1) 与 (2) 即知 $|K|$ 和 $|K'|$ 作为拓扑空间相同. \square

习题 14 令 $|K| = |L| = [0, 1]$, $K^{(0)} = \{0, \frac{1}{3}, 1\}$, $L^{(0)} = \{0, \frac{2}{3}, 1\}$. 定义映射 $f : |K| \rightarrow |L|, x \mapsto x^2$.

(1) 证明: $f : |\text{sd } K| \rightarrow |L|$ 不存在单纯逼近.

(2) 构造 $f: |\text{sd}^2 K| \rightarrow |L|$ 的单纯逼近.

解答 (1) $(\text{sd} K)^{(0)} = \{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$. 假设 f 存在单纯逼近 s , 则

$$\text{star}(1, \text{sd} K) = (\frac{2}{3}, 1], \quad f(\text{star}(1, \text{sd} K)) = (\frac{4}{9}, 1],$$

而

$$\text{star}(s(1), L) = \text{star}(1, L) = (\frac{2}{3}, 1] \not\supset (\frac{4}{9}, 1],$$

这与 s 是 f 的单纯逼近矛盾. 故 $f: |\text{sd} K| \rightarrow |L|$ 不存在单纯逼近.

(2) $(\text{sd}^2 K)^{(0)} = \{0, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\}$. 先求出 L 中顶点对应的开星形:

$$\text{star}(0, L) = [0, \frac{2}{3}), \quad \text{star}(\frac{2}{3}, L) = (0, 1), \quad \text{star}(1, L) = (\frac{2}{3}, 1].$$

再求出 $\text{sd}^2 K$ 中顶点对应的开星形:

$$\begin{aligned} \text{star}(0, \text{sd}^2 K) &= [0, \frac{1}{12}), & \text{star}(\frac{1}{12}, \text{sd}^2 K) &= (0, \frac{1}{6}), & \text{star}(\frac{1}{6}, \text{sd}^2 K) &= (\frac{1}{12}, \frac{1}{4}), \\ \text{star}(\frac{1}{4}, \text{sd}^2 K) &= (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}), & \text{star}(\frac{1}{3}, \text{sd}^2 K) &= (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), & \text{star}(\frac{1}{2}, \text{sd}^2 K) &= (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \\ \text{star}(\frac{2}{3}, \text{sd}^2 K) &= (\frac{1}{2}, \frac{5}{6}), & \text{star}(\frac{5}{6}, \text{sd}^2 K) &= (\frac{2}{3}, 1), & \text{star}(1, \text{sd}^2 K) &= (\frac{5}{6}, 1]. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} f(\text{star}(1, \text{sd}^2 K)) &= (\frac{25}{36}, 1] \subset \text{star}(1, L), & f(\text{star}(\frac{5}{6}, \text{sd}^2 K)) &= (\frac{4}{9}, 1) \subset \text{star}(\frac{2}{3}, L), \\ f(\text{star}(\frac{2}{3}, \text{sd}^2 K)) &= (\frac{1}{4}, \frac{25}{36}) \subset \text{star}(\frac{2}{3}, L), & f(\text{star}(\frac{1}{2}, \text{sd}^2 K)) &= (\frac{1}{9}, \frac{4}{9}) \subset \text{star}(0, L), \end{aligned}$$

故可令

$$s(1) = 1, \quad s(\frac{5}{6}) = \frac{2}{3}, \quad s(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}, \quad s(\frac{1}{2}) = s(\frac{1}{3}) = s(\frac{1}{4}) = s(\frac{1}{6}) = s(\frac{1}{12}) = s(0) = 0.$$

这是 $f: |\text{sd}^2 K| \rightarrow |L|$ 的单纯逼近. □

习题 15 设 K, K' 为单纯复形, K' 为 K 的重分, 则恒等映射 $\text{id}: |K'| \rightarrow |K|$ 有一个单纯逼近 $s: K' \rightarrow K$. 设 $\tau \in K', \sigma \in K$, 证明: 若 $\tau \subset \sigma$, 则 $s(\tau) \subset \sigma$.

证明 任取 τ 的顶点 v , 由于 $\tau \subset \sigma$, v 在 σ 或 σ 的某个面的内部, 因此 $s(v)$ 为 σ 的顶点, 进而 $s(\tau) \subset \sigma$. □

习题 16 完成代数重分定理证明的 ⑤: 存在 $\hat{d}_p: C_p(K'; R) \rightarrow C_{p+1}(K'; R)$ 使得 $\lambda \circ \mu - \text{id} = \partial \circ \hat{d} + \hat{d} \circ \partial$.

证明 由于 μ 在 $C_0(K'; R)$ 上将 $[v]$ 映为 $\sigma_v \in K$ 的某个顶点, 因此

$$(\lambda \circ \mu - \text{id})[v] = \sigma_{[v]} \text{ 的某个顶点} - [v] =: \partial c_v.$$

故定义 $\hat{d}_0[v] = c_v \in C_1(K'(\sigma_{[v]}; R))$. 下面假设对所有的 $j \leq p-1$ ($p \geq 1$) 均已定义

$$\hat{d}_j: C_j(K'; R) \rightarrow C_{j+1}(K'; R),$$

且对任意 j 单形 $\tau_1 \in K'$, 均有 $\hat{d}_j[\tau_1] \in C_{j+1}(K'(\sigma_{\tau_1}); R)$ 及

$$\lambda \circ \mu - \text{id} = \partial \hat{d}_j + \hat{d}_{j-1} \partial.$$

对任意 p 单形 $\tau \in K'$, 设 $\tau \subset \sigma_\tau$, 由 ④, $\mu[\tau] \in C_p(K(\sigma_\tau); R)$, 进而 $\lambda \circ \mu[\tau] \in C_p(K'(\sigma_\tau); R)$. 由于

$$\partial(\lambda \circ \mu - \text{id} - \hat{d}_{p-1} \partial)[\tau] = (\lambda \circ \mu - \text{id} - \partial \hat{d}_{p-1})(\partial[\tau]) = \hat{d}_{p-2}(\partial^2[\tau]) = 0,$$

由 $K'(\sigma)$ 零调这一假设, 存在 $c \in C_{p+1}(K'(\sigma_\tau); R)$, 使得

$$(\lambda \circ \mu - \text{id} - \hat{d}_{p-1} \partial)[\tau] = \partial c.$$

由此定义 $\hat{d}_p[\tau] = c \in C_{p+1}(K'(\sigma_\tau); R)$, 则有

$$\lambda \circ \mu - \text{id} = \partial \hat{d}_p + \hat{d}_{p-1} \partial.$$

由归纳原理, 结论得证. □

习题 17 设 K 是单纯复形, K' 和 K'' 是 K 的两个重分, 证明: 存在 K 的一个重分 K''' , 它是 K' 和 K'' 的共同加细.

证明 考虑到重分的有限性 (即重分是在 K 的每个单形中增加有限多个点), 总存在 K''' 同时是 K' 和 K'' 的重分. □

习题 18 证明连续映射的函子性质: 设 K, L, M 是单纯复形, 则

(1) 恒等映射 $\text{id}: |K| \rightarrow |K|$ 诱导恒等同态 $\text{id}_*: H_p(K; R) \rightarrow H_p(K; R)$.

(2) 若 $f: |K| \rightarrow |L|$ 和 $g: |L| \rightarrow |M|$ 为连续映射, 则 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

同样结论对约化同调也成立.

证明 (1) 取 K 的重分 K' , 使得 $s: K' \rightarrow K$ 为 $\text{id}: |K| \rightarrow |K|$ 的单纯逼近, 则

$$\text{id}_* = s_* \circ (s_*)^{-1} = \text{id}_{H_p(K; R)}.$$

(2) 取 L 的重分 L' , 使得 $\hat{g}: L' \rightarrow M$ 为 $g: |L| \rightarrow |M|$ 的单纯逼近. 再取 K 的重分 K' , 使得 $\hat{f}: K' \rightarrow L'$ 为 $f: |K| \rightarrow |L|$ 的单纯逼近.

$$|K| \xrightarrow{f} |L| \xrightarrow{g} |M|$$

$$\begin{array}{ccccc} K & & L & & M \\ \uparrow & & \uparrow & \nearrow & \\ s & & t & \hat{g} & \\ K' & \nearrow \hat{f} & L' & & \end{array}$$

分别选取 $s: K' \rightarrow K$ 和 $t: L' \rightarrow L$ 作为对 $\text{id}_{|K|}$ 和 $\text{id}_{|L|}$ 的单纯逼近. 由习题 10 结论, $t \circ \hat{f}: K' \rightarrow L$ 为 $f: |K| \rightarrow |L|$ 的单纯逼近, $\hat{g} \circ \hat{f}: K' \rightarrow M$ 为 $g \circ f: |K| \rightarrow |M|$ 的单纯逼近. 于是

$$(g \circ f)_* = (\hat{g} \circ \hat{f})_* \circ (s_*)^{-1} = \hat{g}_* \circ \hat{f}_* \circ (s_*)^{-1}$$

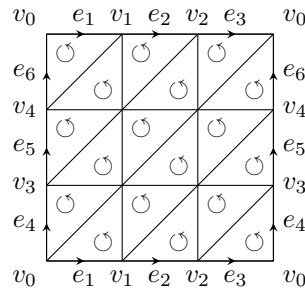
$$\begin{aligned}
&= \hat{g}_* \circ (t_*)^{-1} \circ t_* \circ \hat{f}_* \circ (s_*)^{-1} \\
&= g_* \circ (t \circ f)_* \circ (s_*)^{-1} = g_* \circ f_*. \quad \square
\end{aligned}$$

习题 19 设 K 是单纯复形, A 是 $|K|$ 的紧子集, 证明: A 的承载复形有限, 即存在 K 的某个有限子复形 K_0 使得 $A \subset |K_0|$.

证明 设 $X \subset \bigsqcup_{\sigma \in K} \sigma^\circ$. 用反证法, 假设 A 不被 K 的任何有限子复形包含, 则存在无限点列 $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, 其中 $x_i \in \sigma_i^\circ \cap A$. 对任意 $\sigma \in K$, 由于 σ 至多包含有限个 σ_i° , $\{x_i\}_{i=1}^\infty \cap \sigma$ 为一有限集, 因此 $\{x_i\}_{i=1}^\infty \cap \sigma$ 是 σ 中闭集, 由多面体拓扑的定义, $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ 为紧集 A 中的闭集, 从而是紧集. 另一方面, 同前面的证明, 对任意 $j \in \mathbb{N}$, $\{x_i\}_{i=1}^\infty \setminus \{x_j\}$ 是 $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ 中闭集, 从而 $\{x_j\}$ 是 $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ 中开集, 因此 $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ 是一离散空间, 而它又是紧的, 因此只能为有限集, 这与我们的假设矛盾. 故结论得证. \square

习题 20 计算 \mathbb{T}^2 的同调.

解答 \mathbb{T}^2 的一个单纯剖分 K 见下图.



(1) 由 K 为连通复形知 $H_0(K; R) = R$.

(2) 设 $\partial_2 \left(\sum_{\dim f=2} c_f f \right) = 0$. 由于 \mathbb{T}^2 是可定向的, 对于任意两个 2 维定向单形, 它们在公共棱诱导方向恰好相反, 因此这两个 2 维单形在此 2 维闭链上的系数相同, 从而 $c_f \equiv a$ (常数). 而 $\partial_2 \left(\sum_{\dim f=2} f \right) = 0$, 因此 $\ker \partial_2 = R \sum_{\dim f=2} f$, 从而 $H_2(K; R) = R$.

(3) 设 $\partial_1 c_1 = 0$. 采用“挤到边上去”的方法可知, 存在 $c_2 \in C_2(K; R)$ 使得

$$c_1 = \partial_2 c_2 + \sum_{\text{边界棱 } e} a_e e := \partial_2 c_2 + \sum_{i=1}^6 a_i e_i.$$

两边作用 ∂_1 即得

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^6 a_i \partial e_i \\
&= a_1(v_1 - v_0) + a_2(v_2 - v_1) + a_3(v_0 - v_2) + a_4(v_3 - v_0) + a_5(v_4 - v_3) + a_6(v_0 - v_4) \\
&= (a_3 - a_1 - a_4 + a_6)v_0 + (a_1 - a_2)v_1 + (a_2 - a_3)v_2 + (a_4 - a_5)v_3 + (a_5 - a_6)v_4.
\end{aligned}$$

因此

$$a_1 = a_2 = a_3, \quad a_4 = a_5 = a_6.$$

故对任意 $c_1 \in \ker \partial_1$, 存在 $c_2 \in C_2(K; R)$ 与 $\alpha, \beta \in R$, 使得

$$c_1 = \partial_2 c_2 + \alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_4 + e_5 + e_6)$$

下证 c_1 的这种表示中 α, β 是唯一确定的: 若还有另一表示

$$c_1 = \partial_2 c'_2 + \alpha'(e_1 + e_2 + e_3) + \beta'(e_4 + e_5 + e_6),$$

则

$$0 = \partial_2(c_2 - c'_2) + (\alpha - \alpha')(e_1 + e_2 + e_3) + (\beta - \beta')(e_4 + e_5 + e_6).$$

这要求 $\partial_2(c_2 - c'_2)$ 在任意内部棱上的系数为 0, 从而存在 $b \in R$ 使得

$$c_2 - c'_2 = b \sum_{\dim f=2} f,$$

这意味着 $\partial_2(c_2 - c'_2) = 0$, 因此

$$(\alpha - \alpha')(e_1 + e_2 + e_3) + (\beta - \beta')(e_4 + e_5 + e_6) = 0,$$

即 $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$, 故 c_1 的上述表示唯一. 于是可定义映射

$$\Phi : \ker \partial_1 \rightarrow R \oplus R, \quad c_1 \mapsto (\alpha, \beta).$$

由于 $\partial_1(e_1 + e_2 + e_3) = 0 = \partial_1(e_4 + e_5 + e_6)$, 因此对任意 $(\alpha, \beta) \in R \oplus R$, 均有 $\alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_4 + e_5 + e_6) \in \ker \partial_1$, 即 Φ 是满射. 又

$$\ker \Phi = \{c_1 = \partial_2 c_2 : c_2 \in C_2(K; R)\} = \text{im } \partial_2,$$

因此

$$H_1(K; R) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2 = \ker \partial_1 / \ker \Phi \simeq \text{im } \Phi = R \oplus R.$$

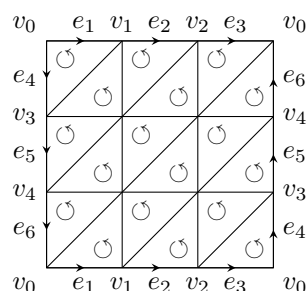
综上所述, \mathbb{T}^2 的同调为

$$H_p(K; R) = \begin{cases} R, & p = 0, 2, \\ R \oplus R, & p = 1, \\ 0, & p > 2. \end{cases}$$

□

习题 21 计算 Klein 瓶的同调.

解答 Klein 瓶的一个单纯剖分 K 见下图.



(1) 由 K 为连通复形知 $H_0(K; R) = R$.

(2) 设 $\partial_2 \left(\sum_{\dim f=2} c_f f \right) = 0$. 由于图中任意两个 2 维定向单形在公共棱诱导方向恰好相反, 因此这两个 2 维单形在此 2 维闭链上的系数相同, 从而 $c_f \equiv a$ (常数). 于是

$$0 = a \partial_2 \left(\sum_{\dim f=2} f \right) = 2a(e_4 + e_5 + e_6).$$

故 $2a = 0$, $\ker \partial_2 = \left\{ a \sum_{\dim f=2} f : 2a = 0 \right\}$, 从而 $H_2(K; R) = \{a \in R : 2a = 0\}$.

(3) 设 $\partial_1 c_1 = 0$. 采用“挤到边上去”的方法可知, 存在 $c_2 \in C_2(K; R)$ 使得

$$\sum_{\dim e=1} c_e e = \partial_2 c_2 + \sum_{\text{边界棱 } e} a_e e := \partial_2 c_2 + \sum_{i=1}^6 a_i e_i.$$

两边作用 ∂_1 即得

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^6 a_i \partial e_i \\ &= a_1(v_1 - v_0) + a_2(v_2 - v_1) + a_3(v_0 - v_2) + a_4(v_3 - v_0) + a_5(v_4 - v_3) + a_6(v_0 - v_4) \\ &= (a_3 - a_1 - a_4 + a_6)v_0 + (a_1 - a_2)v_1 + (a_2 - a_3)v_2 + (a_4 - a_5)v_3 + (a_5 - a_6)v_4. \end{aligned}$$

因此

$$a_1 = a_2 = a_3, \quad a_4 = a_5 = a_6.$$

故对任意 $c_1 \in \ker \partial_1$, 存在 $c_2 \in C_2(K; R)$ 与 $\alpha, \beta \in R$, 使得

$$c_1 = \partial_2 c_2 + \alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_4 + e_5 + e_6)$$

下证 c_1 的这种表示中 α, β 是唯一确定的: 若还有另一表示

$$c_1 = \partial_2 c'_2 + \alpha'(e_1 + e_2 + e_3) + \beta'(e_4 + e_5 + e_6),$$

则

$$0 = \partial_2(c_2 - c'_2) + (\alpha - \alpha')(e_1 + e_2 + e_3) + (\beta - \beta')(e_4 + e_5 + e_6).$$

这要求 $\partial_2(c_2 - c'_2)$ 在任意内部棱上的系数为 0, 从而存在 $b \in R$ 使得

$$c_2 - c'_2 = b \sum_{\dim f=2} f,$$

这意味着

$$\partial_2(c_2 - c'_2) = b \sum_{\dim f=2} \partial f = 2b(e_4 + e_5 + e_6).$$

因此

$$(\alpha - \alpha')(e_1 + e_2 + e_3) + (\beta - \beta')(e_4 + e_5 + e_6) = -2b(e_4 + e_5 + e_6),$$

即 $\alpha = \alpha'$, $\beta' = \beta + 2b$. 注意到在模 $2R$ 意义下 β 的同余类 $[\beta]$ 是唯一确定的, 于是可定义映射

$$\Phi : \ker \partial_1 \rightarrow R \oplus R/2R, \quad c \mapsto (\alpha, [\beta]).$$

由于 $\partial_1(e_1 + e_2 + e_3) = 0 = \partial_1(e_4 + e_5 + e_6)$, 因此对任意 $\alpha, \beta \in R$, $\alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_4 + e_5 + e_6) \in \ker \partial_1$, 即 Φ 是满射. 又

$$\ker \Phi = \{c_1 = \partial_2 c_2 : c_2 \in C_2(K; R)\} = \text{im } \partial_2,$$

因此

$$H_1(K; R) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2 = \ker \partial_1 / \ker \Phi \simeq \text{im } \Phi = R \oplus R/2R.$$

综上所述, Klein 瓶的同调为

$$H_p(K; R) = \begin{cases} R, & p = 0, \\ R \oplus R/2R, & p = 1, \\ \{a \in R : 2a = 0\}, & p = 2, \\ 0, & p > 2. \end{cases} \quad \square$$

习题 22 设 K 为有限单纯复形. 若 $\phi : C_p(K; \mathbb{R}) \rightarrow C_p(K; \mathbb{R})$ 为链映射, 它诱导 $\phi_* : H_p(K; \mathbb{R}) \rightarrow H_p(K; \mathbb{R})$, 则

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \text{Tr}^{C_p(K; \mathbb{R})}[\phi] = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \text{Tr}^{H_p(K; \mathbb{R})}[\phi_*].$$

证明 我们有直和分解

$$C_p \simeq \text{im } \partial_{p+1} \oplus \ker \partial_p / \text{im } \partial_{p+1} \oplus C_p / \ker \partial_p. \quad (22-1)$$

取 H_p 的一组基 $h_p = (h_p^1, \dots, h_p^{k_p})$, 其中 $k_p = \dim H_p$. 记 $Z_p = \ker \partial_p$, $B_p = \text{im } \partial_{p+1}$, 则 $Z_p/B_p \simeq H_p$. 选取基 h_p 在 Z_p 中的代表元 $z_p = (z_p^1, \dots, z_p^{k_p})$. 取 B_p 的一组基 $b_p = (b_p^1, \dots, b_p^{n_p})$, 其中 $n_p = \dim B_p$. 对 ∂_p 运用同态基本定理可得 $C_p/Z_p \simeq B_{p-1}$. 记 C_p 中与 b_{p-1} 相对应的基为 $\tilde{b}_{p-1} = (\tilde{b}_{p-1}^1, \dots, \tilde{b}_{p-1}^{n_{p-1}})$, 它满足 $\partial_p(\tilde{b}_{p-1}^i) = b_{p-1}^i$ ($1 \leq i \leq n_{p-1}$). 由 (22-1), $(b_p, z_p, \tilde{b}_{p-1})$ 构成 C_p 的一组基. 设

$$\phi_*(h_p) = (h_p)(\phi_{H_p}),$$

其中 ϕ_{H_p} 为 k_p 阶方阵. 由 z_p 的构造可知, $\phi(z_p) - h_p \phi_{H_p} \in B_p$, 因此

$$\phi(z_p) = \begin{pmatrix} b_p & z_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ \phi_{H_p} \end{pmatrix} \quad (22-2)$$

设

$$\phi(b_p) = (b_p)(\phi_{B_p}), \quad (22-3)$$

其中 ϕ_{B_p} 为 n_p 阶方阵. 由 ϕ 为链映射可得

$$\partial \phi(\tilde{b}_{p-1}) = \phi(\partial) = \phi(b_{p-1}) = (b_{p-1})(\phi_{B_{p-1}}) = \partial(\tilde{b}_{p-1})(\phi_{B_{p-1}}).$$

因此

$$\phi(\tilde{b}_{p-1}) - (\tilde{b}_{p-1})(\phi_{B_{p-1}}) \in \ker \partial_p = Z_p,$$

进而

$$\phi(\tilde{b}_{p-1}) = \begin{pmatrix} b_p & z_p & \tilde{b}_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ * \\ \phi_{B_{p-1}} \end{pmatrix}. \quad (22-4)$$

结合 (22-2) (22-3) (22-4) 可得

$$\phi \begin{pmatrix} b_p & z_p & \tilde{b}_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_p & z_p & \tilde{b}_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{B_p} & * & * \\ 0 & \phi_{H_p} & * \\ 0 & 0 & \phi_{B_{p-1}} \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{Tr}^{C_p(K;\mathbb{R})}[\phi] &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (\operatorname{Tr}[\phi_{B_p}] + \operatorname{Tr}[\phi_{H_p}] + \operatorname{Tr}[\phi_{B_{p-1}}]) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{Tr}[\phi_{H_p}] = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{Tr}^{H_p(K;\mathbb{R})}[\phi_*]. \quad \square \end{aligned}$$

习题 23 证明: 加法群同态序列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{g} & \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \\ & & & & 1 \pmod{2} & \mapsto & 2 \pmod{4} \\ & & & & & & n \pmod{4} \mapsto n \pmod{2} \end{array}$$

正合但不可裂.

证明 由于 $g \circ f(n) = 2n \pmod{2} = 0$, f 为单射, g 为满射, 因此序列正合. 若序列可裂, 则存在群同态 $p: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4$, 使得 $\mathbb{Z}_4 \simeq f(\mathbb{Z}_2) \oplus p(\mathbb{Z}_2)$, 但后者无 4 阶元, 矛盾. 故序列不可裂. \square

习题 24 (Steenrod 五引理) 设已给出由 Abel 群和同态构成的交换图表:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\phi_1} & A_2 & \xrightarrow{\phi_2} & A_3 & \xrightarrow{\phi_3} & A_4 & \xrightarrow{\phi_4} & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 & \xrightarrow{\psi_3} & B_4 & \xrightarrow{\psi_4} & B_5 \end{array}$$

其中水平序列是正合的. 证明:

(1) 若 f_1 满, f_2 单, f_4 单, 则 f_3 单.

(2) 若 f_5 单, f_2 满, f_4 满, 则 f_3 满.

特别地, 若 f_1, f_2, f_4, f_5 是同构, 则 f_3 也是同构.

证明 (1) 设 $a_3 \in \ker f_3$, 则 $f_4(\phi_3(a_3)) = \psi_3(f_3(a_3)) = 0$. 由 f_4 单得 $\phi_3(a_3) = 0$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \parallel \\
 a_1 & \xrightarrow{\phi_1} & a_2 & \xrightarrow{\phi_2} & a_3 & \xrightarrow{\phi_3} & \phi_3(a_3) \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 \\
 b_1 & \xrightarrow{\psi_1} & f_2(a_2) & \xrightarrow{\psi_2} & f_3(a_3) & \xrightarrow{\psi_3} & 0 \\
 & & & & & & \parallel \\
 & & & & & & 0
 \end{array}$$

由于 $a_3 \in \ker \phi_3 = \text{im } \phi_2$, 存在 $a_2 \in A_2$ 使得 $a_3 = \phi_2(a_2)$. 于是 $0 = f_3(a_3) = f_3(\phi_2(a_2)) = \psi_2(f_2(a_2))$, 从而 $f_2(a_2) \in \ker \psi_2 = \text{im } \psi_1$. 因此存在 $b_1 \in B_1$ 使得 $f_2(a_2) = \psi_1(b_1)$. 而 f_1 是满射, 存在 $a_1 \in A_1$ 使得 $b_1 = f_1(a_1)$. 由于 $f_2(\phi_1(a_1)) = \psi_1(f_1(a_1)) = \psi_1(b_1) = f_2(a_2)$, 而 f_2 是单射, 因此 $\phi_1(a_1) = a_2$, 进而 $a_3 = \phi_2(a_2) = \phi_2(\phi_1(a_1)) = 0$. 故 f_3 为单射.

(2) 任取 $b_3 \in B_3$, 由于 $\psi_3(b_3) \in B_4$, 而 f_4 满, 因此存在 $a_4 \in A_4$ 使得 $f_4(a_4) = \psi_3(b_3)$. 由于 $0 = \psi_4(\psi_3(b_3)) = \psi_4(f_4(a_4)) = f_5(\phi_4(a_4))$, 而 f_5 单, 因此 $\phi_4(a_4) = 0$. 由于 $a_4 \in \ker \phi_4 = \text{im } \phi_3$, 存在 $a_3 \in A_3$ 使得 $a_4 = \phi_3(a_3)$. 由 $\psi_3(b_3) = f_4(a_4) = f_4(\phi_3(a_3)) = \psi_3(f_3(a_3))$ 可得 $b_3 - f_3(a_3) \in \ker \psi_3 = \text{im } \psi_2$. 因此存在 $b_2 \in B_2$ 使得 $b_3 - f_3(a_3) = \psi_2(b_2)$. 而 f_2 满, 因此存在 $a_2 \in A_2$ 使得 $f_2(a_2) = b_2$. 于是 $b_3 - f_3(a_3) = \psi_2(b_2) = \psi_2(f_2(a_2)) = f_3(\phi_2(a_2))$, 即 $b_3 = f_3(a_3 + \phi_2(a_2)) \in \text{im } f_3$. 故 f_3 为满射.

特别地, 若 f_1, f_2, f_4, f_5 是同构, 则 f_3 既单又满, 为同构. \square

习题 25 设 K 为单纯复形, K_1 是 K 的子复形, 证明: $|K_1| \subset |K|$ 的子空间拓扑与 $|K_1|$ 本身的多面体拓扑一致.

证明 (1) 设 A 在 $|K_1|$ 本身的多面体拓扑下闭. 对任意 K 的单形 σ , 由于 $\sigma \cap |K_1|$ 是 σ 的属于 K_1 的面 s_i 的并, 而由假设, $A \cap s_i$ 在 s_i 中闭, 因此在 σ 中闭, 进而 $A \cap \sigma = A \cap \bigcup_i s_i = \bigcup_i (A \cap s_i)$ 是 σ 中闭集的有限并, 它是 σ 中闭集, 从而 A 在 $|K|$ 中闭, 即在 $|K_1| \subset |K|$ 的子空间拓扑下闭.

(2) 设 A 在 $|K_1| \subset |K|$ 的子空间拓扑下闭, 则存在 $|K|$ 中闭集 B 使得 $A = B \cap |K_1|$. 对任意 K_1 的单形 σ , $A \cap \sigma = (B \cap \sigma) \cap |K_1| = B \cap \sigma$ 是 σ 中闭集, 因此 A 在 $|K_1|$ 本身的多面体拓扑下闭. \square

习题 26 设连续映射 $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ 无不动点, 直接证明 f 与对径映射 $\text{anti}: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n, x \mapsto -x$ 同伦.

证明 定义映射

$$F: \mathbb{S}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n, \quad (x, t) \mapsto \frac{(1-t)f(x) - tx}{\|(1-t)f(x) - tx\|}.$$

这是良定的, 因为若 $(1-t)f(x) - tx = 0$, 则 $t \in (0, 1)$, 从而 $f(x) = \frac{t}{1-t}x$, 由于 f 无不动点, $\frac{t}{1-t} = -1$, 无解. 由于 $F(x, 0) = f(x)$ 且 $F(x, 1) = -x$, 因此 F 给出 f 与 anti 的同伦, $f \simeq \text{anti}$. \square

习题 27 设 $(X, X_1), (Y, Y_1)$ 为可剖分空间偶, 满足 $(Y, Y_1) \subset (X, X_1)$, 且 (Y, Y_1) 是紧偶, 令 $i_X: (Y, Y_1) \rightarrow (X, X_1)$ 为包含映射. 证明: 若 $\alpha \in H_p(Y, Y_1; R)$, 且 $(i_X)_* \alpha = 0$, 则存在紧偶 (Z, Z_1) 及包含映射 $i_Z: (Y, Y_1) \rightarrow (Z, Z_1)$, 使得 $(i_Z)_* \alpha = 0$.

证明 设 (X, X_1) 是一个单纯复形偶 (K, K_1) 的可剖分空间:

$$k: (X, X_1) \rightarrow (|K|, |K_1|).$$

由于 Y 紧, 它包含在 K 的一个有限子复形 L 的可剖空间中, 即 $Y \subset k^{-1}(|L|)$. 于是 Y_1 包含在 $K_1 \cap L =: L_1$ 的可剖空间中. 记包含映射

$$i_K : (L, L_1) \rightarrow (K, K_1).$$

设 $\alpha \in H_p(L, L_1; R)$ 满足 $(i_K)_* \alpha = 0$. 令 $c \in C_p(L; R)$ 是代表 α 的一个链. 由于 $0 = (i_K)_* \alpha = [(i_K)_\#(c)]_{K, K_1}$, 存在 K 的一个链 $d \in C_{p+1}(K; R)$, 使得 $(i_K)_\#(c) - \partial^K d$ 被 K_1 承载:

$$(i_K)_\#(c) - \partial^K d \in C_p(K_1; R).$$

选取 K_1 的承载 $(i_K)_\#(c) - \partial^K d$ 的一个有限子复形 $\widehat{K}_1 \subset K_1$. 令 $M = L \cup \widehat{K} \cup \widehat{K}_1$ 与 $M_1 = L_1 \cup \widehat{K}_1$, 则由包含映射

$$i_M : (L, L_1) \rightarrow (M, M_1)$$

诱导的同态将 α 映为 0:

$$(i_M)_* \alpha = [(i_M)_\#(c)]_{M, M_1} = [(i_M)_\#(c) - \partial^M(d)]_{M, M_1} + [\partial^M(d)]_{M, M_1} = 0. \quad \square$$

习题 28 奇异同调中 $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$.

证明 对任意 $T \in S_p(X; R)$, 有

$$\begin{aligned} & \partial_{p-1} \circ \partial_p(T) \\ &= \partial_{p-1} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i T \circ \ell(e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_p) \right) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_{p-1} \circ T \circ \ell(e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_p) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \left(\sum_{j<i} (-1)^j T \circ \ell(e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_p) + \sum_{j>i} (-1)^{j-1} T \circ \ell(e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_p) \right) \\ &= \sum_{i=0}^p \sum_{j<i} (-1)^{i+j} T \circ \ell(e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_p) + \sum_{j=1}^p \sum_{i<j} (-1)^{i+j-1} T \circ \ell(e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_p) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j<i} (-1)^{i+j} T \circ \ell(e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_p) - \sum_{j=1}^p \sum_{i<j} (-1)^{i+j} T \circ \ell(e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_p) \\ &= 0. \quad \square \end{aligned}$$

习题 29 奇异同调中 $f_\# \circ \partial^X = \partial^Y \circ f_\#$, 其中 $f : X \rightarrow Y$ 是连续映射.

证明 对任意 $T \in S_p(X; R)$, 有

$$\begin{aligned} \partial^Y \circ f_\#(T) &= \sum_{i=0}^p (f \circ T) \circ \ell(e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_p) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i f \circ (T \circ \ell(e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_p)) \\ &= f \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i T \circ \ell(e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_p) \right) \end{aligned}$$

$$= f(\partial^X(T)) = f_{\#} \circ \partial^X(T).$$

□

习题 30 定义

$$\phi_p(\ell(v_0, \dots, v_p)) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \ell(j_0(v_0), \dots, j_0(v_i), j_1(v_i), \dots, j_1(v_p)) \in S_{p+1}(\Delta_p \times I),$$

其中 $j_0, j_1 : \Delta_p \rightarrow \Delta_p \times I$, $j_0(y) = (y, 0)$, $j_1(y) = (y, 1)$. 验证:

$$(\partial \circ \phi_p + \phi_{p-1} \circ \partial)\ell(e_0, \dots, e_p) = \ell(j_1(e_0), \dots, j_1(e_p)) - \ell(j_0(e_0), \dots, j_0(e_p)).$$

证明 我们有

$$\begin{aligned} \phi_{p-1}(\partial\ell(e_0, \dots, e_p)) &= \phi_{p-1} \left(\sum_{j=0}^p (-1)^j \ell(e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_p) \right) \\ &= \sum_{j=0}^p (-1)^j \phi_{p-1}(\ell(e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_p)) \\ &= \sum_{j=0}^p (-1)^j \left(\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \ell(j_0(e_0), \dots, j_0(e_i), j_1(e_i), \dots, \widehat{j_1(e_j)}, \dots, j_1(e_p)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=j}^{p-1} (-1)^i \ell(j_0(e_0), \dots, \widehat{j_0(e_j)}, \dots, j_0(e_{i+1}), j_1(e_{i+1}), \dots, j_1(e_p)) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p (-1)^{i+j} \ell(j_0(e_0), \dots, j_0(e_i), j_1(e_i), \dots, \widehat{j_1(e_j)}, \dots, j_1(e_p)) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} \ell(j_0(e_0), \dots, \widehat{j_0(e_j)}, \dots, j_0(e_{i+1}), j_1(e_{i+1}), \dots, j_1(e_p)) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p (-1)^{i+j} \ell(j_0(e_0), \dots, j_0(e_i), j_1(e_i), \dots, \widehat{j_1(e_j)}, \dots, j_1(e_p)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j-1} \ell(j_0(e_0), \dots, \widehat{j_0(e_j)}, \dots, j_0(e_i), j_1(e_i), \dots, j_1(e_p)) \\ &= \sum_{i=0}^p \sum_{j=i+1}^p (-1)^{i+j} \ell(j_0(e_0), \dots, j_0(e_i), j_1(e_i), \dots, \widehat{j_1(e_j)}, \dots, j_1(e_p)) \\ &\quad + \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j-1} \ell(j_0(e_0), \dots, \widehat{j_0(e_j)}, \dots, j_0(e_i), j_1(e_i), \dots, j_1(e_p)), \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \partial(\phi_p(\ell(e_0, \dots, e_0))) &= \partial \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i \ell(j_0(e_0), \dots, j_0(e_i), j_1(e_i), \dots, j_1(e_p)) \right) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial(\ell(j_0(e_0), \dots, j_0(e_i), j_1(e_i), \dots, j_1(e_p))) \end{aligned}$$

证明 对任意 $A = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, 作 Gram-Schmidt 标准正交化:

$$\beta_k = \alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\gamma_i^\top \alpha_k) \gamma_i = \alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\beta_i^\top \alpha_k}{\beta_i^\top \beta_i} \beta_i, \quad \gamma_k = \frac{1}{\|\beta_k\|} \beta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

A 的可逆性保证了 $\beta_k \neq 0$. 由此可得 QR 分解

$$(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) = \underbrace{(\gamma_1 \ \gamma_2 \ \cdots \ \gamma_n)}_{\text{记作 } Q_A \in \text{O}(n)} \underbrace{\begin{pmatrix} \|\beta_1\| & \gamma_1^\top \alpha_2 & \cdots & \gamma_1^\top \alpha_n \\ & \|\beta_2\| & & \vdots \\ & & \ddots & \gamma_{n-1}^\top \alpha_n \\ & & & \|\beta_n\| \end{pmatrix}}_{\text{记作 } R_A}.$$

令

$$F(A, t) = Q_A[(1-t)R_A + tI_n],$$

则 $F(A, 0) = Q_A R_A = A$, $F(A, 1) = Q_A \in \text{O}(n)$, 且 $F(\cdot, t)_{\text{O}(n)} = \text{id}_{\text{O}(n)}$, $\forall t \in [0, 1]$. 故 $\text{O}(n)$ 是 $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ 的强形变收缩核. \square

习题 33 计算 $\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n; R)$.

解答 分别用 \mathbb{S}_+^n 与 \mathbb{S}_-^n 表示上下半球面 (含赤道), 则 \mathbb{S}_+^n 与 \mathbb{S}_-^n 均为 \mathbb{S}^n 中闭集, 且 $\mathbb{S}_+^n \cap \mathbb{S}_-^n = \mathbb{S}^{n-1}$ 是它的一个 (带状) 开邻域的强形变收缩核, 因此 $\{\mathbb{S}_+^n, \mathbb{S}_-^n\}$ 是一个 M-V 偶, 从而有 Mayer-Vietoris 长正合列

$$\begin{array}{c} \cdots \tilde{H}_q(\mathbb{S}_+^n \cap \mathbb{S}_-^n; R) \longrightarrow \underbrace{\tilde{H}_q(\mathbb{S}_+^n; R) \oplus \tilde{H}_q(\mathbb{S}_-^n; R)}_{=0} \longrightarrow \tilde{H}_q(\mathbb{S}_+^n \cup \mathbb{S}_-^n; R) \cdots \\ \cdots \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}_+^n \cap \mathbb{S}_-^n; R) \longrightarrow \underbrace{\tilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}_+^n; R) \oplus \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}_-^n; R)}_{=0} \longrightarrow \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}_+^n \cup \mathbb{S}_-^n; R) \cdots \end{array}$$

由此可得 $\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n; R) \simeq \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}; R)$. 因此

- ◇ 当 $q = n$ 时, $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n; R) \simeq \tilde{H}_0(\mathbb{S}^0; R) \simeq R$.
- ◇ 当 $q > n$ 时, $\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n; R) \simeq \tilde{H}_{q-n}(\mathbb{S}^0; R) \simeq 0$.
- ◇ 当 $q < n$ 时, $\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n; R) \simeq \tilde{H}_0(\mathbb{S}^{n-q}; R) = 0$.

故

$$\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n; R) = \begin{cases} R, & q = n; \\ 0, & q \neq n. \end{cases} \quad \square$$

习题 34 计算 $H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R)$.

解答 考虑包含映射 $j: \mathbb{D}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ 与收缩映射

$$r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{D}^n, \quad x \mapsto \begin{cases} x, & \|x\| \leq 1, \\ \frac{x}{\|x\|}, & \|x\| > 1. \end{cases}$$

由 $r \circ j = \text{id}_{\mathbb{D}^n}$ 及 $j \circ r \sim \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ 可知 \mathbb{R}^n 与 \mathbb{D}^n 同伦等价, 且还有 $r|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \circ j|_{\mathbb{S}^{n-1}} = 1$ 与 $j|_{\mathbb{D}^n \setminus \{0\}} \circ r|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \sim \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$, 因此 $\tilde{H}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) \simeq \tilde{H}_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^n \setminus \{0\}; R)$. 由正合性公理, 链复形短正合列

$$0 \rightarrow \left(S(\mathbb{D}^n \setminus \{0\}, \partial \mathbb{D}^n \setminus \{0\}) \right) \rightarrow \left(S(\mathbb{D}^n; R), \partial \mathbb{D}^n \right) \rightarrow \left(S(\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^n \setminus \{0\}; R), \partial \mathbb{D}^n, \mathbb{D}^n \setminus \{0\} \right) \rightarrow 0$$

诱导长正合列

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \tilde{H}_q(\mathbb{D}^n \setminus \{0\}; R) & \longrightarrow & \underbrace{\tilde{H}_q(\mathbb{D}^n; R)}_{=0} & \longrightarrow & \tilde{H}_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^n \setminus \{0\}; R) & \cdots \\ & & & & & & \\ \cdots & \underbrace{\tilde{H}_{q-1}(\mathbb{D}^n \setminus \{0\}; R)}_{\simeq \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}; R)} & \longrightarrow & \underbrace{\tilde{H}_{q-1}(\mathbb{D}^n; R)}_{=0} & \longrightarrow & \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^n \setminus \{0\}; R) & \cdots \end{array}$$

由此及习题 33 结论可知

$$\begin{aligned} H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) &\simeq \tilde{H}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) \simeq \tilde{H}_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^n \setminus \{0\}; R) \simeq \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}; R) \\ &= \begin{cases} R, & q = n; \\ 0, & q \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

或者更直接地, 由 \mathbb{D}^n 是 \mathbb{R}^n 的强形变收缩核及 \mathbb{S}^{n-1} 是 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 的强形变收缩核, 可得

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & \tilde{H}_q(\mathbb{S}^{n-1}; R) & \longrightarrow & \tilde{H}_q(\mathbb{D}^n; R) & \longrightarrow & \tilde{H}_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}; R) \cdots \\ & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \Phi \\ \cdots & \tilde{H}_q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) & \longrightarrow & \tilde{H}_q(\mathbb{R}^n; R) & \longrightarrow & \tilde{H}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) \cdots \end{array}$$

其中每行均为正合列, 从而由五引理可知 Φ 是同构, 结合习题 31 证明中所得即知

$$\begin{aligned} H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) &\simeq \tilde{H}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) \simeq \tilde{H}_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}; R) \simeq \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}; R) \\ &= \begin{cases} R, & q = n; \\ 0, & q \neq n. \end{cases} \end{aligned} \quad \square$$

习题 35 计算 $H_q(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^n \setminus \{0\}; R)$, 其中上半空间 $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$.

解答 由链复形短正合列

$$0 \rightarrow \left(\mathbb{H}^n \setminus \{0\}, \partial \mathbb{H}^n \setminus \{0\} \right) \rightarrow \left(\mathbb{H}^n, \partial \mathbb{H}^n \right) \rightarrow \left(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^n \setminus \{0\}, \partial \mathbb{H}^n, \mathbb{H}^n \setminus \{0\} \right) \rightarrow 0$$

证明 考虑交换图表

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & S_q(X_2 \cap Y_2; R) & \longrightarrow & S_q(X_1 \cap Y_1; R) & \longrightarrow & S_q(X_1 \cap Y_1, X_2 \cap Y_2; R) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & S_q(X_2; R) \oplus S_q(Y_2; R) & \longrightarrow & S_q(X_1; R) \oplus S_q(Y_1; R) & \longrightarrow & S_q(X_1, X_2; R) \oplus S_q(Y_1, Y_2; R) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & S_q(X_2; R) + S_q(Y_2; R) & \longrightarrow & S_q(X_1; R) + S_q(Y_1; R) & \longrightarrow & \frac{S_q(X_1; R) + S_q(Y_1; R)}{S_q(X_2; R) + S_q(Y_2; R)} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

图中每一行均为正合的, 且由 (绝对同调的)Marer–Vietoris 序列可知左边两列中间两个箭头的复合均为零映射, 从而左边两列均为正合链复形. 而最右边一列的中间两个箭头由其左边一列对应的箭头诱导, 从而它们的复合也为零映射, 因此这一列构成链复形. 于是这三列是三个链复形, 这个链复形正合列诱导同调群的长正合列, 其中每相邻三项中有两项为 0, 从而其余同调群也为 0, 即图中最右边一列的同调群全部为 0, 这说明这一列也是正合链复形. 这个链复形的短正合列诱导同调群的长正合列

$$\begin{array}{c}
 H_q(X_1 \cup Y_1, X_2 \cup Y_2; R) \\
 \parallel \text{五引理} \\
 \cdots H_q(X_1 \cap Y_1, X_2 \cap Y_2; R) \longrightarrow H_q(X_1, X_2; R) \oplus H_q(Y_1, Y_2; R) \longrightarrow H_q\left(\frac{S(X_1; R) + S(Y_1; R)}{S(X_2; R) + S(Y_2; R)}\right) \\
 \cdots \rightarrow H_{q-1}(X_1 \cap Y_1, X_2 \cap Y_2; R) \cdots
 \end{array}$$

□

习题 38 设 X 为 n 维无边流形, $X_R = \{(x, \alpha_x) : x \in X, \alpha_x \in H_n(X, X - x; R)\}$. 对任意 X 中开集 U 与 $\alpha_U \in H_n(X, X - U; R)$, 定义

$$\langle U, \alpha_U \rangle = \{(y, \alpha_y) : y \in U, \alpha_y = (j_{U,y})_* \alpha_U\}.$$

证明: 所有这些 $\langle U, \alpha_U \rangle$ 构成 X_R 的一个拓扑基.

证明 所有这些 $\langle U, \alpha_U \rangle$ 的并显然是 X_R . 若 $\langle U, \alpha_U \rangle \cap \langle V, \alpha_V \rangle \neq \emptyset$, 取 $(x, \alpha) \in \langle U, \alpha_U \rangle \cap \langle V, \alpha_V \rangle$. 由连续延拓性, 存在 x 的开邻域 $U_x \subset U \cap V$, 使得对任意 $y \in U_x$, $(j_{U_x,y})_* : H_n(X, X - U_x; R) \rightarrow H_n(X, X - \{y\}; R)$ 为同构. 令 $\alpha_{U_x} = (j_{U,U_x})_* \alpha_U$, 由交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 \boxed{\alpha_U} & (X, X - U) & & (X, X - V) & \boxed{\alpha_V} \\
 & \searrow^{j_{U,U_x}} & & \swarrow_{j_{V,U_x}} & \\
 & & \boxed{\alpha_{U_x}} & & \\
 & & (X, X - U_x) & & \\
 & \searrow^{j_{U,x}} & \downarrow^{j_{U_x,x}} & \swarrow_{j_{V,x}} & \\
 & & (X, X - \{x\}) & & \\
 & & \boxed{\alpha_x} & &
 \end{array}$$

可知 $\alpha_{U_x} = (j_{U,U_x})_* \alpha_U = (j_{U_x,x})_*^{-1} \alpha_x = (j_{V,U_x})_* \alpha_V$. 因此对任意 $y \in U_x$, 有

$$(j_{U_x,y})_* \alpha_{U_x} = (j_{U,y})_* \alpha_U = (j_{V,y})_* \alpha_V,$$

这说明

$$(j_{U_x,y})_* \alpha_{U_x} = (j_{U,y})_* \alpha_U = (j_{V,y})_* \alpha_V.$$

即 $\langle U_x, \alpha_{U_x} \rangle \subset \langle U, \alpha_U \rangle \cap \langle V, \alpha_V \rangle$. 故所有这些 $\langle U, \alpha_U \rangle$ 构成 X_R 的一个拓扑基. \square

习题 39 设 X 为 n 维无边流形, $X_1 \subset X$. 固定 $[c] \in H_n(X, X - X_1; R)$, 则

$$(j_{X_1,\cdot})_* [c] : X_1 \rightarrow X_R, \quad x \mapsto (x, (j_{X_1,x})_* [c])$$

是 $\Gamma(X_1, X_R)$ 中的一个截面.

证明 只需证 $x \mapsto (j_{X_1,x})_* [c]$ 是连续映射. 选取 $[c]$ 的代表元 $c \in S_n(X; R)$, 则 $\partial c \in S_{n-1}(X - X_1; R)$. 由紧支集公理, 存在紧集 $W \subset X - X_1$, 使得 $\partial c \in S_{n-1}(W; R)$. 令 $U = X - W$, 则 U 为 X 中开集, 且 $U \supset X_1$, $\partial c \in S_{n-1}(X - U; R)$. 取 $[c]_U \in H_n(X, X - U; R)$ 使得 $(j_{U,X_1})_* [c]_U = [c]$. 对任意 $x \in X_1$, 选取 x 的开邻域 $U_x \subset U$, 使得对任意 $y \in U_x$, $(j_{U_x,y})_*$ 为同构. 对任意 $y \in U_x \cap X_1$, 有交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (X, X - U_x) & & \\
 & \nearrow & \uparrow j_{U,U_x} & \searrow & \\
 & & (X, X - U) \boxed{[c]_U} & & \\
 & \nwarrow & \downarrow & \nearrow & \\
 (X, X - x) & \xleftarrow{j_{U,x}} & (X, X - X_1) & \xrightarrow{j_{U_x,y}} & (X, X - y) \\
 & \nwarrow & \downarrow [c] & \nearrow & \\
 & & & &
 \end{array}$$

由于

$$(j_{X_1,x})_* [c] = (j_{U,x})_* [c]_U = (j_{U_x,x})_* (j_{U,U_x})_* [c]_U.$$

对任意 $y \in U_x \cap X_1$, 有

$$(j_{X_1,y})_* [c] = (j_{U_x,y})_* (j_{U,U_x})_* [c]_U = (j_{U_x,y})_* (j_{U_x,x})_*^{-1} (j_{X_1,x})_* [c],$$

这满足定义中的转移关系, 故映射 $x \mapsto (j_{X_1,x})_* [c]$ 连续. \square

习题 40 设 X, Y 是 n 维连通 \mathbb{Z} -定向光滑紧无边流形, $f : X \rightarrow Y$ 为光滑映射, y 是 f 的正则值, $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_l\}$. 证明:

$$\deg(f) = \sum_{k=1}^l \text{loc-deg}_{x_k}(f).$$

证明 取 y 的开邻域 V 使得 $f^{-1}(V) = \bigsqcup_{k=1}^l U_k$, 其中 U_k 为 x_k 的邻域, 且这些 U_k 两两不交, $f|_{U_k}$ 为微分同胚. 由于 $X - \bigsqcup_{k=1}^l U_k = X - \bigsqcup_{k=1}^l U_k \subset \text{Int}(X - \{f^{-1}(y)\})$, $\overline{X - U_k} = X - U_k \subset \text{Int}(X - \{x_k\})$, 我们

有交换图

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(X, X - \{f^{-1}(y)\}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f_*} & H_n(Y, Y - \{y\}; \mathbb{Z}) \\
 \uparrow \wr \text{切除} & & \uparrow \\
 H_n\left(\bigsqcup_{k=1}^l U_k, \bigsqcup_{k=1}^l (U_k - \{x_k\}); \mathbb{Z}\right) & & \\
 \parallel & & \\
 \bigoplus_{k=1}^l H_n(U_k, U_k - \{x_k\}; \mathbb{Z}) & & \bigoplus_{k=1}^l f_* \\
 \downarrow \wr \text{切除} & & \uparrow \\
 \bigoplus_{k=1}^l H_n(X, X - \{x_k\}; \mathbb{Z}) & &
 \end{array}$$

由此可得

$$\deg(f) = \sum_{k=1}^l \text{loc-deg}_{x_k}(f).$$

□

习题 41 设 X, Y 是 Hausdorff 拓扑空间, $X_1 \subset X$, $f: X_1 \rightarrow Y$ 连续. 假设 X_1 是 X 中开邻域 U 的强形变收缩核, 证明: $Y \subset X \cup_f Y$ 也是某个开邻域的强形变收缩核.

证明 由于 $U \sqcup Y$ 是 $X \sqcup Y$ 中开集, 而由 $X_1 \subset U$ 可得 $\pi^{-1}(\pi(U \sqcup Y)) = U \sqcup Y$, 因此 $\pi(U \sqcup Y)$ 是 $X \cup_f Y$ 中开集, 它是 $\pi(Y) \simeq Y$ 的开邻域. 由于 X_1 是 U 的强形变收缩核, 存在连续映射 $H: [0, 1] \times U \rightarrow U$ 使得

$$H(0, u) = u, \quad H(1, u) \in X_1, \quad H(t, x) = x, \quad \forall u \in U, \forall x \in X_1, \forall t \in [0, 1].$$

定义映射

$$\tilde{H}: [0, 1] \times (U \sqcup Y) \rightarrow U \sqcup Y,$$

使得

$$\tilde{H}(t, y) = y, \quad \tilde{H}(t, u) = H(t, u), \quad \forall y \in Y, \forall u \in U, \forall t \in [0, 1].$$

由无交并的拓扑可知 \tilde{H} 连续. 由于 $\tilde{H}(t, \cdot)$ 在 X_1 与 Y 上均为恒等映射, 它可诱导伦移

$$\hat{H}: [0, 1] \times \pi(U \sqcup Y) \rightarrow \pi(U \sqcup Y),$$

且 $\hat{H}(t, \cdot)$ 在 $\pi(Y) \simeq Y$ 上为恒等映射, $\hat{H}(1, \cdot)$ 的像在 $\pi(Y) \simeq Y$ 中. 故 $Y \subset X \cup_f Y$ 是其开邻域 $\pi(U \sqcup Y)$ 的强形变收缩核. □

习题 42 设 X 为 CW 复形, 证明: $f: X \rightarrow Y$ 连续当且仅当 f 限制到 X 的每个闭胞腔上是连续的.

证明 利用 X 中开集的刻画可知

$$\begin{aligned}
 f: X \rightarrow Y \text{ 连续} & \iff f^{-1}(U) \text{ 为 } X \text{ 中开集}, \forall U \text{ 为 } Y \text{ 中开集} \\
 \iff \underbrace{(\pi^j)^{-1}(f^{-1}(U) \cap X^j) \cap D_i^j}_{= ((f \circ \pi^j)|_{D_i^j})^{-1}(U)} & \text{ 为 } D_i^j \text{ 中开集}, \forall U \text{ 为 } Y \text{ 中开集}, \forall 1 \leq j \leq p+1, \forall i \in I_j \\
 \iff (f \circ \pi^j)|_{D_i^j} \text{ 连续}, \forall 1 \leq j \leq p+1, \forall i \in I_j. & \quad \square
 \end{aligned}$$

习题 43 给出 $\mathbb{C}P^n$ 的胞腔分解.

解答 记 $\mathbb{D}^{2n} = \{z = (z_0, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n : |z| \leq 1\}$ 为 $2n$ 维闭胞腔, $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ 为商映射. 定义连续映射

$$h : \mathbb{D}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad (z_0, \dots, z_{n-1}) \mapsto (z_0, \dots, z_{n-1}, \sqrt{1 - |z|^2}).$$

考虑复合映射

$$f = \pi \circ h : \mathbb{D}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^n, \quad (z_0, \dots, z_{n-1}) \mapsto [z_0 : \dots : z_{n-1} : \sqrt{1 - |z|^2}]$$

及其在边界 $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{D}^{2n}$ 上的限制映射

$$g = f|_{\mathbb{S}^{2n-1}} : \mathbb{S}^{2n-1} \rightarrow \iota(\mathbb{C}P^{n-1}), \quad (z_0, \dots, z_{n-1}) \mapsto [z_0 : \dots : z_{n-1} : 0],$$

其中

$$\iota : \mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^n, \quad [z_0 : \dots : z_{n-1}] \mapsto [z_0 : \dots : z_{n-1} : 0]$$

为典范嵌入. 下证

$$f|_{\text{Int}\mathbb{D}^{2n}} : \text{Int}\mathbb{D}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^n \setminus \iota(\mathbb{C}P^{n-1}) = \{[w_0 : \dots : w_{n-1} : 1] \in \mathbb{C}P^n\}$$

为双射. 事实上, 假设 $f((z_0, \dots, z_{n-1})) = [w_0 : \dots : w_{n-1} : 1]$, 则

$$(z_0, \dots, z_{n-1}, \sqrt{1 - |z|^2}) = \sqrt{1 - |z|^2}(w_0, \dots, w_{n-1}, 1).$$

记 $w = (w_0, \dots, w_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, 则由上式可解得

$$|z|^2 = (1 - |z|^2)|w|^2 \implies |z|^2 = \frac{|w|^2}{1 + |w|^2} < 1 \implies z_k = \frac{1}{\sqrt{1 + |w|^2}} w_k, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

这就说明了 $f|_{\text{Int}\mathbb{D}^{2n}}$ 为双射. 由于 $\mathbb{C}P^n$ 是 Hausdorff 拓扑空间, \mathbb{D}^{2n} 是紧空间, $f|_{\mathbb{D}^{2n} \setminus \mathbb{S}^{2n-1}} : \mathbb{D}^{2n} \setminus \mathbb{S}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^n \setminus \iota(\mathbb{C}P^{n-1})$ 为双射, 我们得到同胚 $\mathbb{C}P^n \simeq \mathbb{D}^{2n} \cup_g \iota(\mathbb{C}P^{n-1})$. 故 $\mathbb{C}P^n$ 有胞腔分解

$$\mathbb{C}P^n = e^{2n} \cup e^{2(n-1)} \cup \dots \cup e^2 \cup e^0. \quad \square$$

习题 44 计算 $\mathbb{C}P^n$ 的同调群.

解答 由习题 43 结果可知 $\mathbb{C}P^n$ 的胞腔链复形为

$$\begin{array}{ccccccccccc} & W_{2n+1} & & W_{2n} & & W_{2n-1} & & & & W_2 & & W_1 & & W_0 \\ & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由此可见所有边缘算子为零. 故 $\mathbb{C}P^n$ 的同调群为

$$H_p(\mathbb{C}P^n; R) \simeq \begin{cases} R, & p = 0, 2, \dots, 2n, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad \square$$

习题 45 给出 $\mathbb{R}P^n$ 的胞腔分解.

解答 记 $\mathbb{D}^n = \{x = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ 为 n 为闭胞腔, $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ 为商映射. 定义连续映射

$$h : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad (x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1}, \sqrt{1 - \|x\|^2}).$$

考虑复合映射

$$f = \pi \circ h : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n, \quad (x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto [x_0 : \dots : x_{n-1} : \sqrt{1 - \|x\|^2}]$$

及其在边界 $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{D}^n$ 上的限制映射

$$g = f|_{\mathbb{S}^{n-1}} : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \iota(\mathbb{R}P^{n-1}), \quad (x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto [x_0 : \dots : x_{n-1} : 0],$$

其中

$$\iota : \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^n, \quad [x_0 : \dots : x_{n-1}] \mapsto [x_0 : \dots : x_{n-1} : 0]$$

为典范嵌入. 下证

$$f|_{\text{Int}\mathbb{D}^n} : \text{Int}\mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n \setminus \iota(\mathbb{R}P^{n-1}) = \{[w_0 : \dots : w_{n-1} : 1] \in \mathbb{R}P^n\}$$

为双射. 事实上, 假设 $f((x_0, \dots, x_{n-1})) = [y_0 : \dots : y_{n-1} : 1]$, 则

$$(x_0, \dots, x_{n-1}, \sqrt{1 - \|x\|^2}) = \sqrt{1 - \|x\|^2}(y_0, \dots, y_{n-1}, 1).$$

记 $y = (y_0, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, 则由上式可解得

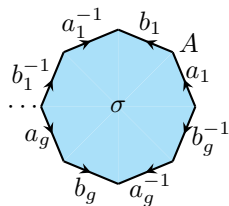
$$\|x\|^2 = (1 - \|x\|^2)\|y\|^2 \implies \|x\|^2 = \frac{\|y\|^2}{1 + \|y\|^2} < 1 \implies x_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \|y\|^2}} y_k, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

这就说明了 $f|_{\text{Int}\mathbb{D}^n}$ 为双射. 由于 $\mathbb{R}P^n$ 是 Hausdorff 拓扑空间, \mathbb{D}^n 是紧空间, $f|_{\mathbb{D}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}} : \mathbb{D}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^n \setminus \iota(\mathbb{R}P^{n-1})$ 为双射, 我们得到同胚 $\mathbb{R}P^n \simeq \mathbb{D}^n \cup_g \iota(\mathbb{R}P^{n-1})$. 故 $\mathbb{R}P^n$ 有胞腔分解

$$\mathbb{R}P^n = e^n \cup e^{n-1} \cup \dots \cup e^1 \cup e^0. \quad \square$$

习题 46 计算 Σ_g 的同调群.

解答 由 Σ_g 的多边形表示



可知 Σ 的胞腔分解为 1 个 2 维胞腔、 $2g$ 个 1 维胞腔和 1

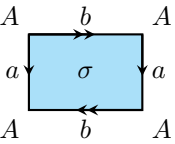
个 0 维胞腔. 因此 Σ_g 的胞腔链复形为

$$\begin{array}{ccccccc} W_2 & & W_1 & & W_0 & & \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ R\sigma & \rightarrow & Ra_1 \oplus Rb_1 \oplus \cdots \oplus Ra_g \oplus Rb_g & \rightarrow & RA & \rightarrow & 0 \\ \\ \sigma & \longmapsto & 0 & & & & \\ & & & & a_i & \longmapsto & 0 \\ & & & & b_i & \longmapsto & 0 \end{array}$$

故 Σ_g 的同调群为

$$H_2(\Sigma_g; R) = R\sigma \simeq R, \quad H_1(\Sigma_g; R) = R^{2g}, \quad H_0(\Sigma_g; R) = RA \simeq R. \quad \square$$

习题 47 计算 Klein 瓶的同调群.

解答 由 Klein 瓶 K 的多边形表示  可知 K 的胞腔分解为 1 个 2 维胞腔、2 个 1 维胞腔和 1 个 0 维胞腔. 因此 K 的胞腔链复形为

$$\begin{array}{ccccccc} W_2 & & W_1 & & W_0 & & \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ R\sigma & \rightarrow & Ra \oplus Rb & \rightarrow & RA & \rightarrow & 0 \\ \\ \sigma & \longmapsto & 2b & & & & \\ & & & & a & \longmapsto & 0 \\ & & & & b & \longmapsto & 0 \end{array}$$

故 K 的同调群为

$$\begin{aligned} H_2(K; R) &= \{r\sigma : r \in R, 2r = 0\} \simeq \{r \in R : 2r = 0\}, \\ H_1(K; R) &= (Ra \oplus Rb)/2Rb \simeq R \oplus (R/2R), \\ H_0(K; R) &= RA \simeq R. \end{aligned} \quad \square$$

习题 48 计算透镜空间 $L_m(\ell_1, \ell_2) = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_m$ 的同调群.

解答 根据定义, $(\ell_2, m) = 1$, 由 Bézout 定理, 存在 $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ 使得 $mq_1 + \ell_2q_2 = 1$. 观察到

$$\begin{aligned} e^{\frac{2\pi i}{m}q_2} \cdot (z_1, z_2) &= \left(e^{\frac{2\pi i}{m}q_2\ell_1} z_1, e^{\frac{2\pi i}{m}q_2\ell_2} z_2 \right) = \left(e^{\frac{2\pi i}{m}q_2\ell_1} z_1, e^{\frac{2\pi i}{m}(1-mq_1)} z_2 \right) \\ &= \left(e^{\frac{2\pi i}{m}q_2\ell_1} z_1, e^{\frac{2\pi i}{m}} z_2 \right), \end{aligned}$$

因此

$$L_m(\ell_1, \ell_2) = L_m(\ell_1q_2, 1).$$

由 $(\ell_1, m) = 1$ 与 $(q_2, m) = 1$ 可得 $(\ell_1 q_2, m) = 1$, 故通过令 $\ell = \ell_1 q_2$ 可将所考虑的轨道空间简化为

$$L_m(\ell, 1), \quad 1 \leq \ell \leq m, (\ell, m) = 1. \quad (48-1)$$

记圆周 $C = \{(0, z_2) \in \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2\}$, 并取 C 上 m 等分点 $v_j = e^{\frac{2\pi i}{m}j}$ (下标 $0 \leq j \leq m-1$ 在模 m 意义下取), 并将 v_j 与 v_{j+1} 之间的劣弧称为第 j 条边. 对每个 j , 令

$$D_j^2 = \{\cos \theta(0, v_j) + \sin \theta(z, 0) : z \in \mathbb{S}^1, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]\} = \{(\sin \theta z, \cos \theta v_j) : z \in \mathbb{S}^1, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]\},$$

$$D_j^3 = \{(\sin \theta z, \cos \theta v_j) : z \in \mathbb{S}^1, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], v \in \text{第 } j \text{ 条边}\}.$$

根据 (48-1), \mathbb{Z}_m -作用恰将 D_j^2 映为 D_{j+1}^2 , 将 D_j^3 映为 D_{j+1}^3 , 因此我们可选取其中一个基本区域, 如 D_j^2 与 D_{j+1}^2 所夹区域, 作为代表元 (如图 1 中、右两图所示), 并考察其边界的粘贴情况.

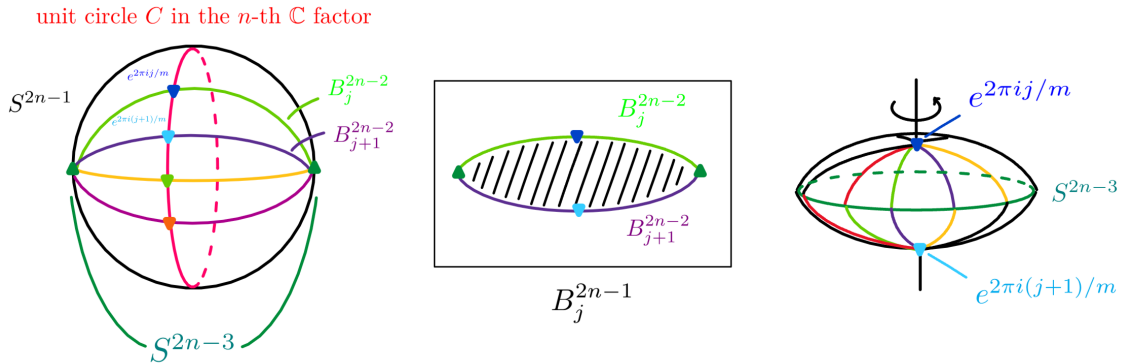


图 1: 透镜空间 (引自 <https://math.stackexchange.com/a/3541172/1295235>)

再次由 (48-1) 可知, 代表元两个边界圆盘的对应关系由“水平方向的镜面反射与绕图 1 中轴旋转 $\frac{2\pi\ell}{m}$ 的复合”给出, 其中 $\ell = \ell_1 q_2$ 如前所述. 由此可知 $L_m(\ell_1, \ell_2) = L_m(\ell, 1)$ 的胞腔分解为 3, 2, 1, 0 维胞腔各 1 个, 且由图 1 可知 $L_m(\ell_1, \ell_2)$ 的胞腔链复形为

$$\begin{array}{ccccccc} W_3 & & W_2 & & W_1 & & W_0 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ Re^3 & \longrightarrow & Re^2 & \longrightarrow & Re^1 & \longrightarrow & Re^0 \longrightarrow 0 \\ e^3 & \longmapsto & 0 & & & & \\ & & & & e^2 & \longmapsto & me^1 \\ & & & & & & \\ & & & & e^1 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

故 $L_m(\ell_1, \ell_2)$ 的同调群为

$$\begin{aligned} H_3(L_m(\ell_1, \ell_2)) &= Re^3 \simeq R, \\ H_2(L_m(\ell_1, \ell_2)) &= \{re^2 : r \in R, mr = 0\} = \{r \in R : mr = 0\}, \\ H_1(L_m(\ell_1, \ell_2)) &= Re^1/mRe^1 \simeq R/mR, \\ H_0(L_m(\ell_1, \ell_2)) &= Re^0 \simeq R. \end{aligned} \quad \square$$

习题 49 验证 Kronecker 映射 k 满足自然性: 设有链映射 $\phi : (C, \partial^C) \rightarrow (D, \partial^D)$, 则下图交换:

$$\begin{array}{ccc} H^p(D; N) & \xrightarrow{k} & \text{Hom}_R(H_p(D), N) \\ \phi^* \downarrow & & \downarrow (\phi_*)^\# \\ H^p(C; N) & \xrightarrow{k} & \text{Hom}_R(H_p(C), N) \end{array}$$

证明 对任意 $[z^p] \in H^p(D; N)$, 取代表元 $z^p \in \text{Hom}_R(D_p, N)$, 并取 $\phi^*[z^p] \in H^p(C; N)$ 的代表元 $\phi^*z^p \in \text{Hom}_R(C_p, N)$. 对任意 $[x_p] \in H_p(C)$, 取代表元 $x_p \in C_p$, 并取 $\phi_*[x_p] \in H_p(D)$ 的代表元 $\phi x_p \in D_p$. 我们有

$$\begin{aligned} \langle k\phi^*[z^p], [x_p] \rangle &= \langle \phi^*z^p, x_p \rangle = \langle z^p, \phi x_p \rangle, \\ \langle (\phi_*)^\#k[z^p], [x_p] \rangle &= \langle k[z^p], \phi_*[x_p] \rangle = \langle z^p, \phi x_p \rangle, \end{aligned}$$

故 $k \circ \phi^* = (\phi_*)^\# \circ k$. □

习题 50 考虑 Moore 空间 $X = M(\mathbb{Z}_m, n) = \mathbb{D}^{n+1} \cup_g \mathbb{S}^n$, 其中粘贴映射 $g : \text{Bd } \mathbb{D}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^n$ 满足 $\deg(g) = m$. 设 $f : X \rightarrow X/\mathbb{S}^n$ 为商映射.

- (1) 计算 $H_p(X/\mathbb{S}^n; \mathbb{Z})$.
- (2) 计算 $H_p(X; \mathbb{Z})$.
- (3) 验证当 $p = n + 1$ 时, 以下万有系数定理的自然性图表不是典范可裂的:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(H_n(X/\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^{n+1}(X/\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{n+1}(X/\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(f_*, \mathbb{Z}) & & \downarrow f^* & & \downarrow (f_*)^\# \\ 0 & \rightarrow & \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(H_n(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^{n+1}(X; \mathbb{Z}) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{n+1}(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \end{array}$$

解答 (1) 由构造知 $X/\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^{n+1}$, 因此由习题 33 结果知

$$H_p(X/\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}) \simeq H_p(\mathbb{S}^{n+1}; \mathbb{Z}) \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 0 \text{ 或 } n + 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

- (2) \mathbb{D}^{n+1} 提供 $n + 1$ 维胞腔, \mathbb{S}^n 提供 n 维胞腔和 0 维胞腔, 因此 X 的胞腔分解为 e^{n+1}, e^n, e^0 . 由 $\deg(g) = m$ 可知 X 的胞腔链复形为

$$\begin{array}{ccccccccc} & & W_{n+2} & & W_{n+1} & & W_n & & W_{n-1} & & W_0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}e^{n+1} & \rightarrow & \mathbb{Z}e^n & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \rightarrow \mathbb{Z}e^0 \rightarrow 0 \\ & & & & e^{n+1} \mapsto me^n & & & & & & \\ & & & & & & e^n \mapsto 0 & & & & \\ & & & & & & & & & & e^0 \mapsto 0 \end{array}$$

故 X 的同调群为

$$H_p(X; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_m, & p = n, \\ \mathbb{Z}, & p = 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(3) 由 (1)(2) 知

$$H_n(X/S^n; \mathbb{Z}) = 0, \quad H_{n+1}(X/S^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_n(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_m, \quad H_{n+1}(X; \mathbb{Z}) = 0.$$

于是可求得题干中图表的第 2, 4 列为

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(H_n(X/S^n; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) &= \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(0, \mathbb{Z}) = 0, & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{n+1}(X/S^n; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) &= \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, \\ \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(H_n(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) &= \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_m, & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{n+1}(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) &= \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(0, \mathbb{Z}) = 0. \end{aligned}$$

由此可知 $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}(f_*, \mathbb{Z})$ 为零映射. 此外, 由万有系数定理, 上述图表中两行均为可裂的短正合列, 因此

$$H^{n+1}(X/S^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, \quad H^{n+1}(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_m.$$

由 (2) 知 $H_{n+1}(X, \mathbb{Z}) = 0$, 因此 f_* 为零映射, 进而 $(f_*)^\#$ 亦为零映射.

另一方面, 由上同调的正合性公理, 有长正合列

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & H^{n+1}(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}) & \longleftarrow & H^{n+1}(X; \mathbb{Z}) & \longleftarrow & H^{n+1}(X, \mathbb{S}^n; \mathbb{Z}) & \longleftarrow & \cdots \\ & & & & \swarrow f^* & & \uparrow \wr & & \\ & & & & & & H^{n+1}(X/S^n; \mathbb{Z}) & & \end{array}$$

也即

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z}_m \xleftarrow{f^*} \mathbb{Z}$$

故 f^* 为满射. 题干中万有系数定理的自然性图表为:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow f^* & & \downarrow 0 & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_m & \longrightarrow & \mathbb{Z}_m & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(虚线箭头表示由可裂性给出的映射)

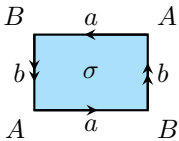
这里用虚线画出了由可裂性给出的两个映射. 假如它们是典范的, 则如下方块交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z} \\ f^* \downarrow & & \downarrow 0 \\ \mathbb{Z}_m & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(虚线箭头表示交换性)

但这是不可能的, 因为上方的虚线箭头非平凡且左侧的 f^* 为满射, 而右侧为零映射. □

习题 51 计算 $H^p(\mathbb{R}P^2; N)$.

解答 由 $\mathbb{R}P^2$ 的多边形表示  可知 $\mathbb{R}P^2$ 的胞腔分解为 1 个 2 维胞腔、2 个 1 维胞腔和 2 个 0 维胞腔. 因此 $\mathbb{R}P^2$ 的胞腔链复形为

$$\begin{array}{ccccc} W_2 & & W_1 & & W_0 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ R\sigma & \longrightarrow & Ra \oplus Rb & \longrightarrow & RA \oplus RB \longrightarrow 0 \\ \\ \sigma & \longmapsto & 2(a+b) & & \\ \\ & & a & \longmapsto & B-A \\ & & b & \longmapsto & A-B \end{array}$$

用 $\text{Hom}_R(\cdot, N)$ 函子作用后, 由

$$\begin{aligned} \langle \delta\varphi, a \rangle &= \langle -\partial^\# \varphi, a \rangle = -\langle \varphi, \partial a \rangle = \varphi(A-B) = \varphi(A) - \varphi(B), \quad \forall \varphi \in \text{Hom}_R(W_0, N), \\ \langle \delta\varphi, b \rangle &= \langle -\partial^\# \varphi, b \rangle = -\langle \varphi, \partial b \rangle = \varphi(B-A) = \varphi(B) - \varphi(A), \quad \forall \varphi \in \text{Hom}_R(W_0, N), \\ \langle \delta\psi, \sigma \rangle &= \langle \partial^\# \psi, \sigma \rangle = \langle \psi, \partial \sigma \rangle = \psi(2(a+b)) = 2\psi(a+b), \quad \forall \psi \in \text{Hom}_R(W_1, N) \end{aligned}$$

可得上链复形

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{Hom}_R(W_0, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(W_1, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(W_2, N) \longrightarrow 0 \\ (\varphi(A), \varphi(B)) &\longmapsto (\varphi(A) - \varphi(B), \varphi(B) - \varphi(A)) \\ (\psi(a), \psi(b)) &\longmapsto 2\psi(a+b) \end{aligned}$$

故 $\mathbb{R}P^2$ 的上同调模为

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{R}P^2; N) &= \{\varphi \in \text{Hom}_R(W_0, N) : \varphi(A) = \varphi(B)\} \simeq N, \\ H^1(\mathbb{R}P^2; N) &= \frac{\{\psi \in \text{Hom}_R(W_1, N) : 2[\psi(a) + \psi(b)] = 0\}}{\{\psi \in \text{Hom}_R(W_1, N) : \psi(a) + \psi(b) = 0\}} \simeq \{n \in N : 2n = 0\}, \\ H^2(\mathbb{R}P^2; N) &= \text{Hom}_R(W_2, N) / 2\text{Hom}_R(W_2, N) \simeq N/2N. \end{aligned} \quad \square$$

习题 52 计算 $H^p(\Sigma_g; N)$.

解答 习题 46 中已经计算出 Σ_g 的胞腔链复形, 用 $\text{Hom}_R(\cdot, N)$ 函子作用后, 由

$$\begin{aligned} \langle \delta\varphi, a_i \rangle &= \langle -\partial^\# \varphi, a_i \rangle = -\langle \varphi, \partial a_i \rangle = -\varphi(0) = 0, \quad \forall \varphi \in \text{Hom}_R(W_0, N), 1 \leq i \leq g, \\ \langle \delta\varphi, b_i \rangle &= \langle -\partial^\# \varphi, b_i \rangle = -\langle \varphi, \partial b_i \rangle = -\varphi(0) = 0, \quad \forall \varphi \in \text{Hom}_R(W_0, N), 1 \leq i \leq g, \\ \langle \delta\psi, \sigma \rangle &= \langle \partial^\# \psi, \sigma \rangle = \langle \psi, \partial \sigma \rangle = \psi(0) = 0, \quad \forall \psi \in \text{Hom}_R(W_1, N) \end{aligned}$$

可得上链复形

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(W_0, N) \xrightarrow{0} \text{Hom}_R(W_1, N) \xrightarrow{0} \text{Hom}_R(W_2, N) \longrightarrow 0$$

故 Σ_g 的上同调模为

$$\begin{aligned} H^0(\Sigma_g; N) &= \text{Hom}_R(W_0, N) \simeq N, \\ H^1(\Sigma_g; N) &= \text{Hom}_R(W_1, N) \simeq \underbrace{N \oplus \cdots \oplus N}_{2g}, \\ H^2(\Sigma_g; N) &= \text{Hom}_R(W_2, N) \simeq N. \end{aligned}$$

□

习题 53 验证奇异上链的上积满足上边缘公式:

$$\delta(\alpha \cup \beta) = (\delta\alpha) \cup \beta + (-1)^p \alpha \cup (\delta\beta), \quad \forall \alpha \in S^p(X; R), \forall \beta \in S^q(X; R).$$

证明 对任意 $p+q+1$ 维奇异单形 $\sigma: \Delta_{p+q+1} \rightarrow X$, 我们有

$$\begin{aligned} \langle \delta(\alpha \cup \beta), \sigma \rangle &= \langle (-1)^{p+q+1} \partial^\#(\alpha \cup \beta), \sigma \rangle = (-1)^{p+q+1} \langle \alpha \cup \beta, \partial\sigma \rangle \\ &= (-1)^{p+q+1} \sum_{i=0}^{p+q+1} (-1)^i \langle \alpha \cup \beta, \sigma \circ \ell(e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{p+q+1}) \rangle \\ &= (-1)^{p+q+1} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i (-1)^{pq} \langle \alpha, \sigma \circ \ell(e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{p+1}) \rangle \langle \beta, \sigma \circ \ell(e_{p+1}, \dots, e_{p+q+1}) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=p+1}^{p+q+1} (-1)^i (-1)^{pq} \langle \alpha, \sigma \circ \ell(e_0, \dots, e_p) \rangle \langle \beta, \sigma \circ \ell(e_p, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{p+q+1}) \rangle \right) \\ &= (-1)^{p+q+pq+1} \left(\left\langle \alpha, \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma \circ \ell(e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{p+1}) \right\rangle \langle \beta, \sigma \circ \ell(e_{p+1}, \dots, e_{p+q+1}) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \alpha, \sigma \circ \ell(e_0, \dots, e_p) \rangle \left\langle \beta, \sum_{i=p+1}^{p+q+1} (-1)^i \sigma \circ \ell(e_p, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{p+q+1}) \right\rangle \right) \\ &= (-1)^{p+q+pq+1} (\langle \alpha, \partial_{(p+1)}\sigma \rangle - (-1)^{p+1} \langle \alpha, \sigma \rangle) \langle \beta, \sigma \rangle + (-1)^p \langle \alpha, \sigma \rangle \langle \beta, \partial(\sigma_{q+1}) - \sigma_q \rangle \\ &= (-1)^{(p+1)(q+1)} (\langle \alpha, \partial_{(p+1)}\sigma \rangle \langle \beta, \sigma_q \rangle + (-1)^p \langle \alpha, \sigma \rangle \langle \beta, \sigma_q \rangle \\ &\quad + (-1)^p \langle \alpha, \sigma \rangle \langle \beta, \partial(\sigma_{q+1}) \rangle - (-1)^p \langle \alpha, \sigma \rangle \langle \beta, \sigma_q \rangle) \\ &= (-1)^{(p+1)(q+1)} [\langle \alpha, \partial_{(p+1)}\sigma \rangle \langle \beta, \sigma_q \rangle + (-1)^p \langle \alpha, \sigma \rangle \langle \beta, \partial(\sigma_{q+1}) \rangle] \\ &= (-1)^{(p+1)q} (-1)^{p+1} \langle \alpha, \partial_{(p+1)}\sigma \rangle \langle \beta, \sigma_q \rangle + (-1)^p (-1)^{p(q+1)} \langle \alpha, \sigma \rangle (-1)^{q+1} \langle \beta, \partial(\sigma_{q+1}) \rangle \\ &= (-1)^{(p+1)q} \langle (-1)^{p+1} \partial^\# \alpha_{p+1} \sigma \rangle \langle \beta, \sigma_q \rangle + (-1)^p (-1)^{p(q+1)} \langle \alpha, \sigma \rangle \langle (-1)^{q+1} \partial^\# \beta, \sigma_{q+1} \rangle \\ &= \langle (\delta\alpha) \cup \beta, \sigma \rangle + (-1)^p \langle \alpha \cup (\delta\beta), \sigma \rangle. \end{aligned}$$

由 σ 的任意性即得

$$\delta(\alpha \cup \beta) = (\delta\alpha) \cup \beta + (-1)^p \alpha \cup (\delta\beta).$$

□

习题 54 计算 $X = S^1 \vee S^1 \vee S^2$ 的上同调模及环结构.

解答 X 的胞腔分解为 1 个 2 维胞腔、2 个 1 维胞腔和 1 个 0 维胞腔, 胞腔链复形为

$$\begin{array}{ccccccc} W_2 & & W_1 & & W_0 & & \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ R & \xrightarrow{0} & R \oplus R & \xrightarrow{0} & R & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

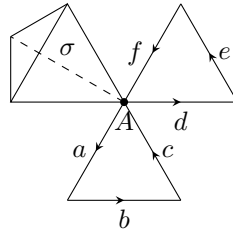
故 X 的同调群为

$$H_2(X; R) = R, \quad H_1(X; R) = R \oplus R, \quad H_0(X; R) = R.$$

它们均是自由的, 因此由万有系数定理可得 X 的上同调模:

$$\begin{aligned} H^2(X; N) &\simeq \text{Hom}_R(R, N) \simeq N, \\ H^1(X; N) &\simeq \text{Hom}_R(R \oplus R, N) \simeq N \oplus N, \\ H^0(X; N) &\simeq \text{Hom}_R(R, N) \simeq N. \end{aligned}$$

当 $N = R$ 时, 为计算 X 的上同调环结构, 考虑其对应的单纯剖分 K :



◇ 用 σ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 记图中所有 2-单形, 则 $[\sigma_i]^*$ 给出 $C^2(K; R) = Z^2(K; R)$ 的基. 由于任意两个邻接的 2-单形对应的对偶基相差一个上边缘 (即它们的公共边对应的对偶基在 δ 下的像), 因此可取定一个 2-单形 σ , 以其对应的对偶基 $[\sigma]^*$ 作为 $H^2(X; R)$ 的生成元.

◇ 由于 $[a + b + c]$ 与 $[d + e + f]$ 是 $H_1(X; R)$ 的生成元, 而 $\delta[b]^* = 0 = \delta[e]^*$, 且有

$$\begin{aligned} \langle [b]^*, a + b + c \rangle &= 1, & \langle [b]^*, d + e + f \rangle &= 0, \\ \langle [e]^*, a + b + c \rangle &= 0, & \langle [e]^*, d + e + f \rangle &= 1, \end{aligned}$$

因此 $[b]^*$ 与 $[e]^*$ 是 $H^1(X; R)$ 的生成元.

◇ $H^0(X; R)$ 的生成元为 $[\varepsilon_K] := \sum_{v \in K: \dim v=0} [v]^*$.

由分次结构, 为确定 X 的上同调环结构, 仅需求一阶元的上积. 由于 2-单形仅在 S^2 中, 我们得到

$$[b]^* \cup [b]^* = 0, \quad [e]^* \cup [e]^* = 0, \quad [b]^* \cup [e]^* = 0.$$

故

$$H^*(X; R) = R[\varepsilon_K] \oplus R[b]^* \oplus R[e]^* \oplus R[\sigma]^*,$$

且这是平凡环, 即正维数的上同调类的两两上积均为 0. □

习题 55 对 Klein 瓶 K , 证明:

$$(1) H^*(K; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[x, y] / \langle x^3, y^2, x^2 - xy \rangle.$$

$$(2) H^*(K; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[y, z] / \langle y^2, 2z, z^2, yz \rangle.$$

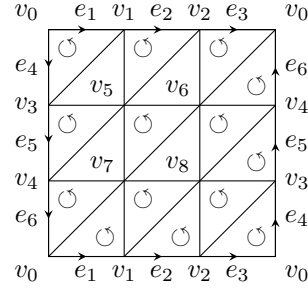
证明 在习题 21 中已求得 K 的同调群

$$H_2(K; R) = \{r \in R : 2r = 0\}, \quad H_1(K; R) = R \oplus R/2R, \quad H_0(K; R) = R.$$

课上已求得 K 的上同调环 (假设 R 为 PID)

$$H^2(K; R) = R/2R, \quad H^1(K; R) = R \oplus \{r \in R : 2r = 0\}, \quad H^0(K; R) = R.$$

为计算其环结构, 考虑 K 的一个单纯剖分:



令

$$\begin{aligned} z^1 &= [v_3, v_4]^* + [v_5, v_4]^* + [v_5, v_7]^* + [v_6, v_7]^* + [v_6, v_8]^* + [v_4, v_8]^*, \\ w^1 &= [v_1, v_2]^* + [v_5, v_2]^* + [v_5, v_6]^* + [v_7, v_6]^* + [v_7, v_8]^* + [v_1, v_8]^*, \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \delta z^1 &= [v_5, v_3, v_4]^* + [v_8, v_3, v_4]^* + [v_3, v_5, v_4]^* + [v_7, v_5, v_4]^* + [v_4, v_5, v_7]^* + [v_6, v_5, v_7]^* \\ &\quad + [v_5, v_6, v_7]^* + [v_8, v_6, v_7]^* + [v_7, v_6, v_8]^* + [v_4, v_6, v_8]^* + [v_6, v_4, v_8]^* + [v_3, v_4, v_8]^* \\ &= 2[v_8, v_3, v_4]^* \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} \delta w^1 &= [v_5, v_1, v_2]^* + [v_8, v_1, v_2]^* + [v_1, v_5, v_2]^* + [v_6, v_5, v_2]^* + [v_2, v_5, v_6]^* + [v_7, v_5, v_6]^* \\ &\quad + [v_5, v_7, v_6]^* + [v_8, v_7, v_6]^* + [v_6, v_7, v_8]^* + [v_1, v_7, v_8]^* + [v_7, v_1, v_8]^* + [v_2, v_1, v_8]^* \\ &= 0. \end{aligned}$$

由于 R 是 PID, 存在 $r_0 \in R$, 使得 $\{r \in R : 2r = 0\} = Rr_0$. 于是 $\delta(r_0 z^1) = 2r_0[v_8, v_3, v_4]^* = 0$, 且对 $H_1(K; R)$ 的生成元 $[e_1 + e_2 + e_3]$ 与 $[e_4 + e_5 + e_6]$, 有

$$\begin{aligned} \langle r_0 z^1, e_1 + e_2 + e_3 \rangle &= 0, & \langle r_0 z^1, e_4 + e_5 + e_6 \rangle &= r_0, \\ \langle w^1, e_1 + e_2 + e_3 \rangle &= 1, & \langle w^1, e_4 + e_5 + e_6 \rangle &= 0. \end{aligned}$$

因此

$$H^1(K; R) = R \oplus \{r \in R : 2r = 0\} \simeq R[w^1] \oplus R[r_0 z^1].$$

由于任意两个邻接的 2-单形对应的对偶基相差一个上边缘 (即它们的公共边对应的对偶基在 δ 下的像), 因此

$$H^2(K; R) = R/2R \simeq (R/2R)[[v_0, v_3, v_1]^*].$$

此外, $H^0(K; R)$ 的生成元为 $[\varepsilon_K] := \sum_{v \in K: \dim v=0} [v]^*$, 即

$$H^0(K; R) = R[\varepsilon_K].$$

选取 $r_0 z^1$ 与 w^1 对应 1-单形 “重叠区域” 中的 2-单形 (按顶点次序排序), 由

$$\begin{aligned} \langle (r_0 z^1) \cup w^1, [v_5, v_6, v_7] \rangle &= -\langle r_0 z^1, [v_5, v_6] \rangle \langle w^1, [v_6, v_7] \rangle = -0 \cdot (-1) = 0, \\ \langle (r_0 z^1) \cup w^1, [v_6, v_7, v_8] \rangle &= -\langle r_0 z^1, [v_6, v_7] \rangle \langle w^1, [v_7, v_8] \rangle = -r_0 \cdot 1 = -r_0 \end{aligned}$$

可知

$$(r_0 z^1) \cup w^1 = -r_0 [v_6, v_7, v_8]^* \sim -r_0 [v_0, v_3, v_1]^*.$$

同理, 由

$$\begin{aligned} \langle (r_0 z^1) \cup (r_0 z^1), [v_3, v_4, v_5] \rangle &= -\langle (r_0 z^1), [v_3, v_4] \rangle \langle (r_0 z^1), [v_4, v_5] \rangle = -r_0 \cdot (-r_0) = r_0^2, \\ \langle (r_0 z^1) \cup (r_0 z^1), [v_4, v_5, v_7] \rangle &= -\langle (r_0 z^1), [v_4, v_5] \rangle \langle (r_0 z^1), [v_5, v_7] \rangle = -(-r_0) \cdot (r_0) = r_0^2, \\ \langle (r_0 z^1) \cup (r_0 z^1), [v_5, v_6, v_7] \rangle &= -\langle (r_0 z^1), [v_5, v_6] \rangle \langle (r_0 z^1), [v_6, v_7] \rangle = -0 \cdot r_0 = 0, \\ \langle (r_0 z^1) \cup (r_0 z^1), [v_6, v_7, v_8] \rangle &= -\langle (r_0 z^1), [v_6, v_7] \rangle \langle (r_0 z^1), [v_7, v_8] \rangle = -r_0 \cdot 0 = 0, \\ \langle (r_0 z^1) \cup (r_0 z^1), [v_4, v_6, v_8] \rangle &= -\langle (r_0 z^1), [v_4, v_6] \rangle \langle (r_0 z^1), [v_6, v_8] \rangle = -0 \cdot r_0 = 0, \\ \langle (r_0 z^1) \cup (r_0 z^1), [v_3, v_4, v_8] \rangle &= -\langle (r_0 z^1), [v_3, v_4] \rangle \langle (r_0 z^1), [v_4, v_8] \rangle = -r_0 \cdot r_0 = -r_0^2 \end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned} (r_0 z^1) \cup (r_0 z^1) &= r_0^2 ([v_3, v_4, v_5]^* + [v_4, v_5, v_7]^* - [v_3, v_4, v_8]^*) \\ &= r_0^2 ([v_3, v_4, v_5]^* - [v_5, v_4, v_7]^* - [v_3, v_4, v_8]^*) \\ &\sim r_0^2 ([v_0, v_3, v_1]^* - [v_0, v_3, v_1]^* - [v_0, v_3, v_1]^*) \\ &= -r_0^2 [v_0, v_3, v_1]^*. \end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned} \langle w^1 \cup w^1, [v_1, v_2, v_5] \rangle &= -\langle w^1, [v_1, v_2] \rangle \langle w^1, [v_2, v_5] \rangle = -1 \cdot (-1) = 1, \\ \langle w^1 \cup w^1, [v_2, v_5, v_6] \rangle &= -\langle w^1, [v_2, v_5] \rangle \langle w^1, [v_5, v_6] \rangle = -(-1) \cdot 1 = 1, \\ \langle w^1 \cup w^1, [v_5, v_6, v_7] \rangle &= -\langle w^1, [v_5, v_6] \rangle \langle w^1, [v_6, v_7] \rangle = -1 \cdot (-1) = 1, \\ \langle w^1 \cup w^1, [v_6, v_7, v_8] \rangle &= -\langle w^1, [v_6, v_7] \rangle \langle w^1, [v_7, v_8] \rangle = -(-1) \cdot 1 = 1, \\ \langle w^1 \cup w^1, [v_1, v_7, v_8] \rangle &= -\langle w^1, [v_1, v_7] \rangle \langle w^1, [v_7, v_8] \rangle = -0 \cdot 1 = 0, \\ \langle w^1 \cup w^1, [v_1, v_2, v_8] \rangle &= -\langle w^1, [v_1, v_2] \rangle \langle w^1, [v_2, v_8] \rangle = -1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned} w^1 \cup w^1 &= [v_1, v_2, v_5]^* + [v_2, v_5, v_6]^* + [v_5, v_6, v_7]^* + [v_6, v_7, v_8]^* \\ &= -[v_1, v_5, v_2]^* + [v_2, v_6, v_5]^* - [v_5, v_7, v_6]^* + [v_6, v_8, v_7]^* \\ &\sim -[v_0, v_3, v_1]^* + [v_0, v_3, v_1]^* - [v_0, v_3, v_1]^* + [v_0, v_3, v_1]^* \\ &= 0. \end{aligned}$$

故

$$H^*(K; R) = R[\varepsilon_K] \oplus R[w^1] \oplus R[r_0 z^1] \oplus (R/2R)[[v_0, v_3, v_1]^*],$$

且其乘法表 (省略单位元) 为

\cup	$[w^1]$	$[r_0 z^1]$	$[[v_0, v_3, v_1]^*]$
$[w^1]$	0	$r_0^2 \pmod{2R} [[v_0, v_3, v_1]^*]$	0
$[r_0 z^1]$	$r_0^2 \pmod{2R} [[v_0, v_3, v_1]^*]$	$r_0^2 \pmod{2R} [[v_0, v_3, v_1]^*]$	0
$[[v_0, v_3, v_1]^*]$	0	0	0

(1) 当 $R = \mathbb{Z}_2$ 时,

$$\begin{aligned} H^*(K; \mathbb{Z}_2) &\simeq \mathbb{Z}_2[\varepsilon_K] \oplus \mathbb{Z}_2[w^1] \oplus \mathbb{Z}_2[z^1] \oplus \mathbb{Z}_2[[v_0, v_3, v_1]^*] \\ &\simeq \mathbb{Z}_2[x, y] / \langle x^3, y^2, x^2 - xy \rangle, \end{aligned}$$

其中同构关系为

$$x \leftrightarrow [z^1], \quad y \leftrightarrow [w^1], \quad x^2 = xy \leftrightarrow [[v_0, v_3, v_1]^*].$$

(2) 当 $R = \mathbb{Z}$ 时, 由于 \mathbb{Z} 是整环, $\{r \in R : 2r = 0\} = \{0\}$, 因此 $r_0 = 0$, 从而

$$\begin{aligned} H^*(K; \mathbb{Z}) &\simeq \mathbb{Z}[\varepsilon_K] \oplus \mathbb{Z}[w^1] \oplus \mathbb{Z}[[v_0, v_3, v_1]^*] \\ &\simeq \mathbb{Z}[y, z] / \langle y^2, 2z, z^2, yz \rangle, \end{aligned}$$

其中同构关系为

$$y \leftrightarrow [w^1], \quad z \leftrightarrow [[v_0, v_3, v_1]^*]. \quad \square$$

习题 56 验证奇异链水平上的卡积满足边缘公式:

$$\partial(\alpha \cap c) = (\delta\alpha) \cap c + (-1)^p \alpha \cap (\partial c), \quad \forall \alpha \in S^p(X; R), \forall c \in S_n(X; R).$$

证明 对任意 $\beta \in S^{n-p-1}(X; R)$, 我们有

$$\begin{aligned} \langle \beta, \partial(\alpha \cap c) \rangle &= \langle \partial^\# \beta, \alpha \cap c \rangle = \langle (\partial^\# \beta) \cup \alpha, c \rangle = (-1)^{n-p} \langle (\delta\beta) \cup \alpha, c \rangle \\ &= (-1)^{n-p} \langle \delta(\beta \cup \alpha) - (-1)^{n-p-1} \beta \cup (\delta\alpha), c \rangle \\ &= (-1)^p \langle \partial^\#(\beta \cup \alpha), c \rangle + \langle \beta \cup (\delta\alpha), c \rangle \\ &= (-1)^p \langle \beta \cup \alpha, \partial c \rangle + \langle \beta, (\delta\alpha) \cap c \rangle \\ &= \langle \beta, (-1)^p \alpha \cap \partial c \rangle + \langle \beta, (\delta\alpha) \cap c \rangle \\ &= \langle \beta, (\delta\alpha) \cap c + (-1)^p \alpha \cap (\partial c) \rangle. \end{aligned}$$

由 β 的任意性即得证. □

习题 57 验证 $H^p(X, X_1; R) \times H_n(X, X_1; R) \xrightarrow{\cap} H_{n-p}(X; R)$ 的良好性.

证明 对任意 $\alpha \in S^p(X, X_1; R)$, $\langle \alpha, S_p(X_1; R) \rangle = 0$. 由卡积的等价定义, 对任意 $\sigma \in S_n(X_1)$ 与 $r \in R$,

$$\alpha \cap (\sigma \otimes r) = (-1)^{p(n-p)} \sigma \langle \alpha, \sigma_p \rangle r = 0.$$

因此在链水平上有如下良定映射:

$$S^p(X, X_1; R) \times S_n(X, X_1; R) \xrightarrow{\cap} S_{n-p}(X; R).$$

进一步地, 若 $c \in Z_n(X, X_1; R)$, 即 $\partial c \in S_{n-1}(X_1; R)$, 则有

$$\partial(\alpha \cap c) = (\delta\alpha) \cap c + \underbrace{(-1)^p \alpha \cap (\partial c)}_{=0} = (\delta\alpha) \cap c.$$

于是卡积在以下两个情形下也是良定的:

$$\begin{aligned} Z^p(X, X_1; R) \times Z_n(X, X_1; R) &\xrightarrow{\cap} Z_{n-p}(X; R), \\ B^p(X, X_1; R) \times Z_n(X, X_1; R) &\xrightarrow{\cap} B_{n-p}(X; R). \end{aligned}$$

此外, 还有

$$Z^p(X, X_1; R) \times B_n(X, X_1; R) \xrightarrow{\cap} 0.$$

故卡积可定义在相对(上)同调水平上:

$$H^p(X, X_1; R) \times H_n(X, X_1; R) \xrightarrow{\cap} H_{n-p}(X; R). \quad \square$$

习题 58 设 (I, \leq) 为正向集, $\{M_i, \varphi_{j,i}\}$ 为链复形的正向系统, 其中 $\varphi_{j,i} : M_i \rightarrow M_j$ 为链映射, 则有 R -模同构

$$H_p\left(\varinjlim_{i \in I} M_i; R\right) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{i \in I} H_p(M_i; R).$$

证明 根据条件, 有交换图表

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & M_{i,p} & \xrightarrow{\partial_{i,p}} & M_{i,p-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \varphi_{j,i} & & \downarrow \varphi_{j,i} & & \\ \cdots & \longrightarrow & M_{j,p} & \xrightarrow{\partial_{j,p}} & M_{j,p-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

记 $M = \varinjlim_{i \in I} M_i$. 对任意 $m \in M_p$, 存在 $i \in I$ 与 $m_i \in M_{i,p}$, 使得 $m = \varphi_i(m_i)$. 定义 $\partial_p(m) = \varphi_i \circ \partial_{i,p}(m_i)$, 这是良定的 (不依赖于 i 的选取), 因为对任意满足 $i \leq j$ 的 $j \in I$, 均有

$$\varphi_j \circ \partial_{j,p} \circ \varphi_{j,i}(m_i) = \varphi_j \circ \varphi_{j,i} \circ \partial_{i,p}(m_i) = \varphi_i \circ \partial_{i,p}(m_i).$$

如此定义的 ∂_p 显然是模同态. 对任意 $m \in M_p$, 存在 $i \in I$, 使得 $m = \varphi_i(m_i)$, 从而

$$\partial_{p-1} \circ \partial_p(m) = \partial_{p-1}(\varphi_i \circ \partial_{i,p}(m_i)) \stackrel{\partial_{p-1} \text{ 的定义}}{=} \varphi_i \circ \partial_{i,p-1} \circ \partial_{i,p}(m_i) = \varphi_i(0) = 0.$$

故 (M, ∂) 也是一个复形. 由于取正向极限保持正合性, 对正合列

$$0 \longrightarrow \ker \partial_{i,p} \xrightarrow{\text{包含}} M_{i,p} \xrightarrow{\partial_{i,p}} M_{i,p-1}$$

取正向极限可得正合列

$$0 \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} \ker \partial_{i,p} \xrightarrow{\text{包含}} M_p \xrightarrow{\partial_p} M_{p-1}$$

$$\parallel$$

$$\ker \partial_p$$

同样地, 对正合列

$$M_{i,p+1} \xrightarrow{\partial_{i,p+1}} \text{im } \partial_{i,p+1} \longrightarrow 0$$

取正向极限可得正合列

$$M_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} \varinjlim_{i \in I} \text{im } \partial_{i,p+1} \longrightarrow 0$$

由此可得

$$\text{im } \partial_{p+1} = \varinjlim_{i \in I} \text{im } \partial_{i,p+1}.$$

故我们得到

$$H_p(M; R) = \ker \partial_p / \text{im } \partial_{p+1} = \left(\varinjlim_{i \in I} \ker \partial_{i,p} \right) / \left(\varinjlim_{i \in I} \text{im } \partial_{i,p+1} \right).$$

另一方面, 对正合列

$$0 \longrightarrow \text{im } \partial_{i,p+1} \xrightarrow{\text{包含}} \ker \partial_{i,p} \xrightarrow{\pi_p} H_p(M_i) \longrightarrow 0$$

取正向极限可得正合列

$$0 \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} \text{im } \partial_{i,p+1} \xrightarrow{\text{包含}} \varinjlim_{i \in I} \ker \partial_{i,p} \xrightarrow{\pi} \varinjlim_{i \in I} H_p(M_i) \longrightarrow 0$$

于是得到 R -模同构

$$\varinjlim_{i \in I} H_p(M_i; R) \simeq \left(\varinjlim_{i \in I} \ker \partial_{i,p} \right) / \left(\varinjlim_{i \in I} \text{im } \partial_{i,p+1} \right) \simeq H_p(M; R). \quad \square$$

习题 59 设 M 为紧带边流形, 边界为 $\text{Bd } M$, 内部为 $\text{Int } M = M - \text{Bd } M$. 证明:

$$H_c^q(\text{Int } M; R) = H^q(M, \text{Bd } M; R).$$

证明 用 $\text{Bd } M \times [0, \delta)$ 表示 $\text{Bd } M$ 在 M 中的管状邻域. 对任意 $\text{Int } M$ 中紧集 K , 取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 使得 $K \subset M - \text{Bd } M \times [0, \varepsilon)$. 由于 $M - \text{Bd } M \times [0, \varepsilon)$ 为 M 中闭集, 而 M 为紧流形, 因此 $M - \text{Bd } M \times [0, \varepsilon)$ 为 M 中紧集, 也即 $\text{Int } M - \text{Bd } M \times (0, \varepsilon)$ 为 $\text{Int } M$ 中紧集. 因此

$$\begin{aligned} H_c^q(\text{Int } M; R) &= \varinjlim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H^q(\text{Int } M, \text{Int } M - (\text{Int } M - \text{Bd } M \times (0, \varepsilon)); R) \\ &= \varinjlim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H^q(\text{Int } M, \text{Bd } M \times (0, \varepsilon); R). \end{aligned}$$

另一方面, 由于 $\overline{\text{Bd } M} \subset \text{Bd } M \times [0, \varepsilon)$, 由切除定理, 我们有

$$H^q(M, \text{Bd } M \times [0, \varepsilon); R) \simeq H^q(\text{Int } M, \text{Bd } M \times (0, \varepsilon); R).$$

而 $\text{Bd } M$ 是 $\text{Bd } M \times [0, \varepsilon)$ 的强形变收缩核, 因此

$$H^q(M, \text{Bd } M \times [0, \varepsilon); R) \simeq H^q(M, \text{Bd } M; R).$$

综上所述, 我们有

$$H_c^q(\text{Int } M; R) \simeq H^q(M, \text{Bd } M; R). \quad \square$$

习题 60 设 $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, 其中 $U_1 \subset U_2 \subset \dots$ 为 X 中一族开集. 证明:

$$\varinjlim_i H_c^q(U_i; R) = H_c^q(X; R).$$

证明 由于

$$H_c^q(U_i; R) = \varinjlim_{K \in \mathcal{U}_i} H^q(U_i, U_i - K; R) \stackrel{\text{切除}}{=} \varinjlim_{K \in \mathcal{U}_i} H^q(X, X - K; R),$$

而由 $U_i \subset U_j (\forall i \leq j)$ 可知 U_i 中的紧集也是 U_j 中的紧集, 即对 $i \leq j$, 有如下交换图表:

$$\begin{array}{ccc} H_c^q(U_i; R) & \longrightarrow & H_c^q(U_j; R) \\ & \searrow & \swarrow \\ & H_c^q(X; R) & \end{array}$$

因此存在模同态

$$\Phi : \varinjlim_i H_c^q(U_i; R) \rightarrow H_c^q(X; R).$$

下证 Φ 既单又满, 从而 Φ 是模同构.

- (1) 对任意 $[c] \in H_c^q(X; R)$, 由紧支上调的定义, 存在 X 中紧集 K 与 $[c_K] \in H^q(X, X - K; R)$, 使得 $\varphi_K[c_K] = [c]$. 而对这个紧集 K , 存在 $i_1 < \dots < i_N$, 使得 $K \subset \bigcup_{i=1}^{i_N} U_i$, 从而 K 为 U_{i_N} 中紧集. 于是由如下交换图表可知 Φ 为满射.

$$\begin{array}{ccccc} & & H^q(X, X - K; R) & \boxed{[c_K]} & \\ & & \swarrow \varphi_{i_N, K} & \downarrow \varphi_K & \\ \boxed{\varphi_{i_N, K}[c_K]} & H_c^q(U_{i_N}; R) & \longrightarrow & H_c^q(X; R) & \boxed{[c]} \\ & \downarrow & \nearrow \Phi & & \\ & \varinjlim_i H_c^q(U_i; R) & & & \end{array}$$

- (2) 假设 $[c] \in \varinjlim_i H_c^q(U_i; R)$ 满足 $\Phi[c] = 0$, 则存在 i 与 $[c_i] \in H_c^q(U_i; R)$, 使得 $\varphi_i[c_i] = [c]$. 进而存在 U_i 中紧集 K_i 与 $[c_{K_i}] \in H^q(X, X - K_i; R)$, 使得 $\varphi_{i, K_i}[c_{K_i}] = [c_i]$. 由假设, $\Phi \circ \varphi_i \circ \varphi_{i, K_i}[c_{K_i}] = 0$, 因此存在 X 中包含 K_i 的紧集 K 与 $[c_K] \in H^q(X, X - K; R)$, 使得 $[c_K] = 0$. 取充分大的 i_N 使得 $K \subset U_{i_N}$, 则 $[c_{i_N}] := \varphi_{i_N, K}[c_K] = 0$. 于是 $\varphi_{i_N}[c_{i_N}] = 0$, 即 Φ 是单射. \square

习题 61 设 $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, 其中 $U_1 \subset U_2 \subset \cdots$ 为 X 中一族开集. 证明:

$$\varinjlim_i H_{n-q}(U_i; R) = H_{n-q}(X; R).$$

证明 $\{H_{n-q}(U_i; R) : i \in \mathbb{N}\}$ 在包含映射下显然构成一个正向系统, 包含映射诱导模同态

$$\phi : \varinjlim_i H_{n-q}(U_i; R) \rightarrow H_{n-q}(X; R).$$

下证 ϕ 既单又满, 从而 ϕ 是模同构.

- (1) 对任意 $[z] \in H_{n-q}(X; R)$, 取其代表元 $z \in S_{n-q}(X; R)$. 存在 X 中紧集 K , 使得 $z \in S_{n-q}(K; R)$. 取充分大的 i_N , 使得 $K \subset U_{i_N}$, 则 $z \in S_{n-q}(U_{i_N}; R)$. 取 $[z]_{i_N} \in H_{n-q}(U_{i_N}; R)$, 使得 $(j_{i_N, X})_* [z]_{i_N} = [z]$. 于是 $\phi(\varphi_{i_N} [z]_{i_N}) = (j_{i_N, X})_* [z]_{i_N} = [z]$, 即 ϕ 为满射.
- (2) 假设 $[y] \in \varinjlim_i H_{n-q}(U_i; R)$ 满足 $\phi[y] = 0$, 则存在充分大的 i 与 $[y_i] \in H_{n-q}(U_i; R)$, 使得 $[y_i] := (j_{i, N})_* [y_i] = 0$. 因此存在 $z \in S_{n-q+1}(X; R)$, 使得 $y_i = \partial z$. 取充分大的 i_N , 使得 $z \in S_{n-q+1}(U_{i_N}; R)$, 则 $(j_{i, i_N})_* [y_i] = 0 \in H_{n-q}(U_{i_N}; R)$, 故 $[y] = 0$, ϕ 是单射. \square